考研丛书
KAO YAN CONG SHU

考研数学

真题细讲及模拟题

张贵海 编

西北工業大學出版社

考研数学真题细讲及模拟题

张贵海　编

西北工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学真题细讲及模拟题/张贵海主编．—西安：西北工业大学出版社，2009.8
ISBN 978-7-5612-2588-2

Ⅰ．考… Ⅱ．张… Ⅲ．高等学校—研究生—入学考试—解题 Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130449 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西兴平报社印刷厂
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：12
字　　数：290 千字
版　　次：2009 年 8 月第 1 版　　2009 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：20.00 元

目　　录

真题细讲

2010 年全国硕士研究生入学考试数学模拟试卷

真题细讲

2003年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题细讲

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中的横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$________.

考点 "1^∞"型不定式极限.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{\ln(1+x^2)}$

$$=\exp\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x^2}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(2) 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是________.

考点 多元函数微分学的几何应用.

解 抛物面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(2x,2y,-1),$$

由于该曲面的切平面与平面 $2x+4y-z=0$ 平行,因此

$$\frac{2x}{2}=\frac{2y}{4}=\frac{-1}{-1}=1\Rightarrow x=1,y=2,z=5,$$

曲面 $z=x^2+y^2$ 在(1,2,5)点处的切平面为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0\Rightarrow 2x+4y-z=5.$$

因此所求的切平面的方程是 $2x+4y-z=5$.

(3) 设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\,(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$,则 $a_2=$________.

考点 傅里叶级数系数的计算.

解 根据傅里叶级数系数的计算公式

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,n=1,2,\cdots$$

得

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2 d\sin 2x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x d\cos 2x=1-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x dx=1.$$

(4) 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为________.

考点 向量空间中过渡矩阵的计算.

解 记 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1)^{\mathrm{T}}$，由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix},(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此该过渡矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$.

(5) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ 则 $P\{X+Y\leqslant 1\}=$________.

考点 简单的二维概率计算问题.

解 $P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}6xdx\int_x^{1-x}dy=6\int_0^{\frac{1}{2}}x(1-2x)dx=\frac{1}{4}.$

(6) 已知一批零件的长度 X(单位:cm) 服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40 cm，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是________.(注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95$).

考点 正态分布方差已知的均值区间估计问题.

解 由于母体 $X\sim N(\mu,1)$，故 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\right)$，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)$，因此由

$$P\{\sqrt{n}\mid\overline{X}-\mu\mid<U_{\alpha/2}\}=P\left\{\overline{X}-\frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+\frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha,$$

得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}},\overline{X}+\frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)$.

当 $\alpha=0.05$ 时，$U_{\alpha/2}=1.96$，$\left(\overline{X}-\frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}},\overline{X}+\frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)=(39.51,40.49)$，因此所求置信区间为 $(39.51,40.49)$.

二、选择题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项的字母填在题后的括号内.)

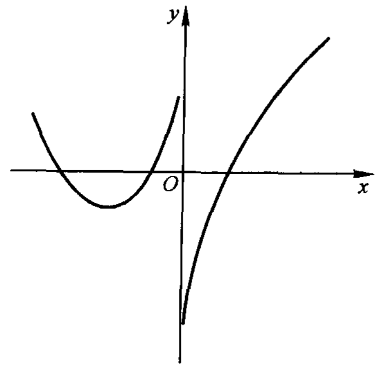
(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有【　　】.

(A) 一个极小值点和两个极大值点；

(B) 两个极小值点和一个极大值点；

(C) 两个极小值点和两个极大值点；

(D) 三个极小值点和一个极大值点.



考点 导数与极值的关系.

解 由导函数的图形可以看出，$f(x)$ 有三个驻点，且在每个驻点的两侧导数都变号，其中有一个驻点的导数是由正变负，两个驻点的导数是由负变正. 因此，这三个驻点中有一个是 $f(x)$ 的极大值点，两个是 $f(x)$ 的极小值点，同时可观察到，$f(x)$ 还有一个不可导点，且在该点的左侧近旁，其导数为正，$f(x)$ 单调递增；在其右侧的近旁，其导数为负，$f(x)$ 单调递减. 由于 $f(x)$ 连续，所以该点为 $f(x)$ 的一个极大值点，因此，$f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点，(C) 为正确选项.

(2) 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$，则必有【　　】.

