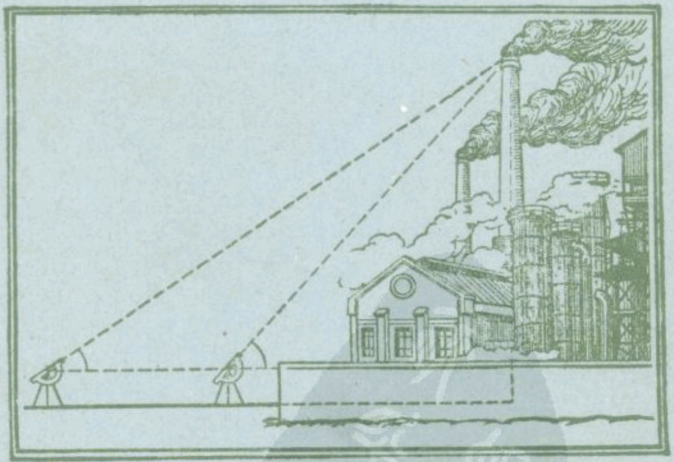
高級中学課本

平面三角

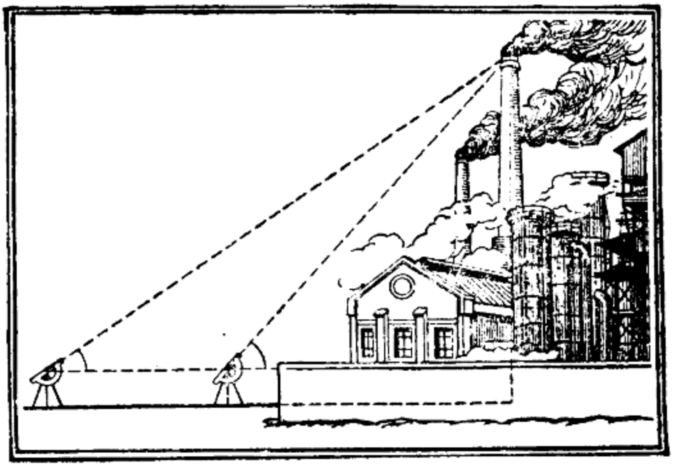
PINGMIAN SANJIAO



高級中学課本

平面三角

PINGMIAN SANJIAO



目　錄

第一章　0°到360°的角的三角函数

1. 三角学　三角学是数学的一个分科，研究三角函数和它的应用．三角学在理論科学上和实用科学上都很重要；例如，在高等数学、天文学、物理学、测量学以及其他学科方面都有廣泛的应用．

和其他的学科一样，三角学是在解決具体实际問題的过程中，由人类的实踐成長起來的．三角学發展的最初階段和天文学有密切关系．我們知道，曆書对於古代農業有極重要的意义，天文学就是由於需要編著正确的曆書而發生的．我們也知道，航海需要根据天体的位置正确地确定船只航行的方向．農業方面和航海方面的需要不断地促進了天文学以及和它密切有关的三角学的發展．

整个三角課程的內容是在十八世紀初就奠定了基礎的，但是採取近代形式的叙述，却是到了十八世紀的后半叶才建立起來．著名的彼得堡科学院院士尤拉(1707—1783)把三角函数看做綫段的比的新的观点，使三角学在理論上和实际应用方面大大前進了一步．

我國古代的天文学很發达，很早就有了測量方面的知識，在公元前一世紀左右的数学書"周髀算經"里已有关於平面測

量術的記載.

公元三世紀我國数学家刘徽計算以一为半徑的圓內接正六边形、正十二边形等的边長，以及公元十三世紀趙友欽計算圓內接正四边形等的边長，实际上已經求得了某些特殊角的正弦的值.

我國古代曆法中計算由於節令不同而引起的表(就是竿)的影長不同，实际上也已經構成了一个余切函数表.

現在我們所用的三角函数的名称正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，还都是十六世紀我國已有的名称，那时再添上正矢、余矢兩个函数，总称八綫.

十七世紀后半叶我國数学家梅文鼎已經編了一本平面三角学和一本球面三角学. 十八世紀以后，我國还出版了不少三角学方面的書籍.

2. 0°到360°的角的三角函数的定义 在平面几何里我們用直角三角形中兩边的比來規定銳角的正弦、余弦、正切和余切的定义，但是我們所研究的角，往往不限於銳角，对於一般的角，这些定义便不適用. 現在我們來說明对於 0° 到 360° 的角怎样規定这些定义.

