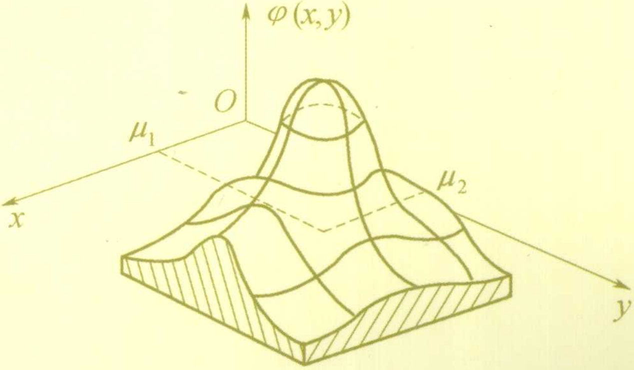
普通高等院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

祝东进 郭大伟 刘晓 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

祝东进　郭大伟　刘晓　编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是高等学校概率统计课的教材，内容包括概率论的基本概念、随机变量及其概率分布、数字特征、大数定律与中心极限定理、统计量及其概率分布、参数估计和假设检验、回归分析、方差分析以及用 Excel 进行概率统计计算.

本书论述严谨，通俗易懂，书中结合实际给出了大量例题和习题，特别是用 Excel 进行概率统计分析提供了简单实用的计算工具.

本书适合大学理工科各专业以及经济管理类专业学生使用，既可作为本科生同步学习参考书，又可作为考研复习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/祝东进，郭大伟，刘晓编著. —北京：国防工业出版社，2010.1
普通高等院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-118-06498-8

Ⅰ.概… Ⅱ.①祝…②郭…③刘… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130984 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 14¼ **字数** 255 千字
2010 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 28.00 元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474
发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前言

概率论与数理统计是研究随机现象的一门数学学科，它是与现实世界联系最密切、应用最广泛的学科之一. 随着科学技术的进步和发展，研究随机现象的数学理论和方法——概率论与数理统计方法已渗透到自然科学和社会科学的各个领域. 概率论与数理统计学科与其他学科结合形成了许多边缘性学科，如金融统计学、生物统计学、医学统计学、数量经济学、保险精算学、统计物理学、统计化学等. 概率论与数理统计已成为人们从事生产劳动、科学研究和社会活动的一个基本工具.

为非数学专业的学生提供一本适宜的概率论与数理统计教材是我们的夙愿. 在多年从事该课程教学的基础上，我们编写了这本书.

全书共分 9 章：第 1 章～第 4 章为概率论部分，其内容有概率论的基本概念、随机变量及其概率分布、数字特征、大数定律与中心极限定理等；第 5 章～第 8 章为数理统计部分，其内容有统计量及其概率分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析等. 第 9 章是用 Excel 进行概率统计计算.

本书体现了编者在以下几方面的努力：

1. 通过例题细致地阐述了概率论与数理统计中的主要概念和方法及其产生的背景和思路，力求运用简洁的语言描述随机现象及其内在的统计规律性.

2. 书中的定理和结论，大多给出简化、直观且严格的证明. 对一些类似的结论给出了推导与证明的思路. 有些结论用表格列出，便于对照、理解与掌握.

3. 按照国家标准，采用规范的概率统计用语. 注重提高学生运用概率统计的理论与方法去解决实际问题的能力. 书中例题与习题较丰富，包括大量的应用题，有助于培养学生分析问题与解决问题的能力.

4. Excel 是一种被广泛应用的工具软件，我们特别编撰了用 Excel 进行概率统计计算和分析的章节，以利于学生在学习过本书后能运用所学的知

识，解决实践中的概率统计问题，这也是本书的一个重要特色.

本书第1章～第4章由祝东进编撰，第5章～第8章由郭大伟编撰，第9章由刘晓编撰.为使理论完善，为学生展望新知识，适当增加了一些超出大纲的内容，并在教材中打“*”号，供有关专业选用.在编写的过程中，我们参阅了国内外的许多文献，谨表诚挚谢意.

由于编者水平所限，书中的错误和缺陷在所难免，恳请同行、读者提出宝贵意见，以利于我们再版时补正提高.

