21世纪
全国高等教育应用型精品课规划教材

通信数学

tongxin shuxue

◆ 主编　周卓夫

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

[redacted]

通 信 数 学

主　编　周卓夫

副主编　王烂曼　陈　义

　　　　刘玫星　蒋卫华

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书内容包括有：高等数学、积分变换、概率论三门课程。具体为极限导数，导数的应用，不定积分，定积分，线性代数，概率统计，微分方程，多元函数微积分，无穷级数，傅立叶变换，拉普拉斯变换。

图书在版编目(CIP)数据

通信数学/周卓夫主编. —北京：北京理工大学出版社，2009.8
ISBN 978-7-5640-2801-5

Ⅰ.通… Ⅱ.周… Ⅲ.通信-工程数学-高等学校-教材 Ⅳ.TN911.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150592 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京市凯鑫彩色印刷有限公司
开　　本 / 710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 / 21
字　　数 / 397 千字
版　　次 / 2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
印　　数/ 1～1000 册　　　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 36.00 元　　　　责任印制 / 边心超

前　言

作者本着为我国通信事业逐步构建一套适用于通信高等教育的公共课程体系的指导思想，以“符合大纲要求，加强实际应用，增加知识容量，优化结构体系”为原则。以新世纪市场经济形式下通信业对人才素质的要求为前提，以高等数学在高等教育中的功能定位和作用为基础，在内容上删去了一些繁琐的推理和证明，增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点是让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯。在习题的编排上，根据高校工科多专业的特点，力求做到习题难易搭配适当，知识与内容结合紧密，掌握理论与培养能力相得益彰，为帮助读者学习和自学与本书同时配套了一套习题解答，书中带 * 号的内容为选学内容。

本书内容包括有：高等数学、积分变换、概率论三门课程。其中极限导数及导数的应用由刘玫星老师编写，不定积分、定积分由蒋卫华老师编写，线性代数由陈义老师编写，概率统计由王烂曼老师编写，预备知识、微分方程、多元函数微积分、无穷级数、傅立叶变换、拉普拉斯变换由周卓夫老师编写，周卓夫是本书的组织者。

特别感谢陈运明对本书的支持和帮助。

由于时间仓促，加之水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请读者多提宝贵意见。

编　者

目　录

第一章　预备知识 …… (1)

1.1　基本初等函数和初等函数 …… (1)

1.2　函数的几种特性 …… (3)

1.3　基本初等函数 …… (7)

1.4　对数在通信专业中的应用 …… (11)

1.5　复数 …… (16)

1.6　复数在通信专业中的应用 …… (23)

第二章　极限与连续 …… (26)

2.1　极限的概念 …… (26)

2.2　无穷小与无穷大 …… (30)

2.3　极限运算法则 …… (33)

2.4　两个重要极限 …… (36)

2.5　函数的连续性 …… (39)

第三章　导数与微分 …… (46)

3.1　导数的概念 …… (46)

3.2　求导法则与求导公式 …… (53)

3.3　函数的微分 …… (61)

第四章　导数的应用 …… (72)

4.1　中值定理 …… (72)

4.2　洛必达法则 …… (74)

4.3　函数单调性与极值 …… (77)

4.4　曲线的凹凸性与拐点 …… (84)

4.5　函数图象的描绘 …… (86)

第五章　不定积分 …… (93)

5.1　不定积分的概念 …… (93)

5.2 不定积分的基本性质和直接积分法 …………………… (95)
5.3 不定积分的换元积分法 …………………… (98)
5.4 分部积分法 …………………… (104)

第六章 定积分及其应用 …………………… (110)
6.1 定积分概念与性质 …………………… (110)
6.2 微积分学基本公式 …………………… (115)
6.3 定积分的基本积分法则 …………………… (118)
6.4 广义积分 …………………… (122)
6.5 定积分的应用 …………………… (126)

第七章 多元函数微积分 …………………… (135)
7.1 空间解析几何简介 …………………… (135)
7.2 多元函数 …………………… (139)
7.3 偏导数 …………………… (143)
7.4 复合函数的偏导数 …………………… (151)
7.5 多元函数的极值 …………………… (155)
7.6 二重积分 …………………… (158)

第八章 常微分方程 …………………… (171)
8.1 微分方程的基本概念 …………………… (171)
8.2 一阶微分方程 …………………… (173)
8.3 一阶线性微分方程 …………………… (175)
8.4 二阶常系数线性微分方程 …………………… (179)
8.5 二阶常系非齐次数线性微分方程 …………………… (183)