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

考点 极限的运算法则与极限的保号性.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0<\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1<\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$，由极限的保号性知，当 n 足够大时，一定有 $a_n<b_n<c_n$，但并不能保证对任意的 n 该不等式都成立，因此(A)、(B) 均错，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 属于无穷小与无穷大之积的极限，属于不定式，其极限未必存在，因此(C) 也错，故(D) 为正确选项. 事实上，若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在，由极限的运算法则知，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_nc_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 也存在，而这与题设相矛盾，因此极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 一定不存在.

(3) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个领域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则【　　】.

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

考点 极值概念与极限的保号性.

解 由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，因此存在去心邻域 $\overset{0}{U}(O,\sigma)$，使

$$\frac{3}{4}<\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}<\frac{5}{4},(x,y)\in\overset{0}{U}(O,\sigma),$$

$$\frac{3}{4}(x^2+y^2)^2+xy<f(x,y)<xy+\frac{5}{4}(x^2+y^2)^2,(x,y)\in\overset{0}{U}(O,\sigma)$$

特别有

$$f(x,x)>3x^4+x^2>0,(x,x)\in\overset{0}{U}(O,\sigma),$$

$$f(x,-x)<5x^4-x^2=x^2(5x^2-1)<0,(x,-x)\in\overset{0}{U}(O,\sigma),$$

[redacted]

可见在 $O(0,0)$ 点的任何小的邻域内，始终有使 $f(x,y)>0$ 的点，也始终有使 $f(x,y)<0$ 的点，因此点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，(A) 为正确选项.

(4) 设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则【　】.

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关

(B) 当 $r>s$ 时，向量组 Ⅱ 必线性相关

(C) 当 $r<s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关

(D) 当 $r>s$ 时，向量组 Ⅰ 必线性相关

考点　向量组线性相关的判别.

解　由于向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，因此向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s \text{ 与 } \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$$

等价，所以它们有相同的秩，即

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s),$$

因此

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\leqslant s.$$

可见当 $r>s$ 时，向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 必线性相关.(D) 为正确选项.

(5) 设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 阶矩阵，现有 4 个命题：

① 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$；

② 若秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解；

③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$；

④ 若秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

则正确的是【　】.

(A)①②　　(B)①③　　(C)②④　　(D)③④

考点　矩阵的秩与线性方程组解的关系.

解　对命题 ①，若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0} \text{ 与 } \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

同解，从而其系数矩阵的秩相同，即 $\mathrm{R}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$，显然 $\mathrm{R}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$，因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$，即秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$，命题 ① 正确.

对命题 ③，由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，它们的系数矩阵所形成的行向量组等价，因此它们具有相同的秩，命题 ③ 正确.

由于矩阵的秩是否相同与以它们为系数的齐次线性方程是否有相同的解或者其解是否具有包含关系一般并无关系，因此命题 ②、④ 均错，所以(B) 为正确选项。

(6) 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$，则【　】.

(A)$Y\sim\chi^2(n)$　　(B)$Y\sim\chi^2(n-1)$

(C)$Y\sim F(n,1)$　　(D)$Y\sim F(1,n)$

考点　三大统计分布(χ^2 分布，t 分布，F 分布) 的定义.

解 设 $X_1 \sim N(0,1)$，$Y_1 \sim \chi^2(n)$，且 X_1 与 Y_1 相互独立，由于 $X \sim t(n)$，因此可记 $X = \dfrac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}}$，则 $Y = \dfrac{1}{X^2} = \dfrac{Y_1/n}{X_1^2} = \dfrac{Y_1/n}{X_1^2/1} \sim F(n,1)$，可见(C) 为正确选项.

三、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

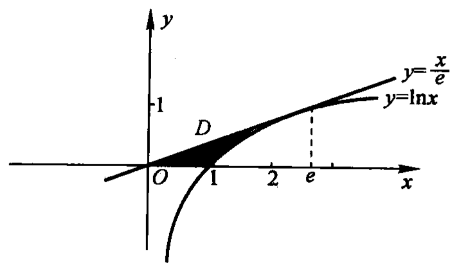
(1) 求 D 的面积 A；(2) 求 D 绕直线 $x = \mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

考点 定积分的几何应用.

解 首先计算曲线 $y = \ln x$ 过原点的切线，为此设 $(x_0, \ln x_0)$ 为切点，则

$$y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0),$$

在上式令 $x = y = 0$，得 $\ln x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \mathrm{e}$，因此曲线 $y = \ln x$ 过原点的切线为 $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. D 如右图所示.



