专升本

《高等数学（二）》教程

丁大公 编著

华东师大
成考书

华东师范大学继续教育学院

联合组编

华东师范大学出版社

华东师范大学出版社

华东师大成考书

“华东师大成考书”共 14 册与读者见面了。

这套成考书，有“高中起点”和“专升本”两大板块，每个板块由“教程”（办学或自学用的各科目教材）和“得分策略”（本科目的考前辅导，附模拟试题）组成。

“高中起点”板块 3 ＋ 3：

高中起点《语文》教程	高中起点《语文》得分策略
高中起点《英语》教程	高中起点《英语》得分策略
高中起点《数学（文）》教程	高中起点《数学（文）》得分策略

“专升本”板块 4 ＋ 4：

专升本《政治》教程	专升本《政治》得分策略
专升本《英语》教程	专升本《英语》得分策略
专升本《大学语文》教程	专升本《大学语文》得分策略
专升本《高等数学（二）》教程	专升本《高等数学（二）》得分策略

我们在第一版就推出“华东师大成考书”品牌，是基于依托华东师大继续教育学院在成人考试方面的办学优势和华东师大出版社在教育类图书方面的出版优势。

今天的华东师大继续教育学院，是整合华东师大师资雄厚、历史悠久的函授教育、夜大学、自学考试、社会培训而组成的综合性成人教育办学和研究机构。华东师大的函授教育始于1956年，夜大学创建于1979年，主考自学考试自1982年始，是全国最早开展成人教育教学的院校之一，积累了丰富的成人考试办学辅导经验。而华东师大出版社又是以出版教育类、教材类、辅导书为特色的出版社。这次由两家机构联合组编这套成考书，相信我们的书会赢得考生的认同。

本套书一反有的成考书不切成人考生的实际、作者没有成人考试教学经历、内容脱离成人考生接受程度的情况，而是在遴选作者时，全部选择具有丰富的成人教学经验、参加各次成人考试阅卷的老师为本套书的作者。在此基础上，这套“华东师大成考书”依据全国成人考试大纲，博采其他成考书之长，“以成人考生为本”，以切实、快速提高考分为编写理念，力争编出实用性强、具有品牌效应的“华东师大成考书”。

本套书既可作为全国各类成人考试办学机构的教材、练习册，又可作为考生自学使用。

欢迎使用学校和考生在使用中对本套书提出宝贵意见。

华东师范大学出版社

2004年10月

编者的话

根据教育部颁布的专科起点升本科的考试大纲和针对成人考生的特点，我们编写了这本《专升本〈高等数学(二)〉教程》.

本书以高等数学的基本知识、基本原理和基本技能为主要内容，避开复杂的运算与特殊的技巧性运算. 讲解基本知识和基本原理时，是在满足考试大纲的要求下，尽量讲得简单、清晰、易懂. 对于大纲规定的考试内容，我们都选配相应例题加以分析讲解，在每节后根据考试内容和考试题型选编了练习题，并附以参考解答.

相对来讲，成人考生的学习时间紧，因此将“做题目”改为“看题目”不失为提高学习效率的一个好方法，这实际上也是很多成人学生常用的学习方法. 因为做出一道题目所用的时间大约可看懂三道题甚至更多. 但通过“看题目”来学习必须要有一个量的保证. 为此我们还编有《专升本〈高等数学(二)〉得分策略》一书，书内收集了大量符合考试要求的题目. 每题附有参考答案，以满足“看题目”学习的要求.

如果你是一个时间较为充裕的考生，你可选择多做一些题目. 毕竟做题的效果要好些，但如果你的时间较紧，则可选择多看一些题目. 你也可将《得分策略》一书作为看题用，将本书每节后的练习作为做题用.

本书对较难的题目打上“ * ”号，对时间较紧的考生可跳过去不看.

希望大家能根据自己的情况制定适合自己的学习方法，并预祝大家最后能顺利地通过考试.