编　者

2009年7月

目 录

第 1 章　随机事件和概率 …… 1

1.1　随机事件 …… 1

1.2　随机事件的频率与概率 …… 7

1.3　古典概型与几何概型 …… 11

1.4　条件概率 …… 17

1.5　事件的独立性 …… 22

习题 1 …… 28

第 2 章　随机变量及其数字特征 …… 33

2.1　随机变量及其分布 …… 33

2.2　随机变量的数字特征 …… 40

2.3　常用概率分布 …… 49

习题 2 …… 60

第 3 章　随机向量的分布及数字特征 …… 65

3.1　随机向量的分布 …… 65

3.2　随机变量的独立性 …… 72

3.3　随机向量函数的分布与数学期望 …… 80

3.4　随机向量的数字特征 …… 87

习题 3 …… 90

第 4 章　极限定理 …… 95

4.1　大数定律 …… 95

4.2　中心极限定理 …… 97

习题 4 …… 101

第 5 章　数理统计的基本概念 …… 102

5.1　总体与样本 …… 102

5.2　经验分布函数与顺序统计量 …… 103

5.3　样本分布的数字特征 …… 106

5.4 常用分布及分位数 …… 109
5.5 常用抽样分布 …… 112
习题 5 …… 114
第 6 章 参数估计 …… 118
6.1 点估计 …… 118
6.2 区间估计 …… 125
习题 6 …… 131
第 7 章 假设检验 …… 135
7.1 假设检验的基本概念 …… 135
7.2 单个正态总体的假设检验 …… 137
7.3 两个正态总体的假设检验 …… 140
*7.4 非正态总体参数及分布律的假设检验 …… 143
习题 7 …… 150
第 8 章 方差分析与线性回归分析 …… 155
8.1 单因素方差分析 …… 155
8.2 一元线性回归分析 …… 159
习题 8 …… 172
第 9 章 Excel 统计分析 …… 176
9.1 利用随机数发生器产生随机数 …… 176
9.2 常见的几个分布的概率计算 …… 178
9.3 常用统计量的计算 …… 179
9.4 假设检验 …… 181
9.5 方差分析 …… 188
9.6 回归分析 …… 195
附录 1 部分习题参考答案 …… 200
附录 2 几个常用函数的数值表及相关系数显著性检验表 …… 210

第1章　随机事件和概率

概率论是研究随机现象规律性的数学学科.本章重点介绍概率论的两个最基本的概念——事件与概率,接着讨论古典概型和几何概型及其概率计算,然后介绍条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式,最后讨论事件的独立性.

1.1　随机事件

一、随机试验与样本空间

在自然界和人类社会生活中存在着两种现象:一类是在一定条件下必然出现的现象,称为确定性现象,如太阳必然从东方升起等;另一类则是事先无法准确预知其结果的现象,称作随机现象.如抛一枚硬币,不能事先预知将是出现正面还是反面.概率论研究的正是随机现象.由于随机现象的结果不能事先预知.初看起来,随机现象无规律可言,但人们发现同一随机现象在大量重复出现时,其出现的结果却具有一定的规律性.如人们重复抛一枚均匀硬币时,虽每次抛之前并不能预知它是出现正面还是反面,但出现正面的频率总是稳定在0.5左右,人们把随机现象在大量重复出现时所表现的规律性称为随机现象的统计规律性.对随机现象的观察称为试验,如果试验满足下列条件:

(1) 试验可以在同样条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果在试验前可以明确知道;

(3) 每次试验将要出现的结果是不确定的.

则称此试验为随机试验,简称试验.一个试验将要出现的结果是不确定的,但其所有可能结果是明确的.称试验的每一个结果为一个样本点,一般用 ω 表示,一切样本点构成的集合称为样本空间,一般用 Ω 表示.

对一个具体的试验,根据试验的条件和结果的含义来确定其样本空间,必要时约定一些记号以便把样本空间简洁地表示出来.

例1　掷一枚硬币,在一次试验中,H 表示"正面朝上",T 表示"反面朝上",这个试验共有两个样本点,故样本空间为

$$\Omega = \{H, T\}$$

例 2 掷一枚骰子,用 i 表示标有数字 i 的面朝上,则在一次试验中共有六个样本点,故样本空间为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

例 3 记录在某一时间段某城市发生火灾的次数,一个样本点就是该城市在一段时间内发生的火灾次数,故样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$$

例 4 向一目标目标射击炮弹,观察弹着点的位置,一次射击为一次试验.选定坐标系,则炮弹的一个弹着点(x,y)就是一个样本点,故样本空间为

$$\Omega=\{(x,y):-\infty<x<+\infty,-\infty<y+\infty\}$$

从上面的例子可以看出,样本空间可以是有限或无限的点集,也可以是抽象的集合.从随机试验到样本空间这一数学抽象,使我们可以用集合论的语言来表示概率论的概念.

