21世纪高职高专数学规划教材

概率论与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

東北大學出版社
Northeastern University Press

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 石辅天，唐青松，李友国主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2009.8
ISBN 978-7-81102-719-8

Ⅰ. 概…　Ⅱ. ①石…　②唐…　③李…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材　②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 129396 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
网址：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：9.75
字　　数：268 千字
出版时间：2009 年 8 月第 1 版
印刷时间：2009 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：王延霞　刘宗玉
责任校对：朗　坤
封面设计：唐敏智
责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-719-8　　　　定　价：15.00 元

前　　言

近年来随着高职高专教学改革的不断深入，对数学课程的基本要求有了很大变化，并提出了一些新的要求．如何实现高职高专学生的专业培养目标，与“工学结合”培养模式相适应；怎样才能在数学课程学时不断减少的情况下，为学生们打好数学基础，这些都给数学教学工作者提出了新的课题．正是在这样的背景下，我们结合教学改革的实际要求和多年积累的一些成功经验，精心编写出这套《21世纪高职高专数学规划教材》，本书为其中的《概率论与数理统计》．

本书是根据教育部“高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求”而编写的，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，并充分考虑了相当多的学校概率论与数理统计课程学时减少这一实际情况．为此，确立编写本书的指导思想为：联系实际，深化概念，侧重计划，注重应用．本书具备如下特色：

1．重视基本概念

概率论与数理统计内容虽然抽象，但其中每一个基本概念都有自己的实际应用背景，力求从身边的实际问题出发，自然地引出基本概念，以激发学生的兴趣和求知欲．在弄清基本概念的基础上，理顺基本概念和各个概念之间的联系，提高教学效果．在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会数学的本质以及数学的价值．

2．结合实际，注重实用

例题、习题中注重工程上或经济方面实际问题的选取，意在培养学生解决实际问题的意识和能力，最终实现培养应用性人才的高职高专教育目标．

3．侧重运算、解题能力

在解题方法方面有较深入的论述，其用意在于让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程、掌握解题方法，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的．

全书共九章，依次为第一章随机事件与概率、第二章一维随机变量及其分布、第三章二维随机变量及其分布、第四章随机变量的数字特征、第五章大数定律及中心极限定理、第六章数理统计的基本概念、第七章参数估计、第八章假设检验、第九章方差分析及回归分析．各章节后均配有习题，书后附有全部习题的参考答案．标有*的内容是数学大纲不要求的内容．

由于水平所限，加之时间仓促，书中存在疏漏、不足之处在所难免，敬请广大师生不吝赐教，将不胜感谢．

编　者

2009年6月

《概率论与数理统计》编写人员

主　　　编：石辅天　唐青松　李友国

副　主　编：朱贵凤　付连魁　唐干武

其他编写人员：由雪梅　李荣玲　王学理

目　　录

第一章　随机事件与概率

概率论和数理统计是研究随机现象的一个数学分支．本章主要介绍概率论的基本概念．

第一节　随机事件及其运算

一、随机现象

自然界和社会现象虽然多种多样，但可以分为两类．

一类是事前可预测的，即在相同的条件下，其结果总是一定的．例如，在标准大气压力下，水加热到100℃时必然沸腾；将一枚硬币向上抛，它必然下落．将这类现象称为确定性现象或必然现象．

另一类现象与必然现象存在着本质的区别，它在事前是不可预测的．即在相同条件下，重复进行试验，每次结果也未必相同．例如，用一仪器多次测量一物体的长度或重量，所得到的结果总是略有差异；在相同的条件下，多次抛掷一枚均匀的硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上；买彩票可能中奖，也可能不中．

这类现象的共同特点是在相同条件下，经过多次试验观察得到一系列不同的结果，而且每次试验之前，不知道会出现哪一种结果．这类现象称为偶然现象或随机现象．另一方面，在相同条件下，虽然个别试验结果在某次试验或观察中可能出现也可能不出现，但在大量试验中却呈现出某种规律性，这种规律性称为统计规律性．例如，在掷一枚硬币时，既可能出现正面，也可能出现反面，预先作出确定的判断是不可能的，但是直观上出现正面与出现反面的机会应该相等，即在大量的试验中出现正面的情况应接近50%．