编者

2004 年

目　　录

第一章 函数、极限和连续

§1.1 函 数

一、基本要求

1. 理解函数的概念,会求函数的表达式、定义域及函数值,会求分段函数的定义域、函数值,会作出简单分段函数图象.

2. 理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.

3. 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像),会求单调函数的反函数.

4. 理解和熟练掌握函数的四则运算与复合运算.

5. 掌握基本初等函数的性质及其图象.

6. 了解初等函数的概念.

7. 会建立简单实际问题的函数关系式.

二、基本内容

(一) 函数的概念

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量,D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集,如果对任意的 $x \in D$,变量 y 按照一定的规律,有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x)$$

称 D 为该函数的定义域,x 为自变量,y 为因变量.

两个函数只要定义域相同,且对定义域内的每一个值,与之对应的两个函数的函数值都相同,则这两个函数就相同. 如果两个函数定义域、对应法则相同,只是表示自变量的字母不同,这两个函数仍是相同的,即函数与表示自变量的字母无关.

例 1 下列函数为同一函数的是( ).

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$

B. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$

C. $f(x)=x$ 与 $\varphi(t)=t(\sin^2 t+\cos^2 t)$

D. $f(x)=\lg(x^2)$ 与 $\varphi(x)=2\lg x$

答 选 C.

因为对于 A, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$, 由于定义域不同,所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不是同一函数. 同样对于 B 和 D, $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的定义域也是不同的. 而对于 C, 由于 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$, $f(x)$ 与 $\varphi(t)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$, 且对应法则也相同,因而是同一函数.

2. 函数定义域的求法

求函数的定义域是指求使函数表达式有意义的自变量的取值范围. 对于用数学式子表示的函数所要求的定义域主要是:

(1) 分式中的分母不能为零;

(2) 负数不能开偶次方;

(3) 对数中的真数必须大于零;

(4) 反三角函数 $\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 中的 x 必须满足 $|x|\leqslant 1$;

(5) 反三角函数 $\arctan x$ 与 $\operatorname{arccot} x$ 中的 x 必须分别满足 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 和 $x\neq k\pi$ (k 为整数);

(6) 上述数种情况同时在某函数中出现,此时应取其交集.

对于反映实际问题的函数,其定义域要由所给问题的实际意义来确定.

例 2 求下列各函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}$

(3) $y=\lg(2+x)$　　(4) $y=\arcsin(3x-1)$

解 (1) 对于 $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$ 要求分母不为零,即

$$x^2-2x=x(x-2)\neq 0.$$

也就是当 $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$ 时，函数有定义，故定义域为：$(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 对于 $y=\sqrt{4-x^2}$ 要求 $4-x^2\geqslant 0$，即 $-2\leqslant x\leqslant 2$，故定义域为 $[-2,2]$.

(3) 对于 $y=\lg(2+x)$ 要求 $2+x>0$，即 $x>-2$，故定义域为 $(-2,+\infty)$.

(4) 对于 $y=\arcsin(3x-1)$ 要求 $|3x-1|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant 3x-1\leqslant 1$，亦即 $0\leqslant x\leqslant \dfrac{2}{3}$，故定义域为 $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$.

例 3 求函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解 由真数必须大于零得 $x+1>0$，即 $x>-1$；
由负数不能开偶次方得 $x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1$；
由分母不能为零得 $x-1\neq 0$，即 $x\neq 1$.
函数定义域为其交集 $x>1$，即 $(1,+\infty)$.

例 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(2x-1)$ 的定义域为（ ）.

A. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ B. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ C. $[0,1]$ D. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

答 选 B.

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$ 应该理解为括号里的变量的取值范围为 $[0,1]$，此时函数的变量为 $2x-1$，则有

$$0\leqslant 2x-1\leqslant 1,\ 即\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$$

故选 B.