首先我們把角，例如 $\angle AOB$ (圖 1)，看做是由它的一条边 OB 从另一条边 OA 的位置开始，繞着頂点 O 旋轉生成的. 在旋轉开始位置的一边叫做角的始边，在

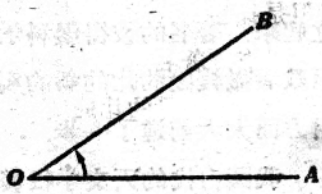


圖 1

旋轉終了位置的一边叫做角的終边. 終边从始边的位置开始,依照反时針的方向繞着頂点旋轉一周的时候,*由於終边在各种不同的位置,就生成 $0°$ 到 $360°$ 的一切角.

設 α 是 $0°$ 到 $360°$ 的一个角. 我們以这角的頂点 O 为原点,以这角的始边为横坐标軸的正方向,作横坐标軸 $X'X$ 和縱坐标軸 $Y'Y$ (圖 2). 这兩条坐标軸就把角 α 所在的平面分成四个部分,每一部分是一个象限; OX 和 OY 間的象限是第一象限, OY 和 OX' 間的象限是第二象限, OX' 和 OY' 間的象限是第三象限, OY' 和 OX 間的象限是第四象限. 角的終边在某一象限內,我們就說这个角在这一象限內,或者說这个角是这一象限的角;因此,大於 $0°$ 而小於 $90°$ 的角是第一象限的角,大於 $90°$ 而小於 $180°$ 的角是第二象限的角,大於 $180°$ 而小於 $270°$ 的角是第三象限的角,大於 $270°$ 而小於 $360°$ 的角是第四象限的角.

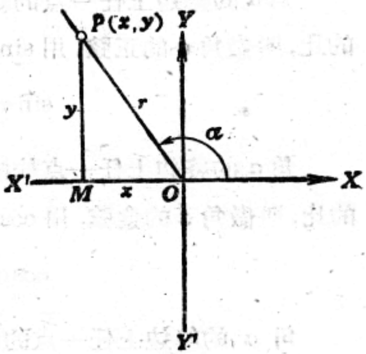


圖 2

我們在角 α 的終边上任意取一点 P, 設这点的横坐标(也就是 OP 在横坐标軸上的射影)是 x, 縱坐标(也就是 OP 在

---

* 終边依照順时針的方向旋轉所成的角的意义,我們在第三章里再來說明.

縱坐标軸上的射影)是 y，原点到这点的距离是 r. 横坐标 x 与縱坐标 y 的正負和代数里所規定的一样，距离 r 我們总把它作为正的.

角 α 的終边上任一点的縱坐标 y 和原点到这点的距离 r 的比，叫做角 α 的**正弦**，用 $\sin\alpha$ 來表示：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}.$$

角 α 的終边上任一点的横坐标 x 和原点到这点的距离 r 的比，叫做角 α 的**余弦**，用 $\cos\alpha$ 來表示：

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}.$$

角 α 的終边上任一点的縱坐标 y 和横坐标 x 的比，叫做角 α 的**正切**，用 $\mathrm{tg}\,\alpha$ (或者 $\tan\alpha$)來表示：

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x}.$$

角 α 的終边上任一点的横坐标 x 和縱坐标 y 的比，叫做角 α 的**余切**，用 $\mathrm{ctg}\,\alpha$ (或者 $\cot\alpha$)來表示：

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y}.$$

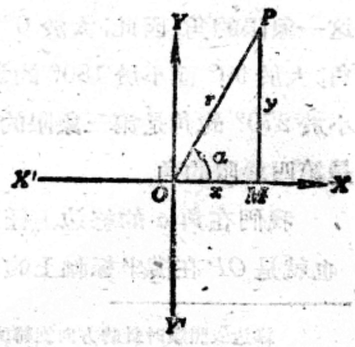


圖 3

很明顯，如果角 α 是銳角，上面所規定的角 α 的正弦、余弦、正切和余切的定义和平面几何里所規定的完全一样. 因为，如果从 P 点作

$X'X$ 的垂綫 MP (圖 3), 那末 P 点的縱坐标 y 就等於直角三角形 OMP 中角 α 的对边 MP 的長, P 点的横坐标 x 就等於角 α 的鄰边 OM 的長, 而原点到 P 点的距离 r 就等於斜边 OP 的長.

