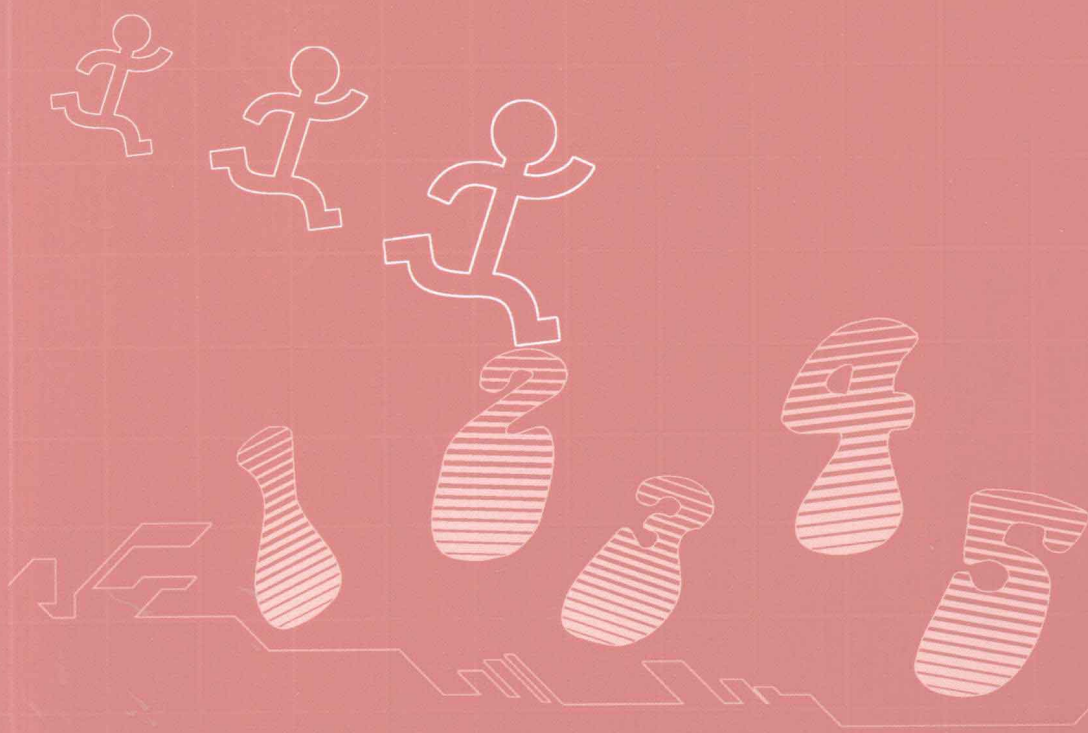


 高等职业院校规划创新教材

趣味数学

高治源 呼 勇 牛文雅 著



陕西师范大学出版社



高等职业院校规划创新教材

趣味数学

高治源 呼 勇 牛文雅 著

陕西师范大学出版社

图书代号 JC9N0654

图书在版编目(CIP)数据

趣味数学/高治源,呼勇,牛文雅著. - 西安:陕西师范大学出版社,2009.8

ISBN 978 - 7 - 5613 - 4749 - 2

I. 趣... II. ①高... ②呼... ③牛... III. 数学 - 普及读物 IV. 01 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 115143 号

趣 味 数 学

高治源 呼 勇 牛文雅 著

策划组稿 李慧娜
责任编辑 田均利
视觉设计 吉人设计
出版发行 陕西师范大学出版社
社 址 西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网 址 <http://www.snupg.com>
经 销 新华书店
印 刷 陕西向阳印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 13.75
字 数 277 千
版 次 2009 年 8 月第 1 版
印 次 2009 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5613 - 4749 - 2
定 价 22.00 元

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社教材中心联系、调换。

电 话:(029)85307826 85303622(传真)

E-mail:jcc@snnup.net

出版说明

职业技术教育是现代化教育的重要组成部分。发展职业技术教育是加快提高劳动者素质,振兴我国经济的必由之路。为了促进高等职业教育健康发展,2006年教育部下发了《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》。《意见》指出,要以课程建设与改革为核心,加强教材建设,这是发展高等职业教育的一项基础性工作,对实现办学指导思想和培养合格人才具有举足轻重的作用。为此,我们组织有关高等职业技术学院的专家,对相关专业的教材进行了多次研讨,遴选了一些较为成熟的成果,组织编写了“高等职业技术学院规划创新教材”,以推动高等职业院校教育教学的改革与发展。

本系列教材坚持科学的发展观和以人为本的指导思想,突出德育为先,立德树人;坚持以就业为导向,面向市场、面向社会,培养学生的可持续发展能力,为就业和再就业服务;坚持“必需、够用”原则,注重讲清基本概念、基本原理和基本方法,尽可能避免大篇幅的理论分析和繁琐的公式推导,实训教材简明实用,内容科学合理,让学生易于理解、掌握和运用,使其技能操作符合职业技能鉴定规范;坚持教学的适用性,根据学生水平、培养目标、课时数确定教材内容、深浅程度和篇幅,方便教师教学,符合学生发展需要,为学生进一步提高打下基础。