3. 函数的表示法

常用的函数表示法有三种：

(1) 解析法. 对自变量和常数施加四则运算、乘幂、指数运算、取对数、取三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式. 用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法.

(2) 表格法. 把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系的方法称为表格法.

（3）图形法.用直角坐标系 xOy 平面上的曲线来表示函数关系的方法称为图形法.

函数的三种表示法各有优缺点，在具体使用时，常常是三种方法配合使用.

4. 分段函数、隐函数、反函数和复合函数

（1）分段函数.有些函数，对于其定义域内自变量 x 的不同取值，函数不能用一个统一的公式来表示，而要用两个或者两个以上的式子来表示，这类函数称为分段函数.例如

$$y=\begin{cases}x^2, & x<-1,\\ 1, & -1\leqslant x<1,\\ x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的分段函数，其图形如图 1-1 所示.

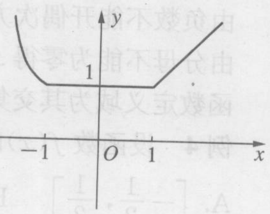

图 1-1

关于分段函数，应该注意以下几点：

i）分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

ii）因函数式子是分段表示的，故各段定义域必须明确标出；

iii）对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的式子中去求；

iv）分段函数的定义域是各段定义域的并集.

例 5 已知函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x<0,\\ x^2, & 0<x<1,\\ 3x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

求 $f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(2)$ 及其定义域.

解 $f(-2)$ 的值由第一段的公式去求，所以 $f(-2)=\dfrac{1}{-2-2}=-\dfrac{1}{4}$.

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$的值由第二段的公式去求，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

$f(2)$ 的值由第三段的公式去求，$f(2)=3\times 2-1=5$.

其定义域为三段定义域的并集

$$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1)\cup[1,\ 2]=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 2].$$

(2) 隐函数. 函数 y 与自变量 x 的对应法则是用一个方程 $F(x,\ y)=0$ 表示的函数称为隐函数.

例如 $3x^2+2y-5=0$ 就是一个隐函数. 因为在这个方程中，函数 y 没有被用仅含自变量的公式 $f(x)$ 表示出来. 若由它解出

$$y=\frac{1}{2}(5-3x^2),$$

它就变成了显函数，称为隐函数显化，但并非所有的隐函数都可以解成显函数. 例如 $\sin(x+y)-e^{xy}=0$ 就不能显化.

(3) 反函数. 设已知函数为 $y=f(x)$，如果由此解出的 $x=\varphi(y)$ 是一个函数，则称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，由于习惯上往往用字母 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 相互交换，得 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必定关于直线 $y=x$ 对称.

求反函数的一般步骤为：

i) 在 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$；

ii) 在 $x=\varphi(y)$ 中，将 x 与 y 位置互换，即得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 6 求函数 $f(x)=2^{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

解 由 $y=2^{x-1}$ 解出 $x=\log_2 y+1$.

x 与 y 互换位置得 $y=\log_2 x+1$，即 $f^{-1}(x)=\log_2 x+1$.

如果注意到原来函数的定义域(值域)是反函数的值域(定义域)这一性质，在做单项选择题时，可采用赋值法来排除一些选项，从而得到正确的选项.

例 7 函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数是(　　).

A. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$　　　　B. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$

C. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ D. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$

解 在原来的函数中，当 $x=2$ 时，$y=\dfrac{1}{3}$，则在反函数中当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时应有 $y=2$. 将 $x=\dfrac{1}{3}$ 代入选项可知 A 与 C 的 y 都小于零，B 中的 y 小于 1. 故都应排除. 而 D 中的 y 正好为 2. 故选 D.

当然这里不一定要用 $x=2$ 先代. 只要你认为是计算方便的数都可以代. 如果代入选项后有两个或两个以上选项都对，则必须再找一个数代，直到只有一个选项是正确的为止.