对於一个确定的角 α, 上面所説的四个比 $\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$ 的大小和我們在角 α 的終边上所取 P 点的位置並沒有关系. 因为, 如果我們在角 α 的終边上再任意取一点 P', 設它的坐标是 (x', y'), 原点到它的距离是 r', 並且从 P 点和 P' 点分别作 $X'X$ 的垂綫 MP 和 $M'P'$ (圖 4); 那末 x' 和 x, y' 和 y 的符号相同, 並且 $\triangle OM'P' \sim \triangle OMP$. 所以

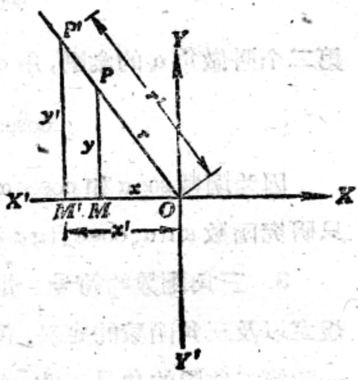


圖 4

$$\frac{y'}{r'}=\frac{y}{r}, \quad \frac{x'}{r'}=\frac{x}{r}, \quad \frac{y'}{x'}=\frac{y}{x}, \quad \frac{x'}{y'}=\frac{x}{y}.$$

因此, 对於确定的角 α, $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 都有确定的值.

在代数里我們已經知道: 如果对於一个变量的任意一个确定的值, 另一个变量有确定的值和它对应, 那末第一个变量就叫做自变量, 第二个变量叫做这个自变量的函数. 依照

这个說法，我們可以知道：角 α 的正弦、余弦、正切和余切都是角 α 的函数．这些函数都叫做三角函数．

在 x、y 和 r 之間除了可以組成上面的四个比，还可以組成兩个比 $\frac{r}{x}$ 和 $\frac{r}{y}$，它們也都是角 α 的三角函数；其中第一个叫做角 α 的正割，用 $\sec\alpha$ 來表示：

$$\sec\alpha=\frac{r}{x};$$

第二个叫做角 α 的余割，用 $\operatorname{cosec}\alpha$ 來表示：

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}.$$

因为函数 $\sec\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$ 应用較少，所以以后我們主要地只研究函数 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$.

3. 三角函数的符号　根据各象限里点的坐标的符号的規定以及三角函数的定义，我們可以知道，正弦和余割对於第一和第二象限的角是正的，而对於第三和第四象限的角是負的；余弦和正割对於第一和第四象限的角是正的，而对於第二和第三象限的角是負的，正切和余切对於第一和第三象限的

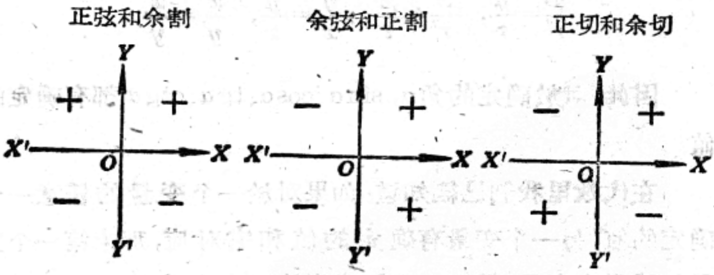


圖 5

角是正的，而对於第二和第四象限的角是負的.

上面所說的各个三角函数的符号，可以簡單地用圖 5 來表示.

4. 用綫段表示三角函数 以坐标軸的原点 O 为圓心，以等於單位長的綫段为半徑所作的圓叫做單位圓.