概率论和数理统计就是研究随机现象统计规律性的一个数学分支．

随机现象随处可见．例如：

(1) 抛一枚硬币，有可能正面朝上，也有可能反面朝上；

(2) 掷一颗骰子，出现的点数；

(3) 一天内进入某超市的顾客数；

(4) 某种型号电视机的寿命；

(5) 未来某时刻的温度；

(6) 测量某物理量(长度、直径等)的误差．

二、随机试验与样本空间

随机现象是通过随机实验来研究的．我们把在一定的条件下，对自然现象进行一次观察或进行一次科学试验称为一个试验，如果试验满足以下条件：

(1) 在相同的条件下可以重复进行；

(2) 试验的所有可能结果是预先知道的，且不止一个；

(3) 每做一次试验总会出现可能结果中的一个，但在试验之前，不能预言会出现哪个结果．那么，就称这样的试验为随机试验，也常简称为试验．

样本空间是随机现象的一切可能结果组成的集合，记为

$$\Omega=\{\omega\}. \tag{1.1}$$

其中，ω 表示每一个可能出现的结果，称为样本点．

例如，掷一颗骰子，观察出现的点数这样的随机试验的样本空间为 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$．

三、随机事件

定义　样本空间中的某些样本点组成的集合称为一个随机事件．随机事件是样本空间的一个子集，简称事件．常用大写字母 A，B，…表示．

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生．在每次试验中，当且仅当随机事件所包含的某一个样本点在试验中出现时，这一随机事件发生．

在掷一颗骰子，观察出现的点数的随机试验中，事件 A =“出现 1 点”，它由 Ω 的单个样本点“1”组成．由单个样本点组成的事件称为基本事件．若掷骰子时出现 1 点则事件 A 发生，否则不发生．

事件 B =“出现偶数点”，它由三个样本点“2，4，6”组成．若掷骰子时出现 2 点、4 点或 6 点则事件 B 发生，否则不发生．

不包含任何样本点的集合称为空集，记做 $\varnothing$．它也是样本空间的子集，在每次试验中都不会发生，称为不可能事件．

样本空间 Ω 包含所有的样本点，是 Ω 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件．

四、事件之间的关系与运算

从集合论的观点看，事件既然是一些集合，就必然存在着事件之间的关系，以及由若干事件来定义(或表示)的新的事件，即事件的一些运算及其规则，事件的关系与运算和集合的关系与运算是对应的．在以下的叙述中，设 Ω 是给定的样本空间，A，B，C，…均表示为其中的事件．

1．包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$)．由于事件 A，B 均是 Ω 的子集，因此从集合论的观点看来，若对任意的 $\omega\in A$ 有 $\omega\in B$，则 $A\subset B$，如图 1-1．

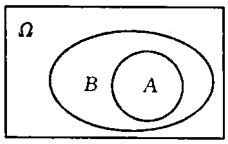

图 1-1

2．等价关系

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 等价，或称 A 等于 B，记作 $A=B$．

即对任意的 $\omega\in A$，必有 $\omega\in B$，而且对任意的 $\omega\in B$，必有 $\omega\in A$；$A=B$ 表示 A 与 B 是同一事件．

3．事件的交

定义 $A\cap B$ 发生为事件 A，B 同时发生，称 $A\cap B$ 为 A 与 B 的交，简记作 AB．

推广到 n 个事件：定义 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 发生为事件A_1，A_2，…，A_n 同时发生，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为事件A_1，A_2，…，A_n 的交.

4．互不相容

A，$B \subset \Omega$，如果 A，B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称二事件互不相容(或称互斥、互不相交)，如图 1-2.

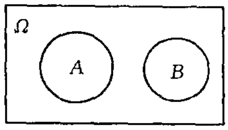

图 1-2

5．事件的并

定义 $A \cup B$ 为事件A，B 中至少有一事件发生，称 $A \cup B$ 为A 与B 的并.