(4) 复合函数. 设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，当 x 在定义域内变化时，相应的 $u=\varphi(x)$ 的值在 $y=f(u)$ 的定义域内变化. 因此，当 x 确定后，根据 $u=\varphi(x)$ 就得到 u 的值，由 u 的值根据 $y=f(u)$ 又确定了 y 的值，这样 x 与 y 之间通过变量 u 而形成一个函数关系，这样的函数关系称为复合函数. 记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 x 称为自变量，u 为中间变量，y 为因变量.

复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有多个中间变量，即可以通过多次复合得到一个函数. 例如函数 $y=\arccos(\sqrt{\ln(x^2-1)})$ 可以看成是由函数

$$y=\arccos u,\ u=\sqrt{v},\ v=\ln w,\ w=t-1,\ t=x^2$$

复合而成的复合函数.

5. 函数符号的运用

(1) 已知函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的表达式，求函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式.

这类问题相当于已知函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 就可得复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

例 8 设 $f(x)=\ln(x+1)$，$\varphi(x)=x^2+2$，求 $f[\varphi(x)]$.

解 由于 $f(x)=\ln(x+1)$ 的结构式为 $f(\square)=\ln(\square+1)$（其中 $\square$ 为变量），因此

$$f[\varphi(x)]=\ln[(x^2+2)+1]=\ln(x^2+3).$$

例 9 设 $f(x)=3x+5$，求 $f[f(x)-2]$.

解　$f(x)=3x+5$ 的结构式为 $f(\square)=3\times\square+5$. 将 $f(x)-2=3x+5-2=3x+3$ 代入结构式得

$$f[f(x)-2]=f(3x+3)=3(3x+3)+5=9x+14.$$

例 10　设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,求 $f[f(x)]$.

解　函数的结构式为 $f(\square)=\dfrac{\square}{1+\square}$, $\square\neq-1$.

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{1+f(x)}=\frac{\dfrac{x}{1+x}}{1+\dfrac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}.\left(x\neq-\frac{1}{2},\ x\neq-1\right)$$

(2) 已知函数 $\varphi(x)$ 和函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式,求函数 $f(x)$ 的表达式.

这类问题的解法常用的有三种:

i) 换元法. 令 $u=\varphi(x)$,从中解出反函数 $x=g(u)$,求出 $f(u)$ 的表达式,再将 u 换成 x,则得 $f(x)$ 的表达式.

ii) 凑变量法. 将 $f[\varphi(x)]$ 的表达式凑成 $\varphi(x)$ 的函数关系式,然后将所有的 $\varphi(x)$ 换成 x,则得 $f(x)$ 的表达式.

iii) 直接代入法. 直接将 $\varphi^{-1}(x)$ 代入 $f[\varphi(x)]$ 的表达式,便可得 $f(x)$ 的表达式.

例 11　设 $f(x+1)=x^2-1$, 求 $f(x)$.

解法 1:(换元法)　令 $x+1=t$,则 $x=t-1$. 代入原式后可得 $f(t)=(t-1)^2-1=t^2-2t$,即 $f(x)=x^2-2x$.

解法 2:(凑变量法)　将等式右端写成 $x+1$ 的形式.

$$f(x+1)=x^2-1=(x+1)(x-1)=(x+1)\cdot[(x+1)-2].$$

故　$f(x)=x(x-2)$.

解法 3:(直接代入法)　直接用 $x-1$ 换等式两边的 x 得

$$f(x-1+1)=f(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x.$$

例 12　设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x}+1$, 求 $f(x)$.

解 将$\frac{1}{x}$直接代入等式两边的x可得

$$f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)=f(x)=\frac{1}{x^2}+x+1.$$

例 13 设$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$,求$f(x)$.

解 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.$

故 $f(x)=x^2-2.$

(3) 已知函数$f(x)$和$f[\varphi(x)]$的表达式,求函数$\varphi(x)$的表达式.