設單位圓和横坐标軸的正方向 OX 相交於 A 点，和縱坐

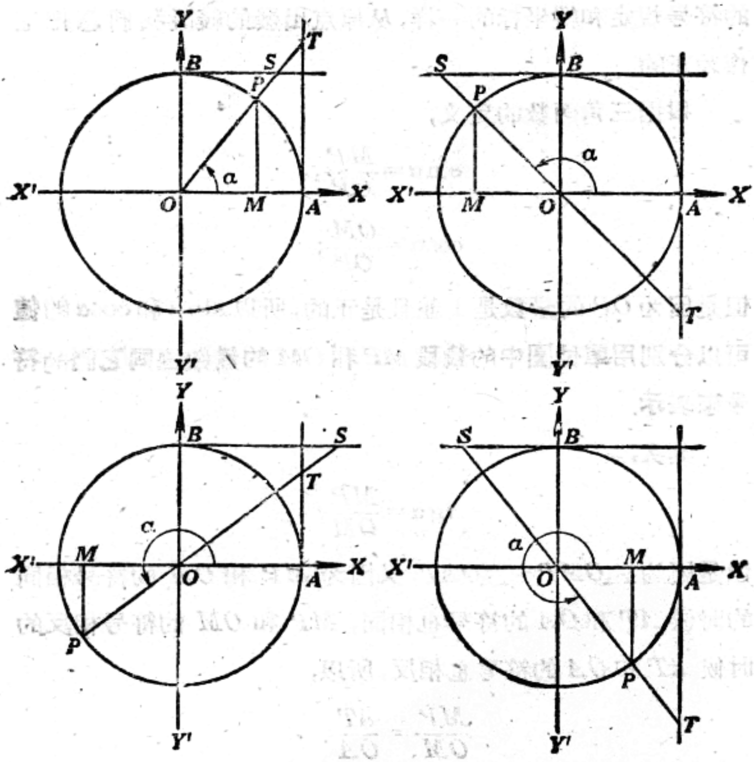


圖 6

标軸的正方向 OY 相交於 B 点，並且和角 α 的終边相交於 P 点．从 P 点作 $X'X$ 的垂綫 MP；过 A 点和 B 点分别作單位圓的切綫；並且延長 OP 或者 PO，使它和所作的兩条切綫分别相交於 T 点和 S 点（圖 6）．

我們把圖中的綫段（例如 MP、OM 和 OP 等等）都看成是帶有符号的綫段，横綫段的符号規定和横坐标的一样，縱綫段的符号規定和縱坐标的一样，从原点出發的綫段我們总把它作为正的．

根据三角函数的定义，

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP},$$

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OP};$$

但是因为 OP 的量数是 1 並且是正的，所以 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值可以分别用單位圓中的綫段 MP 和 OM 的量数連同它們的符号來表示．

其次，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{MP}{OM};$$

但是因为 $\triangle OMP\sim\triangle OAT$，又因为 MP 和 OM 的符号相同的时候 AT 和 OA 的符号也相同，MP 和 OM 的符号相反的时候 AT 和 OA 的符号也相反，所以，

$$\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}.$$

因此，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AT}{OA}.$$

同样，我們可以得到

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{OM}{MP}=\frac{BS}{OB}.$$

因为 OA 和 OB 的量数都是 1 並且都是正的，所以 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的值可以分别用單位圓中的綫段 AT 和 BS 的量数連同它們的符号來表示.

可以用來表示 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 的單位圓中的綫段 MP、OM、AT 和 BS 分别叫做角 α 的**正弦綫、余弦綫、正切綫和余切綫.**

5. 角由 0° 变到 360°，正弦、余弦、正切、余切各函数值的变化 在圖 7 的單位圓里，角 α 的終边从始边 OA 的位置出發，經过 OP_1、OP_2、OP_3 等的位置，旋轉到 OB 的位置的时候，角 α 就由 0° 变到 90°. 这时，正弦綫 MP 的長就对应地由 0 逐漸增加到 1；余弦綫 OM 的長对应地由 1 逐漸減少到 0；正切綫 AT 的長对应地由 0 逐漸增加，在 OP 充分接近 OB 的时候，AT 可以变到比任何指定的綫段

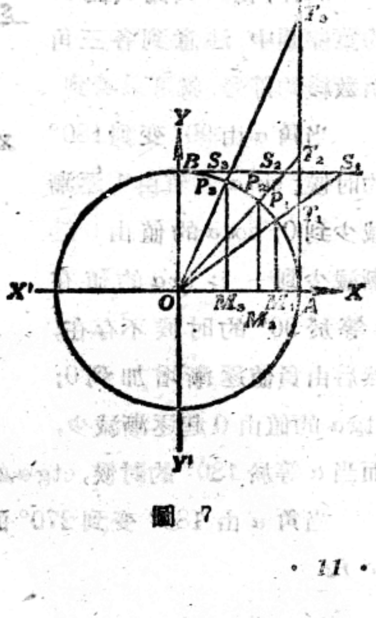


圖 7

都長(就是可以無限增長). 但是在 OP 到达 OB 的时候，OP 与从 A 所引的切綫就沒有交点，AT 也就不存在；余切綫 BS 在 OP 没有离开 OA 的时候不存在，在 OP 离开 OA 充分近的时候可以比任何指定的綫段都長，然后随着 OP 的旋轉，BS 的長对应地逐渐減少到 0. 这就是說：当角 α 由 0° 变到 90° 的时候：$\sin\alpha$ 的值由 0 逐渐增加到 1；$\cos\alpha$ 的值由 1 逐渐減少到 0；$\operatorname{tg}\alpha$ 的值由 0 起逐渐增加，在 α 充分接近 90° 的时候可以变到比任何指定的数都大，而当 α 等於 90° 的时候，$\operatorname{tg}\alpha$ 不存在；$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值在 α 等於 0° 的时候不存在，在 α 离开 0° 充分近的时候可以比任何指定的数都大，然后逐渐減少到 0.