第九章 无穷级数 …………………… (190)
9.1 常数项级数 …………………… (190)
9.2 幂级数 …………………… (198)
9.3 函数展开成幂级数 …………………… (202)
9.4 傅立叶级数 …………………… (204)
9.5 周期为 2L 的函数展开成傅立叶级数 …………………… (208)
9.6* 傅立叶级数的复数形式 …………………… (212)

第十章 傅立叶变换 …………………………………………………… (221)
10.1 从傅氏级数到傅氏积分 …………………………………………… (221)
10.2 傅氏变换 ………………………………………………………… (225)
10.3 傅氏变换的性质 ………………………………………………… (232)

第十一章 拉普拉斯变换 ………………………………………………… (238)
11.1 拉普拉斯变换的概念 …………………………………………… (238)
11.2 拉普拉斯变换的性质 …………………………………………… (242)
11.3 拉氏逆变换 ……………………………………………………… (248)
11.4 用拉氏变换解常微分方程 ……………………………………… (254)

第十二章 随机事件与概率 ……………………………………………… (260)
12.1 随机事件 ………………………………………………………… (260)
12.2 随机事件的概率 ………………………………………………… (263)
12.3 条件概率和全概率公式 ………………………………………… (266)
12.4 事件的独立性 …………………………………………………… (269)

第十三章 随机变量及其数字特征 ……………………………………… (276)
13.1 随机变量 ………………………………………………………… (276)
13.2 分布函数及随机变量函数的分布 ……………………………… (279)
13.3 几种常见随机变量的分布 ……………………………………… (283)
13.4 期望与方差 ……………………………………………………… (288)

参考答案 ………………………………………………………………… (297)

第一章　预备知识

1.1　基本初等函数和初等函数

在高中我们学过常量与变量的概念，在某一变化过程中可以取不同的数值的量叫变量，而始终保持相同数值的量叫常量.

1.1.1　区间与邻域

（1）区间是介于某两个实数之间的全体实数的集合，这两个实数称为区间的端点. 区间分为两类：有限区间，无限区间. 区间有四种表示方法：括号表示法，不等式表示法，数轴表示法和集合表示法. 它们的名称、记号和定义如下：

有限区间：闭区间　$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

开区间　$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$

半开区间　$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$

$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$

无限区间：　$(a, +\infty)=\{x \mid x>a\}$

$[a, +\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$

$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$

$(-\infty, b]=\{x \mid x \leqslant b\}$

$(-\infty, +\infty)=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

其中 a，b 为确定的实数，分别称为区间的左端点和右端点. $b-a$ 为区间长度. $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，不表示任何数，只是记号.

区间用数轴表示如图 1-1 所示.

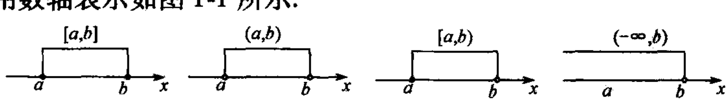


图 1-1

（2）邻域是高等数学中常用的概念. 称实数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 由定义可知 $U(a, \delta)=(a-\delta, a+\delta)$ 表示分别以 $a-\delta$，$a+\delta$ 为左、右端点的开区间，区间长度为 2δ，如图 1-2 所示.

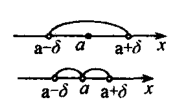


图 1-2

在 $U(a,\ \delta)$ 中去掉中心点 a 得到的实数集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\ \delta)$. 显然去心邻域 $\mathring{U}(a,\ \delta)$ 是两个开区间 $(a-\delta,\ a)$ 和 $(a,\ a+\delta)$ 的并集，即

$$\mathring{U}(a,\ \delta) = (a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta).$$

1.1.2 函数的概念

【定义 1.1】 设 x，y 是两个变量，D 是一个实数集，如果对于 D 内的每一个实数 x，按照某个对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，实数集 D 称为这个函数的定义域.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 相对应的 y 值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，这时称函数在点 x_0 处有定义．函数 $y=f(x)$ 所有函数值的集合 $M=\{y \mid y=f(x),\ x \in D\}$ 称为函数的值域.