解这类问题只要将$\varphi(x)$代入$f(x)$的表达式,其结果应与$f[\varphi(x)]$的表达式相同,于是便可解得函数$\varphi(x)$的表达式.

例 14 已知$f(x)=e^x$,$f[\varphi(x)]=x+1$,求$\varphi(x)$的表达式.

解 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi(x)}=x+1$,于是可得

$$\varphi(x)=\ln(x+1).$$

(二) 函数的性质

1. 单调性

设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果对于(a,b)内的任意两点x_1和x_2,当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数$f(x)$在(a,b)内是单调增加的;如果当$x_1<x_2$时有$f(x_1)<f(x_2)$,则称$f(x)$在(a,b)内是严格单调增加的.

如果对于(a,b)内的任意两点x_1和x_2,当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数$f(x)$在(a,b)内是单调减少的;如果当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)>f(x_2)$,则称$f(x)$在(a,b)内是严格单调减少的.

有些函数在某些区间内是单调增加的,在某些区间内是单调减少的.例如函数$y=x^2$在$[0,+\infty)$内是单调增加的;在$(-\infty,0]$内是单调减少的.因此在讨论函数单调性时应指出其相应的单调区间.

判定函数$y=f(x)$单调性的常用方法有:

(1) 利用单调性定义.

在给定的区间内任取两点 $x_1 < x_2$，比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小，再确定函数是单调增加还是单调减少.

(2) 利用导数符号.

如果在某区间内恒有 $f'(x) > 0$（或 $f'(x) < 0$），则 $f(x)$ 在该区间内是单调增加(或单调减少)的.

2. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义区间关于坐标原点是对称的. 如果对于定义区间内任一点 x 恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称(图 1－2)，奇函数的图形关于坐标原点对称(图 1－3).

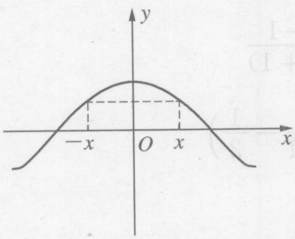

图 1－2

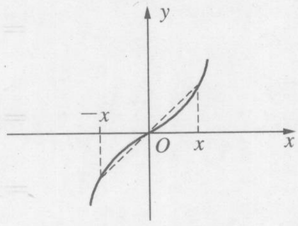

图 1－3

很多函数是没有奇偶性的. 例如 $y = e^x$ 既不是奇函数，又不是偶函数.

除了按奇偶性的定义来判定函数的奇偶性外，还可利用下列性质：

奇函数＋奇函数＝奇函数；偶函数＋偶函数＝偶函数；

奇函数×奇函数＝偶函数；偶函数×偶函数＝偶函数；

奇函数×偶函数＝奇函数；

偶函数的函数是偶函数；

奇函数的反函数是奇函数.

例 15 判定 $y = x^4 + 2\cos x$ 的奇偶性.

解 y 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，因为

$$y(-x) = (-x)^4 + 2\cos(-x) = x^4 + 2\cos x = y(x),$$

所以 $y = x^4 + 2\cos x$ 是偶函数.

例 16 设 $f(x)$ 为奇函数，且 $F(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2}\right)$，其中 a 为不

等于1的正常数，则函数$F(x)$是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　D. 奇偶性与a有关的函数

答　选A.

利用$f(x)$为奇函数的条件，计算$F(-x)$：

$$\begin{aligned}F(-x)&=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)\\&=f(-x)\cdot\frac{2-(a^{-x}+1)}{2(a^{-x}+1)}\\&=-f(x)\,\frac{(1-a^{-x})a^{x}}{2(a^{x}+1)}\\&=-f(x)\,\frac{a^{x}-1}{2(a^{x}+1)}\\&=f(x)\cdot\left(\frac{1}{a^{x}+1}-\frac{1}{2}\right)\\&=F(x).\end{aligned}$$

例17　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，则下列函数中必定为奇函数的是(　　).