二、随机事件

在随机试验中,人们除关心试验结果外,还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征.粗略地讲,把随机试验中可能发生,也可能不发生的结果称为随机事件,简称事件.事件由英文大写字母 A,B,C 等来表示,事件也可用关于试验结果的某个断言来表述,如在掷一枚骰子的试验中,"点数是 6"就是事件.在试验中必然发生的事件称为必然事件,记作 Ω;在试验中一定不发生的事件,称为不可能事情,记作$\varnothing$.如在掷一枚骰子试验中,"点数为偶数"是随机事件,"点数小于 7"是必然事件,"点数大于 8"是不可能事件.

一个样本点组成的单元素称为基本事件.如在例 1 中,$A=\{H\}$,$B=\{T\}$均为基本事件;在例 2 中,$A=\{1\}$,$B=\{2\}$等是基本事件.

三、事件的运算

1. 事件的集合表示

由定义知,样本空间 Ω 是试验的所有可能结果的全体,因此样本空间实际上是所有样本点构成的集合.从这个意义上来讲,一个事件是 Ω 中具有某些特征的样本点构成的集合,它是 Ω 的一个子集.某事件发生,是指属于该集合的某一个样本点在试验中出现.

由于样本空间 Ω 包含所有可能结果,试验结果必是其中之一,所以样本空间作为一个事件是必然发生的,它是一个必然事件,空集$\varnothing$作为 Ω 的子集不含有任何样本点,不管试验的结果是什么,$\varnothing$作为一个事件总不会发生,因而是不

可能事件.

2. 事件间的关系

在随机试验中，一般有很多随机事件. 为了通过简单事件来研究掌握复杂的事件，需要了解事件之间的关系. 下面就来分析这些关系.

1）事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 含于事件 B，或称事件 B 包含 A，记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

按照前面的说明，$A \subset B$ 意味着，若 $\omega \in A$ 则 $\omega \in B$. 故 A 是 B 的子集，也即 A 是 B 的子事件，易知任何一事件 A，有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega$$

2）事件的相等（或等价）

如果 $A \subset B$ 且 $B \supset A$，则称 A 与 B 相等（或等价），记作 $A = B$.

$A = B$ 表示 A 和 B 是同一个事件.

3）事件的并（或和）

由事件 A 与 B 至少有一个发生构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的并（或和），记作 $A \cup B$.

4）事件的交（或积）

由事件 A 与 B 同时发生构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的交（或积），记作 $A \cap B$ 或 AB.

5）事件的差

由事件 A 发生而事件 B 不发生构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A \backslash B$.

据定义，$A \backslash B$ 发生当且仅当 A 发生且 B 不发生.

如果 $A \supset B$，$A \backslash B$ 记作 $A - B$.

6）互不相容（或互斥）事件

如果事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容（或互斥）事件. 互斥的两个事件 A 与 B 的并称为事件 A 与事件 B 的和，记作 $A + B$.

7）对立事件（或逆事件）

事件 A 不发生这一事件称为 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$. 显然 $\overline{A}$ 发生当且仅当 A 不发生，由事件 A 得到事件 $\overline{A}$ 是一种运算，称作取逆运算. 显然有

$$A \cap \overline{A} = \varnothing, A \cup \overline{A} = \Omega$$

由上述关系式也知道，两个对立的事件必定是互斥的，所以“对立”是“互斥”的一种特殊情形.

例 5 记录某电话交换台一分钟内接到呼唤次数. 样本空间$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$，设 A 表示“接到的呼唤不超过 50 次”事件，B 表示“接到的呼唤在 40 次到 60 次之间”事件，C 表示“接到的呼唤超过 50 次”事件，D 表示“接到的呼唤超过 100 次”事件，则

$$A=\{0,1,\cdots,50\},B=\{40,41,\cdots,60\},$$
$$C=\{51,52,\cdots\},D=\{101,102,\cdots\}$$

$A\cup B=\{0,1,\cdots,60\}$，它表示“接到呼唤不超过 60 次”事件.

$A\cap B=\{40,41,\cdots,50\}$，它表示“接到呼唤在 40 次到 50 次之间”事件.

$A\backslash B=\{0,1,\cdots,39\}$，它表示“接到呼唤次数不超过 39 次”事件.