在函数的定义中，要求对于定义域中的每一个 x 值，都有唯一的 y 值与之对应，这种函数称为单值函数．如果 y 值唯一性不满足，就称为多值函数．例如，以原点为圆心，1 为半径的圆的方程为

$$x^2+y^2=1$$

由这个方程所确定的函数就是多值函数

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

又如，反三角函数也是多值函数．今后如无特殊声明，我们所讲的都是指单值函数.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的．但在数学上作一般性研究时，对于只给出表达式而没有说明实际背景的函数，我们规定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

练习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=3x^2+\dfrac{1}{x-1}$；　　(2) $y=\sqrt{5x+3}$；

(3) $y=\sqrt[3]{x-2}$；　　(4) $y=\sqrt{9-x^2}$；

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$；　　(6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{(2x+1)^2}}$

2. 作出下列函数的图象：

(1) $y=2x$，$x \in \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$；

(2) $y=2x-1$，$x \in \{x \mid -1<x<1\}$；

(3) $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\leqslant -1, \\ x^2, & -1<x<2, \\ 2x, & x\geqslant 2. \end{cases}$

1.2 函数的几种特性

1.2.1 函数的单调性

【**定义 1.2**】设函数$f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间 I 上是单调增加的（图 1-3），区间 I 称为单调增区间；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间 I 上是单调减少的（图 1-4），区间 I 称为单调减区间．单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

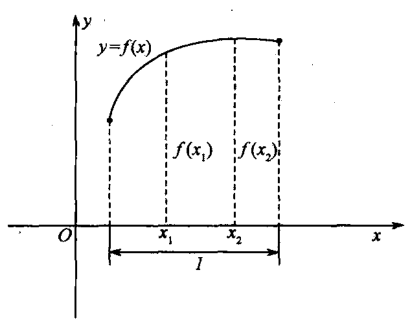


图 1-3

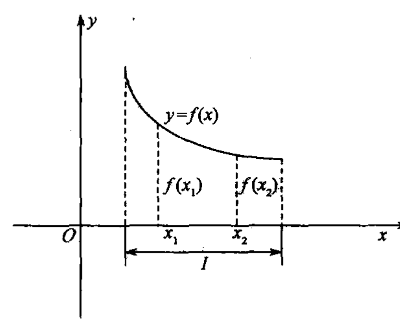


图 1-4

1.2.2 函数的奇偶性

【**定义 1.3**】设函数$f(x)$的定义域 D 关于原点对称．如果对于任一 $x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称$f(x)$为奇函数（图 1-5）．如果对于任一 $x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$为偶函数（图 1-6）.

例如，函数$f(x)=x^5$ 是奇函数，因为$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$．函数$f(x)=x^4$ 是偶函数，因为$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$．函数$f(x)=x^2+x^3$ 既不是奇函数，也不是偶函数，因为它不满足奇函数定义的条件，也不满足偶函数定义

的条件.

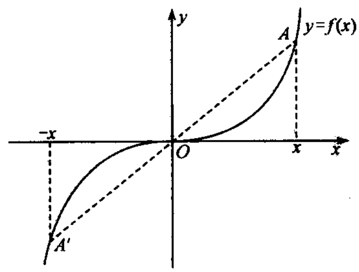


图 1-5

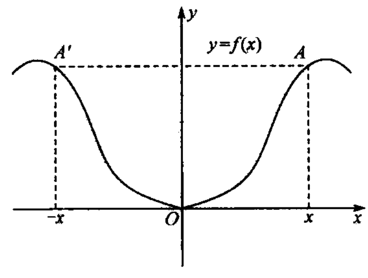


图 1-6

1.2.3　函数的有界性

【**定义 1.4**】设函数$f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$，如果存在正数 M，使得对于任一 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数$f(x)$在区间 I 内有界．如果这样的正数 M 不存在，就称函数$f(x)$在区间 I 内无界.

例如，函数 $y=\cos x$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内有界，因为对于任一 $x\in(-\infty, +\infty)$，总有$|\cos x|\leqslant 1$，但函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内无界，因为对于任意取定的一个正数 M，不能使得$|x^2|\leqslant M$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内都成立.

1.2.4　函数的周期性

【**定义 1.5**】设函数$f(x)$的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对于任一 $x\in D$，都有$(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为周期函数，l 称为$f(x)$的周期.

通常，周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数（图1-7）；函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数，而函数 $y=x^2$ 不是周期函数.