本系列教材的编写和出版,得到许多高等职业技术学院领导的亲切关怀和大力支持。各学科参编者多为长期在职业技术学院从事教学、具有丰富教学实践经验的骨干教师。为了确保教材质量,我们还约请了其他院校部分学术造诣深厚的专家参与编写大纲的讨论和审稿。本系列教材在坚持科学性、突出实用性、增强灵活性等方面具有许多创新之处。我们向有关高等职业技术学院的领导和教师表示衷心的感谢。今后,我们还将不断出版反映现代科学技术水平,具有职业教育特色,品种多样,系列配套,层次衔接,有利于培养高素质劳动者和高、中、初级实用人才的职业教育教材。

本系列教材还可供其他高专、成人高校、普通中专、职业中专相关专业选用。

陕西师范大学出版社

2008年7月

序

陕西为汉祖唐宗创业之地,古往今来人才辈出,历史文化异常深厚。抗战期间,日寇未能侵占一寸土地。而鼓舞士气,树立必胜信念的延安精神更为举世所称道。

在新时代,更应肩负振兴华夏之重任,急起直追,后来居上。为了达此目的,必须把握世界脉搏,学术导向,发扬上善若水,海纳百川之精神,培养人才,以适应电子-信息社会之经济与军事需要。

在数学领域中,“趣味数学”已逐渐形成一个引人注目的系列,它以奇异性,神秘性,独特性,和谐性,表现出非凡的趣味来,最容易勾起人们探索的欲望。

延安数学界高治源等同志,敢想、敢说、敢干,率先推出趣味数学选修课程,实为高瞻远瞩的有识之举,有望在数学教育与计算机应用领域走出一条新路子,也是科普与数学传播方面的一件大事,值得祝贺,乐观其成。

由于编书时间较短与物质条件所限,仓促完成的《趣味数学》讲义难免良莠不齐,鱼龙混杂,存在着定义欠妥译名不统一等缺点与不足之处。内容方面过于偏重算术、代数,数论。而几何、三角几未涉及,似有悖于数形结合的原则。凡此种种,希望在教学与使用过程中不断改进提高,使其日趋完善。希望群策群力,争取在二、三年时间内逐步修订成为一本引领新潮流的、有经济与军事价值的,甚至有可能成为内容崭新、一鸣惊人、值得向全球发行与推介的,富有民族特色、中西结合、经得起时间考验,长盛不衰的数学精品。路漫漫其修远兮,吾将引颈而望之。

这是一本破天荒的书,是为之序。

谈祥柏

2009年5月9日凌晨三时

写于上海宝山华灵路大华新村

谈祥柏 老师介绍



谈祥柏,1930年5月出生于上海。中学及大学一直在我国前辈数学家、著名教育家胡敦复先生创办的大同附中、大同大学就读。曾任第二军医大学助教、讲师、副教授、教授,曾任中国科普作家协会理事。1990年被中国科普作家协会表彰为“建国以来,特别是科普作协成立以来成绩突出的科普作家”,1996年4月获上海市首届“大众科学奖”,同年5月著作《奇妙的幻方》一书被评为全国第三届科普作品一等奖。从事数学科普创作已逾半个世纪(第一篇作品发表于1947

年),迄今为止正式出版的创作与翻译书籍已达49种之多,在各种报刊上发表的科普文章超过1000篇。在专业领域中,比较擅长的是矩阵、组合数学。具有扎实的古文功底与渊博的文史知识,并通晓英、日、德、法及拉丁文等多种语言。著、译代表作有《数学加德纳》、《奇妙的幻方》、《线性规划与对策论》、《宇宙大碰撞》、《SOS编码纵横谈》。



我们编写的《趣味数学》是为职业技术学院各专业的大专生开设的选修课程所使用的教材,也为从事数学研究学习的教师和大学生们提供了丰富的探讨内容,为电脑编程计算的爱好者提出了大量的趣味问题,也是中小学教师和学生第二课堂活动重要的参考资料。