另外，显见 A 与 C 对立，即 $A=\overline{C}$；A 与 D 互斥，但不是对立事件.

事件的并和交可以推广到任意有限个或可数个事件的情形. 设$\{A_i\}$为一列事件，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示“$A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”事件；$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“$A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生”事件，称为 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 的并，当 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互斥时，即

$$A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$$

此时记$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$，而将$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 记作 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

类似地，$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示“$A_1,\cdots,A_n$ 同时发生”事件；$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“$A_1,A_2,\cdots$ 同时发生”事件.

8) 完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots$ 是有限或可数个事件，如果它们满足：

(a) $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$；

(b) $\sum\limits_{i}A_i=\Omega$.

则称 $A_1,A_2,\cdots$是一个完备事件组. 显然 A 与它的对立事件$\overline{A}$构成一个完备事件组.

事件之间的关系及运算还可用图形来示意.

用平面上矩形来表示样本空间 Ω. 圆形区域 A,B 分别表示事件 A,B. 图中阴影部分分别表示运算得到的事件，如图 1.1 所示.

为了便于读者比较概率论中事件的关系和运算与集合的关系及运算，将两种等价的表述形式列成对照表，见表 1.1.

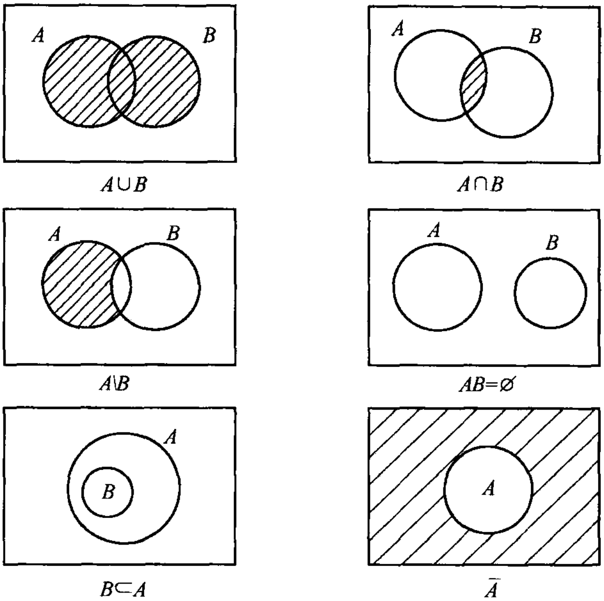


图 1.1

表 1.1

符　号	集 合 论	概 率 论
Ω	空间	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
ω	点(元素)	样本点
$A\subset\Omega$	子集	事件
$A\subset B$	集合 A 含于集合 B	A 是 B 的子事件
$A=B$	集合 A 与集合 B 相等	事件 A 与事件 B 相等
$AB=\varnothing$	集合 A 与集合 B 不相交	事件 A 与事件 B 互斥
$\overline{A}$	A 的余集	A 的对立事件
$A\cup B$	A 与 B 的并集	A 与 B 至少有一个发生
$A\cap B$	A 与 B 的交集	A 与 B 同时发生
$A\backslash B$	A 与 B 的差集	A 发生但 B 不发生

3. 随机事件的运算律

事件的运算具有下列性质.

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 德莫根(De Morgan)公式(对偶公式)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(5) 自反律：$\overline{\overline{A}}=A$.

分配律和对偶公式可以推广到任意有限个或可数个事件的情形：

$$(\bigcup_i A_i)C=\bigcup_i(A_iC)，(\bigcap_i A_i)\cup C=\bigcap_i(A_i\cup C)，$$

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}，\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$$

对偶公式联系并、交、取逆三种运算，它在概率论的计算中十分有用. 由事件之间的关系及运算的定义可推出一些有用的关系式，如由 $AB=\varnothing$ 可推出 $A\subset\overline{B}$，$B\subset\overline{A}$；由 $A\subset B$ 可推出 $A\cup B=B$，$AB=A$. 另外利用事件的运算及其关系，还可以用给定的事件来表达另一些有关的事件，或将给定的事件按照某种要求来表示. 以后，在有交、并、差运算的表达式中，总是理解为先进行交运算，然后依次从左向右进行并、差运算.

例 6 设 A,B,C 为三个事件，试用 A,B,C 表达下列事件：(1)只有 A 发生；(2)恰有一个事件发生；(3)恰有两个事件发生；(4)至少有两个事件发生.