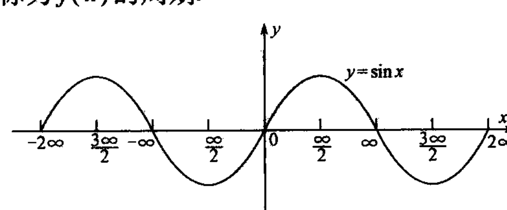


图 1-7

1.2.5　反函数

对于一个函数 $y=2x+4$，已知自变量 x 的一个值$(x\in D)$，可以求出对应的函数值 y，即函数 $y=2x+4$ 的对应关系是单值的．反过来根据此式，已知 y 的每

一个值($y\in M$)，我们也能求出对应的 x 的唯一确定的值，即 $y=2x+4$ 的反对应关系也是单值的.

一般的，对于反对应关系也是单值的函数，给出下面的定义：

【定义 1.6】 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 值($y\in M$)，都可以从关系式 $y=f(x)$确定唯一的 x 值($x\in D$)与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的新函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，这个函数就叫做 $y=f(x)$的反函数，它的定义域为 M，值域为 D.

【例 1.1】 求下列函数的反函数；

(1) $y=x^3$；(2) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

解：(1) 因为 $y=x^3$ 的反对应关系是单值的，所以由 $y=x^3$，可得 $x=\sqrt[3]{y}$，即函数 $y=x^3$ 的反函数为 $x=\sqrt[3]{y}$.

(2) 因为 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$的反对应关系是单值的，所以由 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$可得 $x=\dfrac{1+y}{1-y}$，即函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$的反函数是 $x=\dfrac{1+y}{1-y}$.

函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$是以 y 为自变量的，但习惯上都以 x 表示自变量，所以反函数 $x=f^{-1}(y)$通常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

以后无特殊说明，函数 $y=f(x)$的反函数都是指以 x 为自变量的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

【例 1.2】 求函数 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的反函数，并在同一个平面直角坐标系中作出它们的图像.

解：由 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 解得 $x=2y-4$，所以 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的反函数是 $y=2x-4$.

直接函数 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的图像是过点$(0,2)$和点$(-4,0)$的直线，其反函数 $y=2x-4$ 的图像是过点$(2,0)$和点$(0,-4)$的直线（图 1-8）.

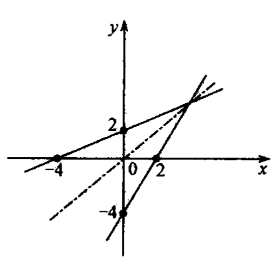


图 1-8

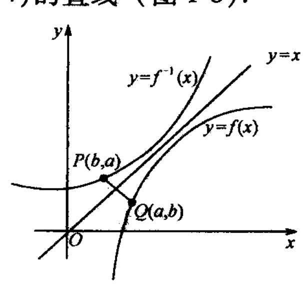


图 1-9

从图 1-9 可以看到，直接函数 $y=\frac{1}{2}x+2$ 的图像与反函数 $y=2x-4$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的．一般地，由图 1-9 可以看出：图像 $y=f(x)$ 的图像与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

【例 1.3】 讨论函数 $y=x^2$ 的反函数.

解： 函数 $y=x^2$ 的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $M=[0,\ +\infty)$. 因为 $x=\pm\sqrt{y}$，所以任取 $y\in[0,\ +\infty)(y\neq0)$，有两个 x 值与之对应（图 1-10）．所以 x 不是 y 的函数．即函数 $y=x^2$ 不存在反函数.

在上例中，如果只考虑函数 $y=x^2$ 在区间$[0,\ +\infty)$上的反函数，则由 $y=x^2$，$x\in[0,\ +\infty)$解得 $x=\sqrt{y}$，即 $y=x^2$ 在区间$[0,\ +\infty)$上存在反函数 $y=\sqrt{x}$，$x\in[0,\ +\infty)$．同理，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,\ 0]$上存在反函数 $y=-\sqrt{x}$，$x\in(-\infty,\ 0]$.

看图 1-10 知，这两种情形中，函数在所限定的区间内都是单调的．一般地，有下述反函数存在定理.

【定理】 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D，值域是 M. 如果函数 $y=f(x)$ 在 D 上是单调增加（或减少）的，则它必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$，且反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 M 上也是单调增加（或减少）的.

利用上述定理，只需判断函数在所讨论的区间内是否单调，就可确定其反函数是否存在，并可判断反函数的单调性．例如，函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,\ +\infty)$上是单调增加的，因此它必存在反函数，且其反函数在相应的定义区间上也是单调增加的．事实上，$y=x^3$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，可以看到，它在$(-\infty,\ +\infty)$上是单调增加的（图 1-11).

