高等学校教学用書

高等代数

下册

Л. Я. 奥庫涅夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

高　等　代　数

下　册

Л. Я. 奥庫涅夫著
楊 从 仁 譯

高等教育出版社

本書系根据莫斯科、列宁格勒国营工業及理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的奥庫涅夫（Л. Я. Окунев）教授著“高等代数”（Высшая алгебра）一九四九年修訂版（第四版）本譯出。原書經苏联高等教育部审定为綜合性大学及高等师范学校教科書。

高 等 代 数

下 册

Л. Я. 奥庫涅夫著

楊从仁譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·318 开本 850×1168 1/32 印張 8 13/16

字数 210,000 印数 13,801—16,800 定价（4）¥0.85

1953年4月商務初版（共印45,000）

1958年1月新1版 1960年3月上海第8次印刷

下 册 目 錄

第五章　任意體上的多項式環 …………………………… 1

§ 26　多項式環　§ 27　多項式環內的可除性　§ 28　導數　§ 29　多重因式的分離　§ 30　根的概念

第六章　有理數體上的多項式環 …………………………… 53

§ 31　有理根的界限　§ 32　有理根的計算　§ 33　旣約性的判別法則

第七章　實數體上的多項式環 …………………………… 74

§ 34　實數體上的多項式　§ 35　方程式的實根數目　§ 36　根的定位法　§ 37　實根的近似計算

第八章　複數體上的多項式環 ……………………………101

§ 38　複數　§ 39　複數的幾何表示法　§ 40　代數　§ 41　代數擴張　§ 42　含多個未知量的多項式　§ 43　商體　§ 44　對稱多項式　§ 45　代數的基本定理　§ 46　佛羅本里斯定理

第九章　方程式的代數解 ……………………………203

§ 47　二項方程式　§ 48　三次方程式和四次方程式

第十章　消去法理論 ……………………………227

§ 49　終結式、判別式　§ 50　終結式的行列式表現法　§ 51　未知量的消去法

章十一章　圓規直尺作圖法 ……………………………248

§ 52　問題的起源　§ 53　有限擴張　§ 54　方程式用平方根可解的條件　§ 55　二倍立方體問題、三等分角問題、割圓問題　§ 56　旣約情形的討論

習題答案

參考文獻

第五章　任意體上的多項式環

§ 26　多項式環

未知量 x 的多項式(或說 x 的有理整函數)的概念是由求解含有一個未知量的一次和高於一次代數方程式的問題而產生。在遠古時期就有人從事於這個問題的研究。遠在公元 2000 年以前，在古巴比倫，就已經能够解決含有二次方程式的問題了。利用造表的幫助甚至於可以解決一些含有三次方程式的問題。

多項式的概念在代數上佔着重要的位置。這個教程的以後各章都是集中的在討論它。因爲我們準備儘可能的從一般的觀點來敍述多項式理論，所以我們先講在任意一個沒有零因子和具有單位元素的交換環上的多項式的定義。

設 R 是一個沒有零因子和具有單位元素 e 的交換環。次設 Ω 是 R 的某一個交換擴環，[1] 且 R 的單位元素 e 亦爲 Ω 的單位元素。今在 Ω 中任取一個元素 α，利用加法和乘法的運算作 α 與 R 的元素的乘積與和，就會得出含於 Ω 而形式如下的元素

$$A_1\alpha^{k_1}+A_2\alpha^{k_2}+\cdots+A_s\alpha^{k_s},\quad (s\geqslant 1) \tag{1}$$

式中的 $k_1,\cdots k_s$ 代表互不相等的非負整數，$A_1,\cdots A_s$ 代表 R 的元素。

1） Ω 可能含零因子，也可能不含零因子。

(1) 式叫做**元素 α 在環 R 上的多項式**。每一個 $A_i\alpha^{k_i}$ 都叫做這個多項式的項，A_i 叫做多項式的係數，k_i 叫做項 $A_i\alpha^{k_i}$ 的次數。元素 α 在環 R 上的多項式常用 $f(\alpha), g(\alpha), h(\alpha)$ 等來表示。