A. $y=x[f(x)-f(-x)]$　　B. $y=f(x)+f(-x)$

C. $y=xf(x^2)$　　D. $y=-f(-x)$

答　选C.

容易验证A和B都是偶函数. 由于x^2为偶函数，偶函数的函数还是偶函数，故$f(x^2)$是偶函数. 再乘上x这个奇函数，于是$y=xf(x^2)$为奇函数.

例18　函数$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 既奇又偶函数

答　选A.

因为$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$是奇函数，而奇函数的反函数还是奇函数，因此$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数是奇函数.

3. 周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在常数 $T>0$，对任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数. 使得上述等式成立的最小正数 T，称为 $f(x)$ 的最小正周期，简称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的函数还是周期函数.

若函数 $f(x)$ 的周期为 T，则函数 $f(ax)\ (a>0)$ 的周期为 $\dfrac{T}{a}$.

例如 $y=\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数. 因而 $g(x)=\sin^3 x+2\sin x-1$ 也是周期函数. $h(x)=\sin(5x)$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{5}$.

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，如果存在正数 M，使得对 (a,b) 内的任一点 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的，否则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

一个函数是否有界与讨论问题的区间有关. 例如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的，但在任何有限区间内它都是有界的.

(三) 初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数 $y=C$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，图形是一条平行于 x 轴的直线(图 1-4). 常数函数是偶函数.

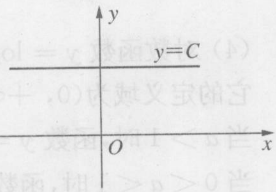

图 1-4

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ 为实数)

它的定义域随 μ 值的不同而不同. 但不论 μ 为何值，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，且图形都经过 $(1,1)$ 点.

特别地，当 μ 是正整数时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，当 μ 是负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

当 $\mu>0$ 时，它的图形如图 1-5 所示，在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加且无界.

当 $\mu<0$ 时，它的图形如图 1-6 所示，在 $(0,+\infty)$ 内严格单调减少且无界.

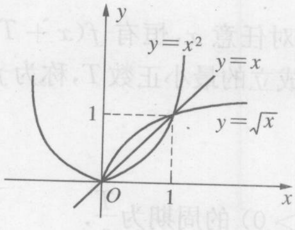

图 1－5

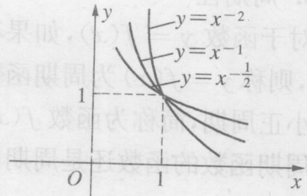

图 1－6

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，不管 a 取何值，函数图形均经过 $(0,1)$ 点，函数值域为 $(0,+\infty)$，因此它的图象总是在 x 轴的上方.

当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 严格单调增加且无界；

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 严格单调减少且无界.（如图 1－7 所示）

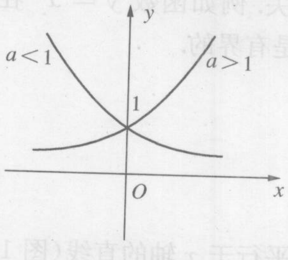

图 1－7

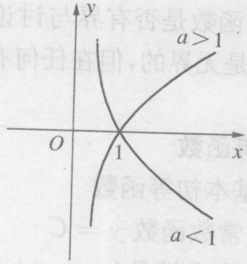

图 1－8

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$，且 $a\neq 1)$

它的定义域为 $(0,+\infty)$，不论 a 取何值，函数图形均经过 $(1,0)$ 点.

当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 严格单调增加且无界；

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 严格单调减少且无界.（如图 1－8 所示）

以 10 为底的对数函数叫做常用对数，简记为 $y=\lg x$；

以 e 为底的对数函数叫做自然对数，简记为 $y=\ln x$.

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是奇函数，是周期为 2π 的周期函数，且为有界函数.（如图 1－9 所示）