(1) 以 y 为积分变量计算 D 的面积较简单

$$A = \int_0^1 (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}y)\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}}{2} - 1.$$

(2) 也以 y 为积分变量计算该旋转体的体积

$$V = \pi\int_0^1 [(\mathrm{e} - \mathrm{e}y)^2 - (\mathrm{e} - \mathrm{e}^y)^2]\,\mathrm{d}y = \frac{\pi\mathrm{e}^2}{3} - \pi\int_0^1 (\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^{y+1} + \mathrm{e}^{2y})\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi\mathrm{e}^2}{3} - \pi\left(\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2 - 12\mathrm{e} + 3).$$

注意：若以 x 为积分变量来计算旋转体的体积 V，计算过程比较繁琐.

四、(本题满分 12 分)

将函数 $f(x) = \arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

考点 如何将一个函数展开为幂级数.

解 由于

$$f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

因此

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}4^n\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

又级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

[redacted]

收敛，$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 点连续，所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=0$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

附注　虽然函数展开为幂级数与幂级数的求和是一对截然相反的问题，它们互为逆运算，但其运算的思想是一致的，都是使用幂级数的代数运算或分析运算性质，把一个未知展开式的函数转化为已知幂级数展开式的函数，或是把未知和函数的级数转化为已知和函数的幂级数，再由幂级数的运算性质经过还原运算使原问题得到解决的思想，因此熟练掌握幂级数的运算性质与牢记常见函数($e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^a$)的幂级数展开式就成为解决这类问题的关键. 幂级数的运算性质：

(1) 设 $s_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,x\in I_1,s_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,x\in I_2$，则

$$s_1(x)\pm s_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n,x\in I_1\cap I_2.$$

(2) 设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,x\in I$，则 $s(x)$ 在 I 上连续，即

$$\lim_{x\to x_0}s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n=s(x_0),\forall x_0\in I.$$

(3) 设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,x\in I$，该级数的收敛半径为 R，则 $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，且收敛半径仍为 R，但在 $x=R$ 处有可能发散；$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，且收敛半径仍为 R，但在 $x=R$ 处有可能收敛.

五、(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

(1) $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(2) $\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$.

考点　格林公式与二重积分的性质.

解　(1) 在区域 D 上，函数 $-ye^{-\sin x},xe^{-\sin y},-ye^{\sin x},xe^{\sin y}$ 均具有连续的一阶偏导数，由格林公式，得

$$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由于区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，因此

$$\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D (e^{\sin x}+e^{-\sin y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以

$$\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x e^{-\sin y}\mathrm{d}y - y e^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

(2)

$$\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant$$

$$2\iint_D (\sqrt{e^{\sin x}\cdot e^{-\sin x}})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi^2.$$

附注　本题也可按如下直接证明

$$\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D (e^{\sin y}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi e^{\sin y}\mathrm{d}y\int_0^\pi \mathrm{d}x+\int_0^\pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x\int_0^\pi \mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^\pi e^{\sin y}\mathrm{d}y+\pi\int_0^\pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x,$$

同理可得

$$\oint_L x e^{-\sin y}\mathrm{d}y - y e^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D (e^{-\sin y}+e^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x,$$

因此

$$\oint_L x e^{\sin y}\mathrm{d}y - y e^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x e^{-\sin y}\mathrm{d}y - y e^{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^\pi (e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x\geqslant 2\pi\int_0^\pi \sqrt{e^{\sin x}\cdot e^{-\sin x}}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^\pi \mathrm{d}x=2\pi^2.$$

命题　设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，且 D 关于 $y=x$ 对称，则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(x,y)=-f(y,x),\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(y,x).\end{cases}$$

其中 D_1 为 D 在 $y=x$ 下方的部分域. 事实上，

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1+D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}[f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}\sigma(D_2=D-D_1).$$

推论　若 D 关于 $y=x$ 对称，即若 $(x,y)\in D$，则一定有 $(y,x)\in D$，且 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D [f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}\sigma.$$

【例 1】　计算下列二重积分

(1) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D:0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a.$

(2) $\iint_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma, D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$，其中 $\varphi(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续正值函数.

[redacted]

(3)$\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\sigma, D:(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 2$.

解 (1)$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sec\theta} r^2\mathrm{d}r = \dfrac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta$

$$= \frac{a^3}{3}(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{a^3}{3}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)].$$

(2)$\iint\limits_D \dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma = \dfrac{1}{2}\iint\limits_D \dfrac{a\varphi(x)+b\varphi(y)+a\varphi(y)+b\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(y)}\mathrm{d}\sigma = \dfrac{a+b}{2}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \dfrac{a+b}{2}$.

(3)$\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\sigma = \dfrac{1}{2}\iint\limits_D \left(\arctan\dfrac{y}{x}+\arctan\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}\sigma = \dfrac{\pi}{4}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \dfrac{\pi^2}{2}$.