同样，在圖 8、圖 9、圖 10 的單位圓中，注意到各三角函数綫的符号，就可以看到：

当角 α 由 90° 变到 180° 的时候：$\sin\alpha$ 的值由 1 逐渐減少到 0；$\cos\alpha$ 的值由 0 逐渐減少到 -1；$\operatorname{tg}\alpha$ 的值在 α 等於 90° 的时候不存在，然后由負值逐渐增加到 0；$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值由 0 起逐渐減少，而当 α 等於 180° 的时候，$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值不存在.

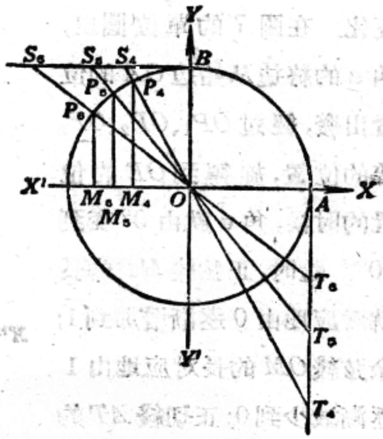


圖 8

当角 α 由 180° 变到 270° 的时候：$\sin\alpha$ 的值由 0 逐渐減

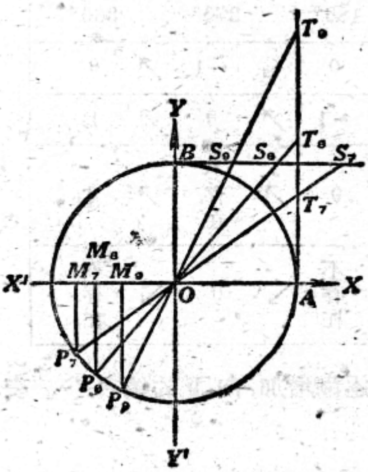


圖 9

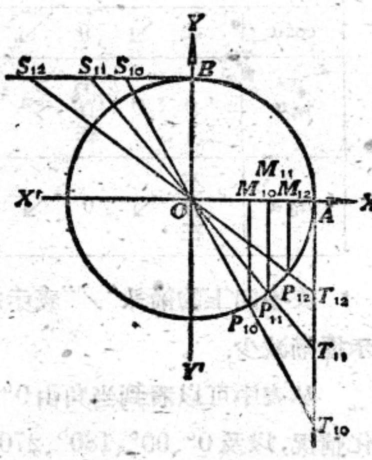


圖 10

少到 -1; $\cos\alpha$ 的值由 -1 逐漸增加到 0; $\mathrm{tg}\,\alpha$ 的值由 0 起逐漸增加,而当 α 等於 $270°$ 的时候, $\mathrm{tg}\,\alpha$ 的值不存在; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ 的值在 α 等於 $180°$ 的时候不存在,然后由正值逐漸減少到0.

当角 α 由 $270°$ 变到 $360°$ 的时候: $\sin\alpha$ 的值由 -1 逐漸增加到0; $\cos\alpha$ 的值由 0 逐漸增加到1; $\mathrm{tg}\,\alpha$ 的值在 α 等於 $270°$ 的时候不存在,然后由負值逐漸增加到 0; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ 的值由 0 起逐漸減少,而当 α 等於 $360°$ 的时候, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ 的值不存在.

上面的結果可以列成下表:

α	$0°$		$90°$		$180°$		$270°$		$360°$
$\sin\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$\cos\alpha$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	↗	不存在	↗	0	↗	不存在	↗	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	不存在	↘	0	↘	不存在	↘	0	↘	不存在

表中向上的箭头"↗"表示逐渐增加,向下的箭头"↘"表示逐渐减少.

从表中可以看到当角由0°变到360°的时候,函数值的变化情况,以及0°、90°、180°、270°和360°角的函数值.

从这个表中还可以看到:

0°到360°的角的正弦和余弦只能取 -1 到 $+1$ 的值(就是它們的絕对值不能大於1).