解 (1) "只有 A 发生"="A 发生且 B 与 C 均不发生"$=A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) "恰好有一个发生"="只有 A 发生或只有 B 发生或只有 C 发生"$=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(3) "恰有两个发生"="恰好 A 与 B 同时发生或 B 与 C 同时发生或 C 与 A 同时发生"$=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

(4) "至少有两个发生"="A 与 B 同时发生或 B 与 C 同时发生或 C 与 A 同时发生"="恰好有两个发生或三个都发生"$=AB\cup BC\cup CA=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$.

例 6 中(4)有两种不同的表达式，这两种表达式都是正确的，不过意义不同. 不难看出，第二个表达式中相关的四个事件是两两互斥的；而第一个表达式中相并的每个事件都包含事件 ABC. 今后，在计算几个事件并的概率中，常常要将事件的并表成互斥事件的和，以便利用概率的性质.

例 7 在图 1.2 所示的电路中，A，B，C，D 分别表示继电器 a，b，c，d 闭合事件，试用 A，B，C，D 来表示"R，S 两点之间为通路"事件.

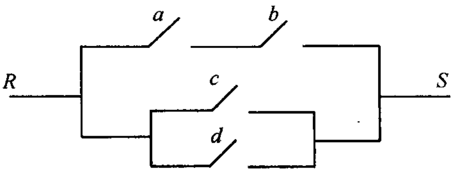


图 1.2

解 R，S 之间是通路，当且仅当"a 与 b 同时闭合或 c 闭合或 d 闭合"$=AB\cup C\cup D$.

1.2 随机事件的频率与概率

一、随机事件的频率

随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，具有不确定性，即随机性，然而在大量重复试验中随机事件却呈现出明显的规律性，即所谓频率稳定性.

设 A 是试验 E 中的一个事件，若将 E 重复进行 n 次，其中 A 发生了 n_A 次，则称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为该 n 次试验中 A 发生的频率. 人们对事件的频率稳定性的观察最早出现在人口统计中. 早在我国古代的人口普查结果表明，“男孩出生”的频率大约为 1/2. 后来，许多国家的人口统计结果都表明，男孩出生的频率几乎完全一致. 又如在做掷硬币试验中，“正面朝上”的频率大致接近 0.5，表 1.2 列出了历史上的一些试验记录. 表 1.2 表明不管何人在何时何地来掷硬币，当试验次数较大时，$f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动.

表 1.2

试验者	n	n_A	$f_n(A)$
蒲丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005
费勒	10000	4979	0.4979
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

在一个 n 次重复试验中，容易证明频率具有以下性质：

(1) $f_n(\Omega)=1$；

(2) 对任意事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

二、随机事件的概率

概率是概率论中最基本的概念之一，随机事件频率的稳定性使人们确信概率的存在，它是对随机事件发生的可能性的度量，概率的存在性正如一个物体的

长度、重量的存在一样，是客观存在的，是事件的固有属性. 一个物体的长度有多长，人们通常用测量工具来测量. 测定的结果有误差，甚至无法测出物体的真实长度(如边长 1 的正方形的对角线长度，“有理数”尺子是测不出的)，但丝毫不会影响物体长度的客观存在，像物体长度、重量等“看得见，摸得着”的事物一样，概率也客观存在，它就是频率的稳定值. 从这个意义上来说，频率是对概率进行一次测量的结果，频率可以认为是概率的近似值. 度量随机事件 A 发生的可能性大小的数值称为事件 A 的概率，因为它不以人们的意志而转移，是 A 的固有属性，故把它记作 $P(A)$.

三、概率的公理化定义

任何一个数学概念都是对现实世界的抽象，这种抽象使其具有广泛的适应性，并成为进一步数学推理的基础. 概率也不例外，经过漫长的探索历程，人们才真正完整地解决了概率的严格定义，苏联著名的数学家柯尔莫哥洛夫在 1933 年发表的《概率论的基本概论》一书中系统地表述了概率的公理化体系，第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上.

我们知道，事件 A 的概率实际上是赋予事件 A 在[0,1]上的一个实数值，从这个意义上讲 $P(\cdot)$是一个定义在事件上、取值于[0,1]的函数. 那么，这个函数的定义域怎样？函数本身又具有哪些性质？这正是近代概率论要建立的公理化结构.