推广到 n 个事件：记 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为事件$A_k(k=1,\cdots,n)$中至少有一个事件发生，则称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为事件 A_1，A_2，…，A_n 的并.

6．事件的差

"事件 A 发生，但事件 B 不发生"也是一个事件，记为 $A-B$，称 $A-B$ 为事件A 与B 的差.

7．对立事件

若 A 发生则B 不发生，且 A 不发生则B 必发生，则称 B 为A 的对立事件，常把 A 的对立事件记为 $\bar{A}$，即

$$\bar{A}=\{\omega \mid \omega \in \Omega,\ 但\ \omega \notin A\},\quad B=\bar{A} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B=\Omega, \\ AB=\varnothing. \end{cases}$$

也就是 $\bar{A}=\Omega-A$.

事件的运算规则：

1．交换律：

$$A \cap B = B \cap A; \tag{1.2}$$

2．结合律：

$$A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C; \tag{1.3}$$

3．分配律：

$$A(B \cap C)=AB \cap AC,\ (A \cap B)C=(AC) \cap (BC); \tag{1.4}$$

4．德·摩根(De-Morgan)定律：

$$\overline{A \cup B}=\bar{A} \cap \bar{B},\ \overline{A \cap B}=\bar{A} \cup \bar{B}. \tag{1.5}$$

例如：以 A 表示事件"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则其对立事件为"甲种产品滞销或乙种产品畅销".

习题 1-1

1．一射手向目标射击 3 发子弹，A_i 表示第 i 发子弹打中目标($i=1,2,3$)．试用 A_1，A_2，A_3 及其运算表示下列事件：

(1) B_1：3 发子弹都打中了目标；

(2) B_2：3 发子弹至少有 1 发打中了目标；

(3) B_3：3 发子弹至少有 1 发未打中目标；

(4) B_4：3 发子弹至少有 2 发打中了目标；

(5) B_5: 3 发子弹恰有 1 发打中了目标;

(6) B_6: 3 发子弹至多有 1 发打中了目标.

2. 请叙述下列事件的对立事件:

(1) $A=$"掷两枚硬币, 皆为正面";

(2) $B=$"射击三次, 皆命中目标";

(3) $C=$"加工四个零件, 至少有一个合格品".

3. 用图示说明 $A=AB+A\bar{B}$.

4. 用图示说明$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

第二节 事件的概率

对于一个随机试验, 我们不仅要知道它可能出现哪些结果, 更重要的是研究各种结果发生的可能性的大小, 从而揭示其内在的规律性. 为此, 首先引入频率概念, 它描述了事件发生的频繁程度, 进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的量——概率.

一、事件的频率

定义 1 在 n 次独立重复试验中, 记 $n(A)$为事件 A 发生的次数, 又称 $n(A)$为事件 A 的频数, 称

$$f_n(A)=\frac{n(A)}{n} \tag{1.6}$$

为事件 A 出现的频率.

事件的频率具有以下性质:

(1) 非负有界性: $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性: $f_n(S)=1$;

(3) 有限可加性: 如果 A_1, A_2, $\cdots$, A_m 两两互不相容, 则

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

大量的随机试验表明: 频率具有随机波动性, 即对于同一个随机事件来说, 在相同的试验次数下, 得到的频率也不一定会相同. 频率还具有稳定性, 随着试验次数的不断增加, 频率会稳定在一个常数 α 附近. 例如投硬币 n 次, 正、反面出现的频率大致为 1/2.

当试验次数较大时, 如果一个事件发生的频率较大, 我们可以认为它发生的可能性也较大. 虽然频率能表征随机事件发生的可能性的大小, 但是我们不可能对每个随机事件都做大量的试验以确定其频率. 同时, 对于同一个随机事件不同试验的时候, 频率不完全相同, 这不利于理论研究. 受频率性质的启发, 柯尔莫哥洛夫给出了概率的公理化定义.

二、概率的定义

定义 2 设 Ω 为随机试验 E 的样本空间, 如果对 E 的每个随机事件 A 定义一个实数 $P(A)$,满足:

(1) 非负性: $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性: $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性：若 A_1, A_2, …, A_n, …两两互不相容，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n);$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

概率是表示随机事件发生的可能性的大小的一个数量指标，第五章大数定律告诉我们，在一定条件下，当试验次数充分大时，事件发生的频率会稳定在其概率附近.