六、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层，汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k, k>0$)，汽锤第一次击打将桩打进地下 a(m). 根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所做的功与前一次击打时所做的功之比为常数 $r(0<r<1)$，问：

(1) 汽锤击打桩 3 次后可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深(注：m 表示长度单位米)?

考点 定积分的物理应用 —— 变力做功问题.

解 (1) 设 x 为桩被打进地下的深度，则在击打过程中土层对桩的阻力为 kx，若记 x_k 为汽锤第 k 次击打将桩打进地下的深度，$k=1,2,\cdots$，并规定 $x_0=0$. 依题设 $x_1=a$. 且

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} kx\,\mathrm{d}x = r\int_{x_{k-2}}^{x_{k-1}} kx\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow x_k^2 = (1+r)x_{k-1}^2 - rx_{k-2}^2, k=2,3,\cdots.$$

由 $x_0=0, x_1=a$，得

$$x_2 = a\sqrt{1+r}, x_3 = a\sqrt{1+r+r^2},$$

所以汽锤击打桩 3 次后可将桩打进地下的深度为 $x_3 = a\sqrt{1+r+r^2}$(m).

(2) 由于

$$\int_0^{x_n} kx\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} kx\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x + r\int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x + r^2\int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x + \cdots + r^{n-1}\int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x$$

$$= (1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})\int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x = \frac{ka^2}{2}(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}) = \frac{kx_n^2}{2},$$

故

$$x_n = a\sqrt{1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}} = a\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}, \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a}{\sqrt{1-r}}.$$

因此若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下 $\dfrac{a}{\sqrt{1-r}}$(m) 深.

七、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程.

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

考点 反函数的求导与线性常系数微分方程的解法.

解 (1) 由于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$，因此 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{y''}{y'^3}$，故原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=-\frac{y''}{y'^3}+\frac{y+\sin x}{y'^3}=0\Rightarrow y''-y=\sin x.$$

(2) 由特征方程 $\lambda^2-1=0$，得特征值 $\lambda=\pm1$，因此方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}.$$

设 $y^*=A\sin x+B\cos x$ 为方程 $y''-y=\sin x$ 的一个特解，代入该方程可求得

$$A=-\frac{1}{2},\quad B=0,$$

因此方程 $y''-y=\sin x$ 的通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

又由 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，得

$$c_1=1, c_2=-1.$$

因此原方程的特解为 $y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$.

附注 本题的特解 y^* 也可由下面的解法快速求得.

先求解方程 $y''-y=\cos x+i\sin x=\mathrm{e}^{ix}$ 的一个特解. 记 $F(\lambda)=\lambda^2-1$.

由于 $F(i)=i^2-1=-2\neq 0$，因此方程 $y''-y=\cos x+i\sin x=\mathrm{e}^{ix}$ 的一个特解为

$$Y^*=\frac{1}{F(i)}\mathrm{e}^{ix}=-\frac{1}{2}\cos x-i\,\frac{1}{2}\sin x,$$

所以方程 $y''-y=\sin x$ 的一个特解为 $y^*=\mathrm{Im}Y^*=-\frac{1}{2}\sin x$(其中 Im 为取 Y^* 的虚部).

一般地，方程 $y''+py'+qy=A\mathrm{e}^{\lambda x}$ 特解的快速解法是：记 $F(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q$，则

①$F(\lambda)\neq 0$，特解 $y^*=\frac{A}{F(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda x}$；

②$F(\lambda)=0, F'(\lambda)\neq 0$，$y^*=\frac{Ax}{F'(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda x}$；

③$F(\lambda)=F'(\lambda)=0$，$y^*=\frac{A}{F''(\lambda)}x^2\mathrm{e}^{\lambda x}=\frac{A}{2}x^2\mathrm{e}^{\lambda x}$.

注意 $f(x)+ig(x)$ 是方程 $y''+py'+qy=F(x)+iG(x)$ 的解，当且仅当 $f(x)$ 是方程

$y''+py'+qy=F(x)$ 的解，$g(x)$ 是方程 $y''+py'+qy=G(x)$ 的解.