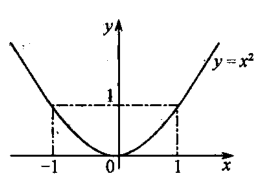


图 1-10

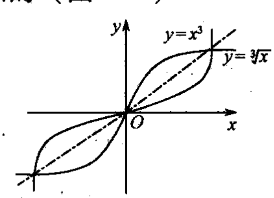


图 1-11

练习题 1.2

1. 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些既不是奇函数也不是偶函数?

(1) $f(x)=x^4-2x^2+6$;　　(2) $f(x)=x^2\cos x$;

(3) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$;　　(4) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;

(5) $f(x)=\sin x+\cos x-2$;　　(6) $f(x)=x(x-1)(x+1)$.

2. 下列哪些函数是周期函数？对于周期函数指出其周期.

(1) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$;　　(2) $y=3\cos 5x$;

(3) $y=\sin\pi x-3$;　　(4) $y=x^2\tan x$

3. 证明函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(-1,0)$内单调减少.

4. 下列函数中那些函数在区间$(-\infty,+\infty)$内是有界的？

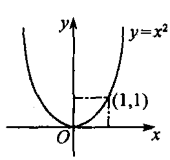
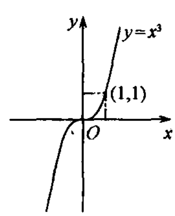
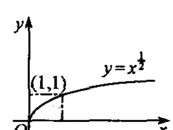
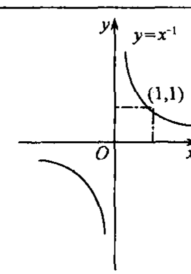
(1) $y=3\sin^2 x$;　　(2) $y=\dfrac{1}{1+\tan x}$.

1.3 基本初等函数

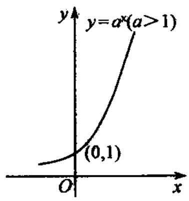
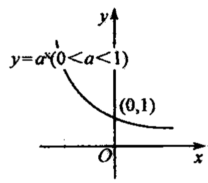
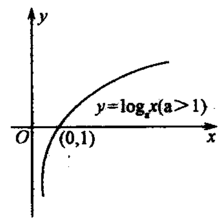
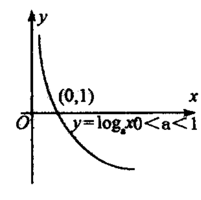
在科学发展过程中，有一类为数不多的函数，在各种问题中经常出现．因此，这些函数就从大量的各种各样的函数中被挑选出来，作为最基本的函数加以研究．其他常见的函数通常都是由这些基本的函数构成的.

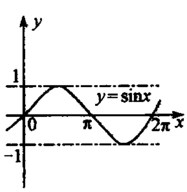
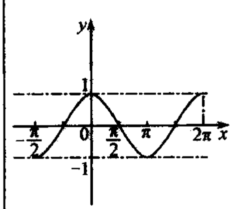
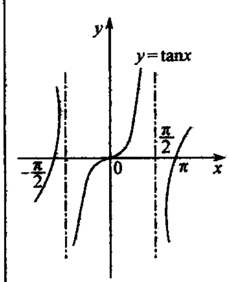
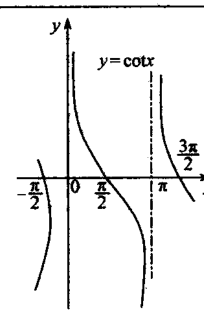
下面这五种已学过的函数就是最基本的函数，它们是幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为基本初等函数．为便于应用，将它们的定义域、值域、图像和特性列表如下（表 1-1）：

表 1-1

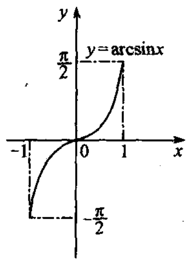
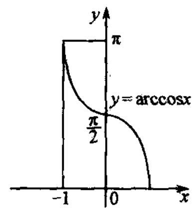
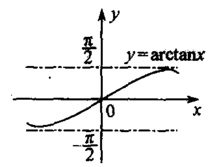
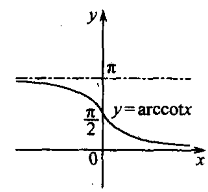
函数	幂函数			
	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图像				
定义域	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in[0,+\infty)$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$y\in[0,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[0,+\infty)$	$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
特性	偶函数 在 $x\in(-\infty,0)$内单调减少 在 $x\in(0,+\infty)$内单调增加	奇函数单调增加	单调增加	奇函数单调减少