三、概率的性质

我们不加证明地给出概率的下述基本性质.

1. 不可能事件的概率为零

$$P(\varnothing)=0. \tag{1.7}$$

2. 有限可加性　对有限个两两不相容的随机事件 A_1, A_2, …, A_m 则有

$$P(A_1+\cdots+A_m)=P(A_1)+\cdots+P(A_m). \tag{1.8}$$

3. 规范性

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1. \tag{1.9}$$

4. 若事件 A, B 满足 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\ P(A)\leqslant P(B). \tag{1.10}$$

5. (加法公式) 对于任意两个事件 A, B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.11}$$

对于任意 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n). \tag{1.12}$$

若 A_1, A_2, …, A_n 两两互斥有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup\cdots\cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.13}$$

四、古典概型(等可能概型)

满足以下两个条件的随机试验：

(1) 所涉及的随机现象只有有限个样本点；

(2) 每个样本点出现的可能性相同.

称为古典概型.

在古典概型中，若样本空间含有 n 个样本点，事件 A 含有 k 个样本点，则 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点个数}}{\Omega \text{ 中所含样本点个数}}=\frac{k}{n}. \tag{1.14}$$

下面举例说明古典概型的计算.

例 1　抛均匀硬币三次，计算 $A=$“恰好出现两次正面”发生的概率.

【解】　以 H 表示出现正面，T 表示出现反面，则 $\Omega=\{$HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT$\}$, $A=\{$HHT, HTH, THH$\}$. 所以

$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

例 2　一批产品有 90 件正品和 3 件次品，从中任取一件，求取得正品的概率．

【解】　设 $A=\{$取得产品是正品$\}$，则

$$P(A)=\frac{C_{90}^{1}}{C_{93}^{1}}=\frac{30}{31}.$$

例 3　袋中有 a 只黑球，b 只白球，它们除颜色不同外，其余无差异，现随机地把球一只一只地摸出，求 $A=$“第 k 次摸出的一只球为黑球”的概率．$(1\leqslant k\leqslant a+b)$

【解】　设想将 a 只黑球及 b 只白球编号后一一取出排成一排，则所有可能的排法为 $n=(a+b)!$，事件 A 发生当且仅当第 k 个位置上是黑球，其余 $a+b-1$ 个位置是剩下的 $a-1$ 只黑球和 b 只白球的排列，于是 A 所含样本点数为 $a\times(a+b-1)!$，故

$$P(A)=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

例 4　房间内有 500 个人，问至少有一人的生日是 10 月 1 日的概率是多少？

【解】　因每个人的生日都有 365 种可能，因此 500 个人共有 365^{500} 种可能，即 $n=365^{500}$．

设 A 表示“至少一人生日在 10 月 1 日”，则

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\text{至少一人生日在 10 月 1 日})\\&=P(\text{恰有一人生日在 10 月 1 日})+P(\text{恰有 2 人生日在 10 月 1 日})+\cdots+\\&\quad P(\text{恰有 500 人生日在 10 月 1 日})\\&=1-P(\text{恰有 0 个人生日在 10 月 1 日})\\&=1-P(\text{大家生日都不在 10 月 1 日}).\end{aligned}$$

因为每个人生日都不在 10 月 1 日，则有 364 种可能，因此 500 个人生日都不在 10 月 1 日共有 364^{500} 种可能．

$$P(A)=1-\frac{364^{500}}{365^{500}}=1-\left(\frac{364}{365}\right)^{500}\approx 0.746.$$

习题 1-2

1．设 A_1，A_2，A_3 相互独立，且 $P(A_i)=1/3$，$I=1$，2，3．试求 A_1，A_2，A_3 中

(1) 至少出现一个的概率；

(2) 恰好出现一个的概率；

(3) 最多出现一个的概率．

2．盒中有 4 枚 2 分，2 枚 1 分的硬币共 6 枚，从中随机取出 3 枚，求 3 枚硬币的面值之和是 5 分的概率．

3．袋中装有外形完全相同的 2 只白球和 2 只黑球，依次从中摸出两球．记 $A=\{$第一次摸得白球$\}$，$B=\{$第二次摸得白球$\}$，$C=\{$两次均摸得白球$\}$．求 A，B，C 的概率．