八、(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，又

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性；

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

考点　变区域积分函数的微分问题

解　由于

$$\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2 f(r^2)\,\mathrm{d}r.$$

$$\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(r^2)\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t rf(r^2)\,\mathrm{d}r.$$

故

$$F(t)=\frac{2\int_0^t f(x^2)x^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x},\quad G(t)=\frac{\pi\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^t f(x^2)\,\mathrm{d}x}.$$

(1) 当 $t>0$ 时，由于

$$F'(t)=\frac{2t^2f(t^2)\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x-2tf(t^2)\int_0^t x^2f(x^2)\,\mathrm{d}x}{[\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x]^2}$$

$$=\frac{2tf(t^2)\int_0^t x(t-x)f(x^2)\,\mathrm{d}x}{[\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x]^2}>0.$$

所以 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

(2) 当 $t>0$ 时，由于

$$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)\Leftrightarrow\frac{\int_0^t x^2f(x^2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x}>\frac{\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x}{\int_0^t f(x^2)\,\mathrm{d}x}\Leftrightarrow$$

$$\int_0^t f(x^2)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^t x^2f(x^2)\,\mathrm{d}x>\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

而

$$\int_0^t f(x^2)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^t x^2f(x^2)\,\mathrm{d}x-\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^t xf(x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x\int_0^t y^2 f(y^2)\mathrm{d}y-\int_0^t xf(x^2)\mathrm{d}x\int_0^t yf(y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{[0,t]\times[0,t]} y^2 f(x^2)f(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{[0,t]\times[0,t]} xyf(x^2)f(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{[0,t]\times[0,t]} y(y-x)f(x^2)f(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{[0,t]\times[0,t]} x(x-y)f(y^2)f(x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{[0,t]\times[0,t]} (x-y)^2 f(x^2)f(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.$$

故

$$\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x\cdot\int_0^t x^2 f(x^2)\mathrm{d}x>\int_0^t xf(x^2)\mathrm{d}x\cdot\int_0^t xf(x^2)\mathrm{d}x\text{，即 }F(t)>\frac{2}{\pi}G(t).$$

说明 关于积分不等式证明的方法较多，由于篇幅较长，这里就不赘述，详细的归纳总结可见考研丛书《数学(一) 考研教案》，张贵海主编，西北工业大学出版社(2009.3) 中的专题讲座.

九、(本题满分 10 分)

设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P},$$

求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

考点 有关矩阵的特征值与特征向量的计算问题.

解 先求解矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量，由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_{1,2}=1,\lambda_3=7$. 进而可得 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_i}$ 分别为 7,7,1，由于 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 相似，它们具有相同的特征值，因此 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也为 7,7,1，所以 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为 9,9,3.

解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})x=\boldsymbol{0}$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_{1,2}=1$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

解方程 $(\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{E})x=\boldsymbol{0}$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_3=7$ 的一个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

由于如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}),$$

$$(P^{-1}A^*P+2E)(P^{-1}x)=(B+2E)(P^{-1}x)=\left(\frac{|A|}{\lambda}+2\right)(P^{-1}x),$$

可见，当 x 为矩阵 A 属于特征值为 λ 的特征向量时，向量 $P^{-1}x$ 正是矩阵

$$B+2E=P^{-1}A^*P+2E$$

关于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}+2$ 的特征向量，因此矩阵 $B+2E$ 的三个线性无关的特征向量分别为

$$\xi_1=P^{-1}p_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$\xi_2=P^{-1}p_2=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\xi_3=P^{-1}p_3=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

因此矩阵 $B+2E$ 属于特征值为 9 的特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\,(1,-1,0)^{\mathrm T}+k_2\,(-1,-1,1)^{\mathrm T},$$

其中 k_1,k_2 为不同时为零的任意常数.

矩阵 $B+2E$ 属于特征值为 3 的特征向量为

$$k_3\xi_3=k_3\,(0,1,1)^{\mathrm T}，其中\ k_3\ 为任意非零常数.$$

注意 本题若先计算 $B=P^{-1}A^*P$，再求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，虽然思路直接，但计算量太大，因此熟悉矩阵 $A,kA,A+kE,A^n,A^*,A^{-1}$ 的特征值与特征向量间的关系，对我们简化关于矩阵特征值与特征向量的运算是十分有效的.

十、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:ax+2by+3c=0,\quad l_2:bx+2cy+3a=0,\quad l_3:cx+2ay+3b=0,$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为：$a+b+c=0$.

考点 线性方程组的解与其系数矩阵秩的关系.

解 三条不同直线

$$l_1:ax+2by+3c=0,\quad l_2:bx+2cy+3a=0,\quad l_3:cx+2ay+3b=0,$$

相交于一点的充分必要条件是非线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b\end{cases}\quad\left(记\ A=\begin{pmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{pmatrix}\right)$$

有唯一解，而该线性方程组有唯一解，当且仅当其系数矩阵 A 的秩等于其增广矩阵 B 的秩，等于该方程组未知数的个数 2. 由于

$$|B|=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}=-6(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\1&c&a\\1&a&b\end{vmatrix}$$