1. 事件域

概率论公理化结构是从样本空间 Ω 出发的. 从前面的叙述知道，虽然事件 A 一定是 Ω 的子集，但一般来讲，不能认为 Ω 的任何一个子集都是事件. 另一方面，要使得概率论的基本框架能够容纳现实背景提出的大多数问题，那么事件应当足够丰富，它应使事件的运算(如交、并、差等)通行无阻，如果说 Ω 是一个空间，那么事件域就是搭建在这个空间上的一个舞台. 下面给出事件的公理化定义.

定义 1.1 设 Ω 是一样本空间，$\boldsymbol{Б}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合，如果它满足下列条件：

(1) $\Omega \in \boldsymbol{Б}$；

(2) 若 $A \in \boldsymbol{Б}$，则 $\overline{A} \in \boldsymbol{Б}$；

(3) 若 $A_n \in \boldsymbol{Б}$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{Б}$.

则称 $\boldsymbol{Б}$ 为 Ω 上的一个事件域，$\boldsymbol{Б}$ 中的元素称为事件.

可以证明，$\boldsymbol{Б}$ 对事件的有限或可数的交、并、差运算都是封闭的.

定义 1.2 设 Ω 是一个样本空间，$Б$ 为 Ω 上的一个事件域，设 $P(A)$ 是定义在 $Б$ 上取值于 $[0,1]$ 上的实值函数，如果 $P(\cdot)$ 满足：

(1) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(2) 非负性：对任意事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(3) 可列可加性：$A_1,A_2,\cdots$ 为两两不相容事件列，即 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$，则

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

称 $P(\cdot)$ 为 $Б$ 上的概率，而称 $(\Omega,Б,P)$ 为一个概率空间.

2. 概率的基本性质

设给定了概率空间 $(\Omega,Б,P)$，下面涉及的事件和概率均属于此给定的概率空间，从概率公理出发，可推导概率具有以下性质，这些性质是概率论中计算的重要基础.

性质 1.1 $P(\varnothing)=0$.

证 因为 $\varnothing=\varnothing+\varnothing+\cdots$，所以由概率公理(3)知

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

由于 $P(\varnothing)$ 为实数，故必有 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2(有限可加性) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件列，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

证 令 $A_i=\varnothing$，$i=n+1,n+2,\cdots$，则 $A_1,A_2,\cdots$ 两两互斥，由性质 1.1 知 $P(\varnothing)=0$，故

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i+\varnothing+\varnothing+\cdots\right)=P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质 1.3(概率的单调性) 若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

性质 1.4(概率的可减性) 对任意事件 A,B 有

$$P(A\backslash B)=P(A)-P(AB)$$

特别地，当 $A\supset B$ 时，有

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

由此易得

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

性质 1.5(广义加法公式) 设 A,B 为事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

性质 1.5 可以推广到任意有限个的情形.下面给出三个事件的情形,更一般情形由读者自行讨论.

推论

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) \\ & - P(BC) - P(CA) + P(ABC) \end{aligned}$$

性质 1.3～性质 1.5 以及性质 1.5 的推论均留作练习,由读者自行证明.

性质 1.6(次可加性) 设 $A_1,\cdots,A_n$ 为事件,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证 利用数学归纳法证明,$n=2$ 时,由广义加法公式,有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) = & P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \\ \leqslant & P(A_1) + P(A_2) \end{aligned}$$

设 $n=m$ 时,有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} P(A_i)$,则当 $n=m+1$ 时,有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) & = P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \cup A_{m+1}) \\ & \leqslant P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) + P(A_{m+1}) \\ & \leqslant \sum_{i=1}^{m} P(A_i) + P(A_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} P(A_i) \end{aligned}$$

故由数学归纳法知,对一切自然数 n,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

为加强对概率性质的理解,可把样本空间看做面积为 1 的矩形,$P(A)$理解为事件 A 的面积,如 $P(A\cup B)$是 $A\cup B$ 的面积,必然等于 A 的面积加上 B 的面积再减去 AB 的面积,如图 1.3 所示.

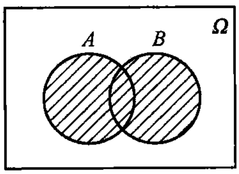


图 1.3

例 8 已知 $P(\overline{A})=0.5, P(\overline{A}B)=0.2, P(B)=0.4$,求(1) $P(AB)$;(2)$P(A\backslash B)$;(3)$P(A\cup B)$;(4)$P(\overline{A}\ \overline{B})$.