我们在悠悠的数学历史长河中,能够看到大量趣味数学素材。我国古代就有一些有识之士非常重视趣味数学在启蒙教育方面的作用,他们编制歌诀和“顺口溜”,通过生动活泼的形式,让人们怀着愉快的心情去思考和解决数学问题。毕达哥拉斯学派将抽象的数作为万物的本原,他们坚信“万物皆数”的思想,想通过揭露数的奥秘来探索宇宙的永恒真理。也许就是因为他们对数字的崇拜,促使他们在数字的探索中发现大量的奥妙,其中许多是对后来影响很大的趣味数学问题。趣味数学题材广泛,下到初等的算术、代数,上至拓扑学、泛函分析等艰深学科,处处都有它的踪迹。现在的中小学课外书籍中,有许多老师编写了从小学到高中各个阶段的趣味数学读物,为了引起学生对数学的广泛兴趣,他们作了非常有意义的工作。其实,在趣味数学与数学学科之间,并不存在一道泾渭分明的鸿沟,科学家们认为,大自然这部伟大的书,是用数学语言来写的,而生活中的趣味现象,可以反映在数学的趣味性中,我们将自然界的千姿百态整理加工,使之形成一种理性的美——数学美,如对称、比例、简洁、秩序、和谐、协调、统一、精确、循环、往复、回归、韵律、均衡、奇异……无不统一于其中,数学中的这些美都可以引起人们的欣赏兴趣,于是就诞生了趣味数学这个题材。数学是步入科学宝库的大门,而趣味数学是打开数学大门的一把钥匙,趣味数学愈来愈被人们重视和关注研究。

我们通过多年的研究和资料收集,获得了大量的趣味数学研究项目,这些资料的获得,得益于我们中国有一批趣味数学科普作家,比如上

海谈祥柏老师,毕生从事于数学传播工作,孜孜不倦,数十年如一日,迄今已经出版著、译作品近50种,在国内外学术会议、报纸杂志上发表过中外论文、科普作品达数百种,他的趣味数学方面的科普作品,对我们的研究影响很大,当我们第一次拿到《谈祥柏科普文集》时,读来就爱不释手,读他的书,有时就像观看一部精彩的电影,阅读一本传奇的小说,聆听一首美妙的音乐,我们总是被谈祥柏老师笔下的数学问题陶醉,他的生花妙笔,趣味隽永的文章凸现了数学的艺术本性,他以广博的学识,流畅的文字,信手拈来,皆成哲理,将频谱分析、运筹学、数论、几何等高深的道理,也能解释于潜移默化之中,可称为“数理小品文”中的精品。谈祥柏老师与本世纪享有盛誉的世界科普大师马丁·加德纳是交往多年的好朋友,也许纯粹是他们的文化素养、兴趣爱好、研究领域以及对科普创作的热衷等等方面有着许多相似之处,他们因之成为笔谈甚密的信友。因此加德纳先生的文章在中国影响较大,但这种影响又是谈祥柏老师翻译宣传的结果。

可以说,在像谈祥柏老师一样的中国一代作家的努力下,趣味数学已经根深叶茂,发展壮大,形成了一个庞大的体系。那么我们应该如何把它用到课堂上,为我们的数学教学服务呢?

我们的职业技术学院刚刚成立,一切方兴未艾,给教师以很多的发展机会,院领导号召广大教师建设精品课,要求大家以能力培养为重点,校企合作、基于工作过程的课程开发与设计理念,以完成职业活动中的具体工作任务为依据选择和组织教学内容,充分体现职业性、实践性和开放性的要求,并在内容组织、教材编写等方面创出特色;在教学方法上要突出行动导向、以学生为中心的情景教学方法设计和使用,同时能够合理运用现代信息技术和仿真、模拟技术手段开展教学探索。于是,我们为了响应学校的号召,适应科学技术发展的需要和培养高质量、高层次科技人才,改变过去以教师为中心、以课堂讲授、知识传授为主的传统教学模式,印出了400多套《趣味数学》讲义,开设了《趣味数学》选修课,获得了许多宝贵的经验。我们的目的是通过教学使大学生了解趣味数学的内容,提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识,掌握数学思想方法,学会探索合作,体验制作用于交流的幻灯片,用于收集知识的专业网站,以及如何通过电脑编程计算解决数学难题的方法,训练学员的科学论述演讲水平,论文撰写能力,机智答辩素养,学会建立数学模型解决生活问题,使他们在以后的工作中能经常性地想到用数学去解决问



题,提高他们尽量利用计算机软件及当代高新科技成果的意识,能将数学、计算机有机地结合起来去解决实际问题。

我们在《趣味数学》教学中,以学生为主体,利用一些事先设计好的趣味数学问题启发、引导学生主动查阅文献资料和学习新知识,通过演讲训练、机智答辩鼓励学生积极开展讨论和辩论,形成一个生动活泼的学术环境和气氛,只有让学生进行论文撰写,才能为从事科研工作奠定初步基础,教学过程的重点是创造一个环境去诱导学生的学习欲望,培养他们的自学能力,增强他们的数学素质和创新能力。提高他们的数学素质,强调的是获取新知识的能力、是解决问题的过程。我们的课以趣味数学导航,启发性的讲一些基本的现象和方法,遇到数学专业理论,主要是靠同学们自己去学,查资料,充分调动同学们的积极性,充分发挥同学们的潜能。教学中还应广泛地采用讨论班的方式,同学自己报告、讨论、辩论,教师主要起质疑、答疑、辅导的作用,教学中一定要使用计算机及相应的软件,如电子表格, Mathematica, Matlab, 甚至排版软件等,进行编程计算,制作专业网站、演示文稿等。以上教学的模式也正是数学建模培训中所要求的,我们曾应用趣味数学培训数学建模参赛的同学,感到能够较容易提高学生的基本能力,在《趣味数学》课程教学的基础上,再引导学生解决简单的数学建模问题,学生就有了较好的基本功,从而在数学建模的学习中会得心应手,使得有更多的学生成为数学建模的受益者。