4．甲掷硬币 $n+1$ 次，乙掷 n 次，求甲掷出的正面数比乙掷出的正面数多的概率．

第三节　条件概率

在实际问题中常需要考虑在一个事件发生的情况下，另一个事件发生的概率，这就是条件概率.

一、条件概率的定义

定义 1　设 A，B 是样本空间 Ω 中的两事件，若 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.15}$$

为“在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率”，简称条件概率.

可以证明，条件概率满足概率的三个条件，因此，凡是概率具有的性质，条件概率也都具有.

二、乘法公式

由条件概率的定义

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad (P(B)>0)$$

可以得到

$$P(AB)=P(B)P(A|B).$$

定理　（乘法公式）　一般地，对任意 n 个事件 A_1，…，A_n，若 $P(A_1\cdots A_n)>0$，则

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

【证】　因为

$$A_1A_2\cdots A_n\subset A_1\cdots A_{n-1}\subset\cdots\subset A_1A_2\subset A_1,$$

由概率的单调性有

$$P(A_1)\geqslant P(A_1A_2)\geqslant\cdots\geqslant P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0.$$

又由条件概率的定义有

$$\begin{aligned}&P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})\\&=P(A_1)P(A_1A_2)/P(A_1)\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots P(A_1A_2\cdots A_n)/P(A_1A_2\cdots A_{n-1})\\&=P(A_1\cdots A_n).\end{aligned}$$

乘法公式常用于求交事件的概率.

三、全概率公式

定义 2　（完备事件组）　设 A_1，A_2，…，A_n 是 S 的一组事件，若 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，则称 A_1，A_2，…，A_n 为 Ω 的一个完备事件组或一个划分，如图 1-3.

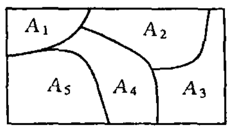

图 1-3

显然，任一事件 A 与 $\overline{A}$ 就是一个完备事件组.

全概率公式　设 B_1，B_2，…，B_n 为样本空间 Ω 的一个划分，即

B_1, B_2, $\cdots$, B_n 两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. 如果 $P(B_i)>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，则对任意事件 A，有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i). \tag{1.16}$$

【证】 由

$$A = A\Omega = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} AB_i$$

且 $$(B_iA) \cap (B_jA) = (B_iB_j)A = \varnothing \quad (i \neq j),$$

由有限可加性及乘法公式有

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_iA) = \sum_{i=1}^{n} P(B_iA) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

全概率公式可以将复杂事件的概率分解成一些简单事件的概率之和.

例 1 某工厂有三个车间生产同一产品，第一车间的次品率为 0.05，第二车间的次品率为 0.03，第三车间的次品率为 0.01，各车间的产品数量分别为 2500，2000，1500 件，出厂时，三车间的产品完全混合，现从中任取一产品，求该产品是次品的概率.

【解】 设 $B=\{$取到次品$\}$，$A_i=\{$取到第 i 个车间的产品$\}$ $(i=1, 2, 3)$. 则有 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$，且 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$，$A_1 \cap A_3 = \varnothing$，$A_2 \cap A_3 = \varnothing$. 利用全概率公式得

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$
$$= \frac{2500}{6000} \cdot 5\% + \frac{2000}{6000} \cdot 3\% + \frac{1500}{6000} \cdot 1\% = 3.3\%.$$

* 四、贝叶斯公式

贝叶斯公式 设 B_1, B_2, $\cdots$, B_n 是样本空间 Ω 的一个分割，即 B_1, B_2, $\cdots$, B_n 两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$，如果 $P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}. \tag{1.17}$$

【证】

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_jA)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

贝叶斯公式通过条件概率 $P(A|B_i)$ 求条件概率 $P(B_i|A)$，因此它又称逆概率公式.