0°到360°的角的正切和余切可以取任何数值.

例 1 化簡 $p^2\sin 90°-2pq\cos 0°-q^2\cos 180°+p\,\mathrm{tg}\,360°-q\,\mathrm{ctg}\,270°$.

解

$$p^2\sin 90°-2pq\cos 0°-q^2\cos 180°+p\,\mathrm{tg}\,360°-q\,\mathrm{ctg}\,270°$$
$$=p^2\cdot 1-2pq\cdot 1-q^2\cdot(-1)+p\cdot 0-q\cdot 0$$
$$=p^2-2pq+q^2$$
$$=(p-q)^2.$$

例 2 比較下列各組中兩个函数值的大小：(1) $\sin 30°$ 与 $\sin 31°$；(2) $\cos 148°24'$ 与 $\cos 148°26'$.

解 (1) 因为一个角由 $0°$ 变到 $90°$ 的时候，它的正弦的值逐漸增加，所以 $\sin 30° < \sin 31°$；

(2) 因为一个角由 $90°$ 变到 $180°$ 的时候，它的余弦的值逐漸減少，所以 $\cos 148°24' > \cos 148°26'$.

6. 已知 $0°$ 到 $360°$ 的角的一个三角函数的值，求作角

現在举例來說明怎样根据 $0°$ 到 $360°$ 的角的一个三角函数的值作出角.

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，求作 $0°$ 到 $360°$ 的角 α.

解 因为已知的正弦的值是正的，所以求作的角的正弦綫是由 x 軸向上的；又因为正弦的值是 $\frac{1}{2}$，所以正弦綫的長等於單位長的二分之一.

在 x 軸的上方作平行於 x 軸並且距离等於 $\frac{1}{2}$ 單位長的直綫，設它与單位圓相交於 P_1、P_2 兩点. 連結 OP_1、OP_2，就得兩个角 α_1 和 α_2（圖 11）. 这兩个角都適合於已知条件，所以都是所求的角.

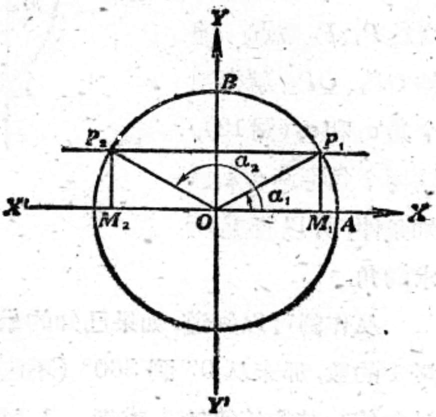


圖 11

从作圖可以知道，如果已知的正弦的值是一个絕对值小於1的数，那末从 0° 到 360°（不包括 360°）有兩个角適合於已知条件，就是說，有兩个解；如果已知的正弦的值等於1或者 -1，那末都有一个解；如果已知的正弦的值是一个絕对值大於1的数，就沒有解.

例 2 已知 $\cos\alpha=-0.6$，求作 0° 到 360° 的角 α.

解 因为已知的余弦的值是負的，所以求作的角的余弦綫是由原点向左的，又因为余弦的絕对值是 $0.6=\frac{3}{5}$，所以余弦綫的長等於單位長的五分之三.

在 y 軸的左方作平行於 y 軸並且距离等於 $\frac{3}{5}$ 單位長的直綫，設它与單位圓相交於 P_1、P_2 兩点. 連結 OP_1、OP_2，就得兩个角 α_1 和 α_2（圖 12）. 这兩个角都適合於已知条件，所以都是所求的角.

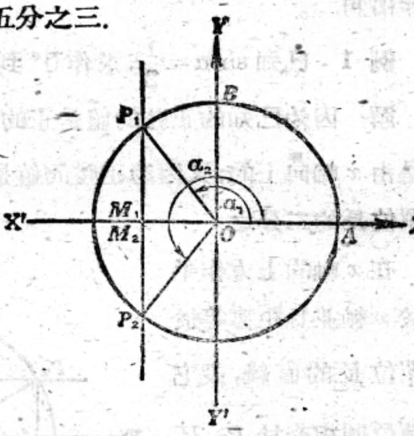


圖 12

从作圖可以知道，如果已知的余弦的值是一个絕对值小於1的数，那末从 0° 到 360°（不包括 360°）有兩个解；如果已知的余弦的值等於1或者 -1，那末都有一个解；如果已知的余弦的值是一个絕对值大於1的数，就沒有解.