在具体的教学形式上,我们设置了 10 种课型,这些课型反映了我们趣味数学教学的灵活性,是我们数学教学的一种大胆的改革。

1. 合作探讨课:将引人关注的趣味现象引入课题,然后进行课堂讲解、探讨问题、合作交流,如有太难的理论推导,可以不讲,留给学生进一步钻研时学习。

2 主题活动课:以某个问题为主线,以多节专题内容作导向,进行丰富多彩的探索活动。

3. 论文仿写课:老师不作讲解,要求学生独立阅读,选题研究,并仿照教材写论文,尽量改变教材中的叙述形式,用自己寻找的实例来阐述。

4. 阅读交流课:学生事先借阅书籍,课外学习,安排部分学生在课堂里交流。

5. 计算科研课:选择一节课,用电子表格等进行计算,得出结果。

6. 演示文稿课:选择一个专题,制作幻灯片,以老师的身份,讲解一

个课题。

7. 专业网站课:通过网络搜索,收集趣味数学有关内容,在网上学习,选择一个专题,搞出一个小网站,介绍专题内容。

8. 数学建模课:老师讲述数学建模论文撰写步骤,并阅读历届数学建模论文。然后选择一个专题,将教材内容改编成数学建模论文形式。

9. 框架问题课:贯彻 intel 未来教育思想,提出三种问题:基本问题,单元问题,内容问题。然后围绕三个问题制作演示文稿,建设网站,基于电脑操作的数学计算、编程计算或科学研究,充分利用 intel 网络进行数学研究。

10. 论文答辩课:每个同学写一篇研究论文,进行答辩,老师同学给出评价。

通过 10 种课型的教学,可以达到六大功能:提高数学素养;懂得电脑计算;学会撰写论文;体会学术交流;能建专业网站;提高演讲水平。而这些素养也正是 21 世纪人才所必备的现代技能。

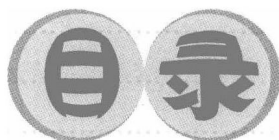
《趣味数学》课程是数学理论教学、数学活动课教学、人文教育、学术研究、电脑操作、现代信息技术等有机结合的教学,它将学生的思想教育,人文教育以及掌握数学知识、数学方法,提高学术水平、训练现代技术技能整合于一体。我们迫切希望有更多的老师参与我们的教学试验工作,因为在趣味数学课中,我们能够很好地把本该属于学生的课堂还给学生,让他们享受到学习的快乐,个性得到张扬,潜能得到充分发挥,使数学课堂焕发生命的活力,让学生成为真正意义上的发展中的、有创造力的人。通过大家的共同努力,使趣味数学课程变为锻炼学生各种能力的载体,为培养一大批具有现代素养、适合新时代的有用人才作出贡献。

本书的出版,得到我们院领导的大力支持,特别是为我们提供了进行一个学期的教学实验的平台,使我们获得了大量的宝贵经验,为这本书的完整出版奠定了基础。参加本课程的教学实验和帮助修订的老师还有:申小琳,赵国有,杜学军,高小荣,秦娟,田密,钟少玲,王红建,在此一并表示感谢。

延安职业技术学院

作者

2009 年 6 月 28 日



CONTENTS

绪 论	1
第 1 节 神秘的“黑洞数”	8
第 2 节 全等和数组的探索	13
第 3 节 多彩美丽的花朵数	16
第 4 节 青青翠绿的草数	25
第 5 节 回文数与镜反数的韵律	31
第 6 节 反序等积数对的美妙	35
第 7 节 轮环整除数的奥秘	39
第 8 节 循环变化的再植数	42
第 9 节 传奇的忠贞不渝数	46
第 10 节 妙趣横生的珠联璧合数	50
第 11 节 震撼心灵的雷劈数	53
第 12 节 饿极了的“中空数”	57
第 13 节 连续自然数的连续倍数	61
第 14 节 梅森素数的魅力	64
第 15 节 象征爱情的亲和数	68
第 16 节 魅力无穷的完全数	72
第 17 节 累进可除数的秩序美	76
第 18 节 限位叠加显奇妙	80
第 19 节 三思而行的基思数	84
第 20 节 倍对称数的探究	87
第 21 节 勾股数组的统一美	91
第 22 节 上下翻腾的冰雹数	95