例 2 医学上用某方法检验“非典”患者，临床表现为发热、干咳，已知人群中既发热又干咳的病人患“非典”的概率为 5%，仅发热的病人患“非典”的概率为 3%，仅干咳的病人患“非典”的概率为 1%，无上述现象而被确诊为“非典”患者的概率为 0.01%. 现对某疫区 25000 人进行检查，其中既发热又干咳的病人为 250 人，仅发热的病人为 500 人，仅干咳的病人为 1000 人，试求

(1) 该疫区中某人患“非典”的概率；

(2) 被确诊为“非典”患者是仅发热的病人的概率.

【解】 (1) 设

$A=\{$既发热又干咳的病人$\}$，$B=\{$仅发热的病人$\}$，$C=\{$仅干咳的病人$\}$，$D=\{$无明显病状的人$\}$，$E=\{$确诊患了“非典”的病人$\}$.

则易知 A，B，C，D 构成了一个完备事件组，由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)+P(D)P(E|D)\\&=\frac{250}{25000}\times 5\%+\frac{500}{25000}\times 3\%+\frac{1000}{25000}\times 1\%+\frac{23250}{25000}\times 0.01\%=0.001593.\end{aligned}$$

(2)由贝叶斯公式得

$$P(B|E)=\frac{P(B)P(E|B)}{P(E)}=\frac{\frac{500}{25000}\times 3\%}{0.001593}=0.37665.$$

全概率公式和贝叶斯公式是概率论中的两个重要公式，有着广泛的应用. 若把事件 A_i 理解为“原因”，而把 B 理解为“结果”，则 $P(B|A_i)$是原因 A_i 引起结果 B 出现的可能性，$P(A_i)$是各种原因出现的可能性. 全概率公式表明综合引起结果的各种原因，导致结果出现的可能性的大小；而贝叶斯公式则反映了当结果出现时，它是由原因 A_i 引起的可能性的大小.

习题 1-3

1. 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，求另一件也是不合格品的概率.

2. 钥匙掉了，掉在宿舍里，掉在教室里，掉在路上的概率分别是 40%，35% 和 25%，而掉在上述三处地方被找到的概率分别是 0.8，0.3 和 0.1，试求找到钥匙的概率.

*3. 甲乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.7，现已知目标被击中，求它是甲射中的概率.

第四节　事件的独立性

一般来说，$P(A|B)\neq P(A)$，$(P(B)>0)$表明事件 B 的发生提供了一些信息影响了事件A 发生的概率. 但是有些情况下，$P(A|B)=P(A)$，这必定是事件 B 的发生对 A 的发生与否不产生任何影响，或不提供任何信息，即事件 A 与 B 是“无关”的. 从概率上讲，这就是事件 A，B 相互独立.

一、两个事件的独立性

定义 1　如果对于事件 A，B，有

$$P(AB)=P(A)P(B),\tag{1.18}$$

则称事件 A，B 相互独立，简称 A 与 B 独立，否则称 A 与 B 不独立或相依.

由定义 1 知，$\varnothing$，Ω 与任何事件相互独立. 事件的独立与事件的互不相容是两个不同的概念：前者是相对于概率的概念，但可以同时发生；而后者只是说两个事件不能同时发生，与概率无关.

当 $P(B)>0$ 时，A，B 相互独立也可以理解成$P(A|B)=P(A)$，即 B 的发生对 A 发生

的可能性没有影响.

定理 若事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立：

$$A \text{ 与 } \bar{B}, \quad \bar{A} \text{ 与 } B, \quad \bar{A} \text{ 与 } \bar{B}.$$

【证】 因为

$$A = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B},$$

所以

$$P(A) = P(AB \cup A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)P(B) + P(A\bar{B}),$$

所以

$$P(A\bar{B}) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B}).$$

因此 A 与 $\bar{B}$ 相互独立，由此可得 $\bar{A}$ 与 B 独立，再由 $B = \bar{\bar{B}}$，可得 $\bar{A}$ 与 B 独立.