续表

函数	指数函数		对数函数	
	$y=a^x(a>1)$	$y=a^x(0<a<1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=\log_a x(0<a<1)$
图像				
定义域	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(0,+\infty)$	$x\in(0,+\infty)$
值域	$y\in(0,+\infty)$	$y\in(0,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$
特性	单调增加	单调减少	单调增加	单调减少

函数	三角函数			
	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图像				
定义域	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$
值域	$y\in[-1,1]$	$y\in[-1,1]$	$y\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$
特性	奇函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加，在 $(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$	偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi, 2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$	奇函数，周期 π，在 $(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$	奇函数，周期 π，在 $(k\pi, k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$

续表

函数	反三角函数			
	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
图像				
定义域	$x\in[-1,\ 1]$	$x\in[-1,\ 1]$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$
值域	$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$y\in[0,\ \pi]$	$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$y\in(0,\ \pi)$
特性	奇函数，单调增加，有界	单调减少，有界	奇函数，单调增加，有界	单调减少，有界

1.3.1 分段函数与复合函数

1. 分段函数

有时候一个函数要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用几个不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1\\ 3-x, & 1\leqslant x<2\end{cases}$$

是一个分段函数，它的定义域 $D=[0,\ 1)\cup[1,\ 2)=[0,\ 2)$. 当 $x\in[0,\ 1)$时，对应的函数表达式为$f(x)=x^2$；当 $x\in[1,\ 2)$时，对应的函数表达式为$f(x)=3-x$，分别作出各区间内函数图像即可得分段函数的图像.

在工程技术中有几种很重要的分段函数，例如：

1） 单位阶跃函数

$$1(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0\end{cases}$$

2） 指数衰减函数

$$f(t)=\begin{cases}e^{-at}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

3）矩形函数

$$f(t)=\begin{cases}E, & 0<t<\tau,\\ 0, & t<0 \text{ 或 } t>\tau\end{cases}$$

2. 复合函数

看下面的函数

$$y=\lg\sin x$$

很明显，它不是基本初等函数，但是，它可看作是由两个基本初等函数

$$y=\lg u,\ u=\sin x$$

构成的.

定义 1.7 设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，$x\in D$. 如果在 D 的某个非空子集 D_1 上，对于$x\in D_1$ 的每一个值所对应的 u 值，都能使函数 $y=f(u)$有定义，则 y 是 x 的函数. 这个函数叫做由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(u)$复合而成的函数，简称为 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫作中间变量，复合函数的定义域是 D_1.

例如，$y=\ln(x^3)$是由函数 $y=\ln u$ 与 $u=x^3$ 复合而成的，其定义域为$(0,\ +\infty)$，它是函数 $u=x^3$ 的定义域$(-\infty,\ +\infty)$的非空子集.

【例 1.4】 写出下列函数的复合函数：

（1）$y=u^2$，$u=\sin x$

（2）$y=\sin u$，$u=x^2$

解：（1）将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^2$ 得所求的复合函数是 $y=(\sin x)^2$.

（2）将 $u=x^2$ 代入 $y=\sin u$ 得所求的复合函数是 $y=\sin x^2$.

上例表明，复合顺序不同，所得的复合函数是不同的.

注意：并非任意两个函数都可以复合成一个复合函数．例如，$y=\lg u$ 与 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为任何 x 的值所对应的 u 值，都不能使 $y=\tan u$ 有意义.

【例 1.5】 指出下列复合函数的复合过程：

（1）$y=\sin 2^x$；

（2）$y=\sqrt{1+x^2}$；

（3）$y=\mathrm{incos}3x$.

解：（1）$y=\sin 2^x$ 的复合过程是

$$y=\sin u,\ u=2^x$$

（2）$y=\sqrt{1+x^2}$的复合过程是

$$y=\sqrt{u},\ u=1+x^2$$

（3）$y=\mathrm{Incos}3x$ 的复合过程是

$$y=\mathrm{In}u,\ u=\cos v,\ v=3x.$$

练习题 1.3

1. 设 $y=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$，求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(\pi)$，$f(-\sqrt{2})$，并作出函数