第 23 节	等幂和数组的层层高塔	98
第 24 节	金蝉脱壳数组的美丽	103
第 25 节	多环高阶等幂和数组	106
第 26 节	傅利曼数的美妙	110
第 27 节	呈现自我的自生数	114
第 28 节	奇巧的自补数	118
第 29 节	幂自守数的奥妙	122
第 30 节	再现乘数的回还数组	126
第 31 节	数对等位排列的情趣	130
第 32 节	就地取材的自归数	137
第 33 节	变化多样的趣味现象	141
第 34 节	形形色色的趣味数	149
第 35 节	猜生日的奥秘(活动课)	156
第 36 节	生日数的变化情趣(活动课)	160
第 37 节	九宫图探秘(活动课)	165
第 38 节	探 2008 奥运幻方(活动课)	173
第 39 节	寻找数字循环圈(活动课)	177
第 40 节	通向中国传统文化的窗口(活动课)	184
附 录	《趣味数学》十种课型的教学和学习方法指导	193
参考文献		207

绪论

数的美妙

数学是由抽象的数、式、形组成的内容多样的逻辑系统。那自然数、整数、有理数、无理数……千千万万，深藏着无限的奥秘和无穷的趣味；那单项式、多项式、方程式、函数式……林林总总，展现出一派千变万化、五彩缤纷的景象；由点、线、面构成的姿态万千的几何图形，更是一幅异彩纷呈的图画。我们耕耘在这个丰富无比的田地里，培植数学的绿苗，浇灌数学的花朵，采摘数学的果实，我们时时能够看到美神的光临。那数之美，式之美，形之美，像田野中歌唱的黄鹂，争艳的百花，飘拂的杨柳，使我们愉悦，使我们欢畅……

我们从数之美、式之美、形之美的逐步探索中，来揭示自然界事物的数量关系和空间形式的和谐与秩序，亦即数学内容本身的美的规律。之所以数学美被称为科学美的皇后，是因为数学中的数、式、形都闪烁着美的光泽，数的和谐与秩序，式的简洁与统一，形的对称与整齐，都是那样的奇妙，那样的优美，它们在科学美学中，是一颗颗美的明珠，是一个个美的典范。

普洛克拉斯说：“那里有数，那里就有美”。与文字产生一样，数字也是人们从劳动和生活中创造出来的，本身具有很浓的生活气息，内涵着一种很美的寓意。人们在幼小的时候：首先就学会了数数、计数，以后在生活中就一刻也离不开数的计算了。随着数系的不断扩大，数的应用也更加广泛，生活中的各个领域都要编织在我们这个完美的数系的锦绣天衣上。

早在公元前6世纪，科学美学的鼻祖毕达哥拉斯学派就热衷于数之美的研究，他们心目中的数，十分类似今天我们心目中的原子，他们认为：“万物皆数也”，数的原则是一切事物的原则，数是自然物体的形式和形象。美也是由数构成的，美就是由一些数量关系构成的和谐。由于毕达哥斯学派认为万物的本源是“数”，因而将1、2、3、4这四个数称为“四象”，认为这四个数是完美的，因为 $1+2+3+4=10$ 。10是最美的数，10代表宇宙，其原因是整个宇宙用10种对立的范畴来描述：奇与偶，有界与无界，善与恶，左与右，一与多，雌与雄，直与曲，正与长方，明与暗，静与动。这样，他们认为“这个宇宙是数的关系的和谐系统”。

毕达哥拉斯学派对数字的崇拜在他们的哲学中得到了最高的表现。他们认为偶数是可分解的，从而也是容易消失的，属于地上的；而奇数则是不可分解的，陌生的，属于天上的。每一个数目都与人的某种性质相合。一表示理性，因为理性是不变的；二表示意见；四表示公平，因为它是第一个平方数，是两个相等数的乘积；五表示婚姻，因为它是第一个阴性数和第一个阳性的结合（一不作奇数论，而是一切数的源）。

巧得很，在我们中国的神话里，也能找到与这十分一致的情形。中国的奇数象征：白、昼、热、日、火；偶数反过来象征黑、夜、冷、物、水、地。用数安排成一个圣图，叫做《洛书》，如果用

适当的方法使用它就会具有神奇的性质。

数字也是人们对客观事物数量关系的抽象,但它却有丰富的感性内容和审美意蕴。数字在它们的自身结构和相互关系中,给人以强烈的抽象美感,它们是形式美规律的最纯粹的表现形式之一。一到十这十个数字,是人们最常用最熟悉的十个数字,故人们对它们就有深厚的感情和丰富的感受,以及多样的解释:

“一”是万事的开端,高楼的奠基,希望的萌芽。人们最重视第一次,任何第一次尝试,都是那么神秘和兴奋。“一”生成万数,由“一”到多构成了一个完美无缺的整体,美就是“一”的永恒光辉透过物质现象的朦胧显现。“二”是成对配偶、对称平衡。人们总是以“双喜临门”来形容生活的美满幸福。一切事物都是具有矛盾的二重性,事物就是在二重性的斗争中发展,它使生活富有哲理。“三”是对立统一的和谐整体。“一生二,二生三,三生万物”,三为多,三人为众,三木为森,三石为磊。三的构造呈一种很美的宝塔形,所以它普遍得到艺术家的偏爱,画家作画爱画三件物(或人),作家著书爱创作“三部曲”上集、中集、下集。“四”为方正平稳,结构上有四合院,用且仅用四种颜色就可以绘制一幅地图,这些生活中熟悉的量,使人们对四产生神秘的遐想。“五”是美好的象征,人不仅以五官端正为美,而且头与四肢呈五角鼎立,更体现人体形态的自然俊俏。“五行学说”中的五更显示出一个奇妙的特征。“六”是匀称的三角对称,在数论上是一个完全数,不仅有 $1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3 = 6$,而且与任何一位偶数相乘,总可以再现这个数,被誉为无私奉献,完美的数字。“七”是欢乐的象征,六天劳累过后,第七天人们都歇息;“七”是恋人的节日,七月初七由喜鹊搭桥相见;“七”是阳光,阳光可散射出七种色彩;“七”还能表现出一个完整的音律过程。“八”显示出一个完整的平面方位,据一些心理学家发现,人们对“八”有着特殊的喜好和兴趣,聪明商人总在商品的标价上出现“八”,以吸引顾客。我们还用“八仙过海”、“八面玲珑”来反映量的全面。“九”为数字之极,寓意崇高,它接近十而不到十,具有很强的倾向性。因九的特殊性质,被人们称为一位伟大的魔术师,好多奇妙的数学规律,都是由九操纵着内在的规律。“十”是完美的化身,我们用“十全十美”表达事物没有缺憾。人类习惯于扳着十个指头计算,就采用十进制计数法,在计数和数的运算中,以十为整,遇到与十有关的结果就高兴。下面请读这首赞美数“十”的诗歌:“古罗马历,一年月亮绕十个圈。当时把这个数奉为至尊至上,或者因为我们习惯了用手指来计数,或者因为妇人怀胎十个月才分娩,再不然,就因为数字增到了十,便回过头来,从一开始循环”。

任何数都是由上面0到9这十个符号表示的,这些符号,人们时时刻刻都在应用接触。对于任何一个数来说,不论从量上,还是从性质上和应用的广泛上都是完全不同的。人们在特定的一个与某个数有关联的环境下生活,就会逐渐对这个数及其奇妙的性质发生极大的兴趣,于是人们在不同的程度上喜欢它,并给予特殊的偏爱,从而产生美好的情感。

自然数中素数的有趣的规律,奇特的性质,促使哥德巴赫作了一次伟大的猜想:每个不小于4的偶数都可以表示成两个素数之和。素数与偶数竟有这样一种美妙的关系,多少数学家对此发生无穷的兴趣,对偶数逐个进行了检验,一直验算到三亿三千万,发现这个猜想都是对的。哥德巴赫猜想给我们展示的美妙无穷的景象,使我们陶醉在愉快的深思之中。完全数也就是完美的数,它的美就在于那种奇巧性:各除数之和等于这个数本身。一对“友数”就



是两个好朋友,那奇巧的关系,对称的属性,给人以高雅的乐趣.自生数的美在于它的平方数竟完全再现了它自己,而且在一位数里自然数只有三个1、5、6,在二位数里也只有三个01、25、76,七位数里也只有三个0000001、2890625、7109376,它们一直是向前推进的,第 N 位自生数的末 $N-1$ 位数也是自生数.这种独特的规律,给人一种奋进的力量,迷恋自生数的人们会一直不停地寻找下去.茫茫的宇宙空间存在一种能够吸吞一切物质的黑洞,而在自然数的天地里,也有数字黑洞6174吸吞着所有的四位数;自然数的田园,既有美丽鲜艳的花朵数 $370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$ (水仙花数), $1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$ (桃花数),也有翠绿的草数: $9^2 = 81$, $8 + 1 = 9$, $8^3 = 512$, $5 + 1 + 2 = 8$.回文数犹如回文诗歌一样富于情趣,而一个回文数的平方数仍然是回文数,所表现出的韵律就更加动人心魄了.雷劈数表现的分合特性,亦然可以震撼人们的心灵;喂饱那饿极了的“中空数”,含有一种满足感,是一种愿望实现的过程.全世界网络计算,共同迷恋梅森素数的魅力,更是一个让人万分感叹的浩大场面.这一切都是数之美给我们带来的欢乐.