二、多个事件的相互独立性

定义 2 设 A，B，C 是三个事件，如果有

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B), \\ P(AC) &= P(A)P(C), \\ P(BC) &= P(B)P(C), \end{aligned}$$

则称 A，B，C 两两独立，若还有

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C), \tag{1.19}$$

则称 A，B，C 相互独立.

定义 3 设有 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，对任意的 $1 \leqslant i < j < k < \cdots \leqslant n$，如果以下各式均成立

$$\begin{aligned} &P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \\ &P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \\ &\cdots\cdots \\ &P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n), \end{aligned} \tag{1.20}$$

则称此 n 个事件相互独立.

易见，若 n 个事件相互独立，则其中任意 k 个事件也相互独立. 在实际应用中，对于事件的独立性常常是根据事件的实际意义去判断，一般地，若由实际情况分析，两事件之间没有关联或关联很弱，那就认为它们是相互独立的.

例 1 三人独立破译一密码，他们能单独译出的概率分别为 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，求此密码被译出的概率.

【解】 设 A，B，C 表示事件甲，乙，丙单独译出密码，则

$$P(A) = \frac{1}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{4}.$$

所求概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\overline{ABC}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) \\ &= 1 - \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

当 A，B 独立时，有

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\,\bar{B}),$$

这一式子能使很多问题简化. 还可以推广到多个事件的情况.

习题 1-4

1. 已知两个事件 A，B 相互独立，且已知 $P(A)=0.6$，$P(\bar{B})=0.3$，求 $P(A\cup B)$.

2. 设 $P(A)=0.5$，$P(A\bar{B})=0.3$，求 $P(B|A)$.

3. 设 3 台机器相互独立地运转. 第一台，第二台，第三台机器不发生故障的概率依次为 0.9，0.8，0.7. 求这 3 台机器中至少有 1 台发生故障的概率.

总习题一

一、填空题

1. 甲、乙各射击一次，设事件 A 表示甲击中目标，事件 B 表示乙击中目标，则甲、乙两人中恰好有一人不击中目标可用事件______表示.

2. 已知甲、乙两个盒子里各装有 2 个新球与 4 个旧球，先从甲盒中任取 1 个球放入乙盒，再从乙盒中任取 1 个球，设事件 A 表示从甲盒中取出新球放入乙盒，事件 B 表示从乙盒中取出新球，则条件概率 $P(B|A)=$______.

3. 设 A，B 为两个事件，若概率 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，$P(AB)=\frac{1}{6}$，则概率 $P(A+B)=$______.

4. 设 A，B 为两个事件，且已知概率 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，若事件 A，B 互斥，则概率 $P(A+B)=$______.

5. 设 A，B 为两个事件，且已知概率 $P(A)=0.8$，$P(B)=0.4$，若事件 $A\supset B$，则条件概率 $P(B|A)=$______.

6. 设 A，B 为两个事件，若概率 $P(B)=\frac{3}{10}$，$P(B|A)=\frac{1}{6}$，$P(A+B)=\frac{4}{5}$，则概率 $P(A)=$______.

7. 设 A，B 为两个事件，且已知概率 $P(\bar{A})=0.7$，$P(B)=0.6$，若事件 A，B 相互独立，则概率 $P(AB)=$______.

8. 设 A，B 为两个事件，且已知概率 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，若事件 A，B 相互独立，则概率 $P(A+B)=$______.

9. 设 A，B，C 为三个事件，且已知概率 $P(A)=0.9$，$P(B)=0.8$，$P(C)=0.7$，若事件 A，B，C 相互独立，则概率 $P(A+B+C)=$______.

10. 设 A，B 为两个事件，若概率 $P(B)=0.84$，$P(\bar{A}B)=0.21$，则概率 $P(AB)=$______.

二、单项选择题

1. 设 A，B 为两个事件，若事件 $A\supset B$，则下列结论中(　　)恒成立.

A. 事件 A，B 互斥　　B. 事件 A，$\bar{B}$ 互斥

C. 事件 $\bar{A}$，B 互斥　　D. 事件 $\bar{A}$，$\bar{B}$ 互斥