π 和 e 是两个奇妙的无理数. π 来自于几何的圆周率, e 来自于分析中的无穷级数的极限.我们知道 π 和 e 是无规律的小数,但所有自然数倒数的平方之和却为 $\frac{\pi^2}{6}$,奇数的倒数,间隔取负号所得的和的四倍竟是 π ,而 e 却是这样一个无穷级数的和: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$.似乎三角函数是由 π 引生出来(人称三角函数为圆函数),似乎双曲函数是由 e 引生出来,可是这两个函数的大家族竟呈现出完全相似的规律,两个领域中公式的奇妙呼应,惊讶得让人讲不出话来,这难道不是 π 和 e 两个美妙无穷的数字的神力所致吗?

黄金比 $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,自产生起便成为公认的一条美学规律,它在数学、美学、人体、艺术中显现出了巨大的作用.人们经过对各地成年人的人体进行广泛的调查,发现人体躯干的宽与高的比为1:1.618.人们基于自己为代表的宽高比例的形体见得最多最为熟悉,这样凡是与这个比接近的物体,人们都喜爱,都觉得美,而这个比例就是黄金比.“美在比例”这个古老命题使美学家将黄金比尊为“神妙的比例”.有人研究了古代一些著名的建筑、绘画、雕塑中的比例问题,经归纳发现黄金比例是解开自然美和艺术美奥秘的关键.著名的维纳斯女神的塑像,肚脐到脚底的高度与全身高度之比为0.618;埃及的胡夫大金字塔,高与底部正方形边长之比为0.62;达·芬奇的艺术作品中的许多比例关系也为0.618.黄金比在美的事物中的频繁出现,使许多人为之倾倒,我们也禁不住要这样赞叹:

美哉!黄金比.

神妙优雅的比例.

你似黄金般的珍贵,

多少美学家将你着迷.

你只不过比你的倒数少一,

可是就在这里表现出了你的神奇.

许许多多规律的数字排列在一起,构成一个壮美奇妙的数集,给人一种整齐、秩序、统一的美感.等幂和数组的层层高塔,金蝉脱壳数组的美丽变化,数对等位排列的情趣,轮环整

除数的奥秘,三思而行的基思数,以它们那独特的性质、奇巧的规律震颤人们的心灵.如数字关系: $12 \times 231 = 132 \times 21$, $18 \times 891 = 198 \times 81$, $12 \times 462 = 264 \times 21$, $24 \times 231 = 132 \times 42$,表现出反序等积数对的特点,给人以对称美的感受; $2 \times 65 = 130$,但 $26 \times 5 = 130$; $4 \times 98 = 392$,但 $49 \times 8 = 392$,它表现出一种忠贞不渝的爱,令人感动. $12345679 \times 9 = 111111111$, $12345679 \times 18 = 222222222$,……给人以和谐统一的美的感受;从 $43551 = 13455 + 14553 + 15543$ 看出 43551 为它的三个同字异构数 13455、14553、15543 的和,还有大量的傅利曼数 $2509 = 50^2 + 9$, $736 = 3^6 + 7$, $1395 = 15 \times 93$,这些都是一种用相同材料建筑的艺术品,令人喜欢;回还数组: $4921875 \times 103219 = 5080324921875$,积数中竟全部再现了其中一个乘数,是一个非同一般的结果;龙首凤尾数对表现的乘法关系式 $4109589041096 \times 83 = 341095890410968$ 中内含的美意,像龙飞凤舞一样惊奇得让人不敢相信自己的眼睛.欧拉曾提出了一个惊人的恒等式: $e^{i\pi} + 1 = 0$,这个恒等式具有非常神秘的意义.它包含着现代数学中最重要的符号,而且看来是一种神奇的结合,在这里,1 和 0 代表算术, i 代表代数, π 代表几何,而 e 则代表分析学.

菲洛拉乌说:“一切可能知道的事物,都具有数;因为没有数而想象或了解任何事物是不可能的.”数,科学的语言,天体的音乐.数之美,充满了无限的神秘,飘动着永恒的情感.数及其数字关系的美学意蕴,在科学美学的历史长廊中,它是最耀眼的.对数之美的感受,对数之美规律的探讨,将是一项令人陶醉的事业.

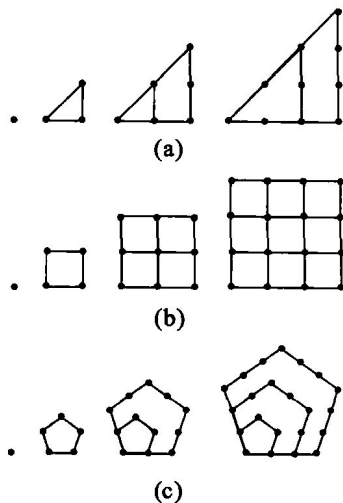
“万物皆数”思想与趣味数学的发展

毕达哥拉斯学派将抽象的数作为万物的本原,他们坚信“万物皆数”的思想,想通过揭露数的奥秘来探索宇宙的永恒真理.他们对数作过深入的研究,并得到很多结果,且常常将数和崇拜奇特地结合起来.他们注意到数与音乐和谐之间的关系、数与几何图形的关系、数与天体运行的关系.把整个学习课程分为四大部分:1. 数的绝对理论——算术;2. 数的应用——音乐;3. 静止的量——几何;4. 运动的量——天文.合起来叫做“四道”.但这四道都与数字密切相关,也许就是因为他们对数字的崇拜,促使他们在数字的探索中发现大量的奥妙,其中许多是对后来影响很大的趣味数学问题.

一、毕达哥拉斯学派对趣味数学的贡献

1. 最完美的数

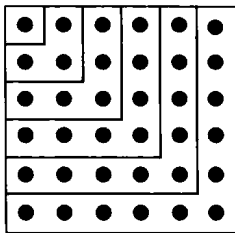
毕达哥拉斯根据“简单整数比”的原理,创造了一套音乐理论.1,2,3,4 这头四个自然数,按 $4:3$, $3:2$, $2:1$ 的比构成几个主要的音调,而这四个数的和是 10.于是他们认为 10 是一个完美的数,称之为“四数组”(tetractys),用来表示作为神圣的象征,10 同时成为宣誓时的誓词.后来斯皮尤西波斯指出 10 包含点、线、面、体各种类型的数:1 是点,2 是线,3 是三角形,4 是四面体.这更增加了 10 的神秘性.这是他们的信条“一切事物都按数来安排”的又一例证.他们认为偶数是阴性的,奇数是阳性



的. 偶数可以分为相等的两部分, 而奇数只能分成不相等的两部分. 按照这个定义, 1 既不是奇数也不是偶数. 5 是第一个阴性数 2 与第一个阳性数 3 之和, 所以是结婚的象征. 毕达哥拉斯特别厌恶 17 这个数, 它正好在 16 与 18 之间. 而 16 与 18 是仅有的两个数(自然数), 它同时等于一个矩形(包括正方形)的面积与周长.

2. 形数

形数原意为“石子”, 因而毕氏学派把数的计算一词描绘成沙滩上的石子或点子. 他们按石子或点子所能排成的形状把数分别称为三角形数、正方形数、五边形数进行分类, 如图. 把代表数的点子排成几何图形后, 整数的一些性质就变得很明显了.



(d)



(e)

图(a)中的每一个图的点数叫做三角数, 第 1 个三角数是 1, 第 2 个三角数是 $1+2=3$, 第 3 个三角数是 $1+2+3=6$, ..., 第 n 个三角数是 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. 而 $y=1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$ 形成一系列“正方形数”, 点数 $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$ 叫做平方数. 平方数可以看作从 1 起连续奇数之和, 如 $1+3+5+7+9+11=36$. 一般说, 作出平方数 n^2 的图形之后, 再镶上一个曲尺形到下一个平方数, 其中每个奇数又被看成是图形的点式. 而偶数序列 $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$, 则产生所谓“长方形数”, 每个长方形数图形都等于某三角形数的 2 倍. 五边形数和六边形数分别由序列 $N=1+4+7+\cdots+(3n-2)$ 和 $N=1+5+9+\cdots+(4n-3)$ 得到, 这是一些高阶等差序列. 用同样的方式可以定义所有的多边形数. 这一过程还可以推广到三维空间去构造多面体数. “形数”体现了数与形的结合.

3. 完全数、过剩数和亏数

“万物皆数”信条促使毕氏学派对整数性质进行研究, 根据整数与其因子关系发现了完全数、过剩数和亏数. 如果一个数等于除它本身以外的全部因子之和, 这个数叫做完全数. 如果一个数小于除它本身以外的全部因子之和, 这个数叫做亏数. 如果一个数大于除它本身以外的全部因子之和, 这个数叫做过剩数. 例如 $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$, 6, 28 就是完全数. 完全数的发现, 是毕达哥拉斯学派卓越贡献之一. 尼科马霍斯给出四个完全数 6, 28, 496, 8128, 并指出一般规律: 若 $1+2+2^2+\cdots+2^n=p$ 是素数, 那么 $2^n p$ 就是完全数. 毕达哥拉斯也知道完全数的特点是 $2^{n-1} \times (2^n - 1)$, 且 $2^n - 1$ 是素数, 前四个完全数可以这样表示:

$$6=2^{2-1} \times (2^2 - 1); 28=2^{3-1} \times (2^3 - 1); 496=2^{5-1} \times (2^5 - 1); 8128=2^{7-1} \times (2^7 - 1).$$