由上述多項式的定義可以得出結論：在 R 上的多項式 $f(\alpha)$ 可以看做 Ω 的元素，但兩個多項式的相等必須理解為環 Ω 內兩個元素相等的意義。

命 $R[\alpha]$ 代表 α 在環 R 上的一切多項式的集合。這個集合顯然是 Ω 的一個部分集合[1]。現在我們證明 $R[\alpha]$ 是環 Ω 的一個子環同時是環 R 的一個擴環。

證明 集合 $R[\alpha]$ 內的元素的加法滿足交換律是無需證明的，因為交換律既然對 Ω 的元素的加法成立，所以對於 Ω 的一部分 $R[\alpha]$ 當然成立。同理，集合 $R[\alpha]$ 內的加法和乘法運算滿足結合律和分配律。其次，利用環 Ω 內的元素的加法和乘法運算的一般性質，我們可以證明在 $R[\alpha]$ 中這些運算是可以施行的。

設
$$f(\alpha)=A_1\alpha^{k_1}+\cdots+A_s\alpha^{k_s}$$
$$g(\alpha)=B_1\alpha^{l_1}+\cdots+B_t\alpha^{l_t}$$
是元素 α 在環 R 上的任意兩個多項式。由此
$$f(\alpha)+g(\alpha)=A_1\alpha^{k_1}+\cdots+A_s\alpha^{k_s}+B_1\alpha^{l_1}+\cdots+B_t\alpha^{l_t},$$
集合同類項得
$$f(\alpha)+g(\alpha)=C_1\alpha^{m_1}+\cdots+C_q\alpha^{m_q},$$
式中的 $C_1\cdots C_q$ 代表 R 的元素。換句話說，我們同樣得出元素 α 在環 R 上的一個多項式。

要計算乘積 $f(\alpha)g(\alpha)$，必須利用和與和相乘的規則：
$$(a_1+a_2+\cdots+a_s)(b_1+b_2+\cdots+b_t)=a_1b_1+\cdots+a_1b_t+\cdots+a_sb_t,$$

1) $R[\alpha]$ 也可能和 Ω 一致。

這個規則對每一個環都成立。由於這個規則，要求 $f(\alpha)$ 和 $g(\alpha)$ 的乘積，必須先使多項式 $f(\alpha)$ 的每一項 $A_i\alpha^{k_i}$ 和多項式 $g(\alpha)$ 的每一項 $B_j\alpha^{l_j}$ 相乘，然後再利用乘法的交換律和結合律把這個乘積 $(A_i\alpha^{k_i})(B_j\alpha^{l_j})$ 變成

$$A_iB_j\alpha^{k_i+l_j},$$

最後再集合同類項。經過這樣的運算所得的結果顯然也是 α 在環 R 上的一個多項式。

現在我們證明，在 $R[\alpha]$ 內有零元素和加法逆元素存在。

在集合 $R[\alpha]$ 的元素中，必須含有 0，因爲 0 也可以看做是 α 的一個多項式，不過這個多項式的所有係數都等於零而已。

$R[\alpha]$ 內每一個多項式

$$f(\alpha)=A_1\alpha^{k_1}+\cdots+A_s\alpha^{k_s}$$

的加法逆元素同樣是含於 $R[\alpha]$ 的多項式

$$h(\alpha)=(-A_1)\alpha^{k_1}+\cdots+(-A_s)\alpha^{k_s},$$

因爲

$$\begin{aligned}f(\alpha)+h(\alpha)&=A_1\alpha^{k_1}+\cdots+A_s\alpha^{k_s}+(-A_1)\alpha^{k_1}+\cdots+(-A_s)\alpha^{k_s}=\\&=[A_1\alpha^{k_1}+(-A_1)\alpha^{k_1}]+\cdots+[A_s\alpha^{k_s}+(-A_s)\alpha^{k_s}]=\\&=[A_1+(-A_1)]\alpha^{k_1}+\cdots+[A_s+(-A_s)]\alpha^{k_s}=\\&=0\cdot\alpha^{k_1}+\cdots+0\cdot\alpha^{k_s}=0.\end{aligned}$$

我們以後常用 $-f(\alpha)$ 代表 $h(\alpha)$，並把它叫做多項式 $f(\alpha)$ 的加法逆多項式。

由上述我們可以看出，對於 Ω 內定義的加法和乘法，集合 $R(\alpha)$ 構成一個環，換句話說，$R[\alpha]$ 是 Ω 的一個子環。

最後，我們還需要證明 $R[\alpha]$ 是 R 的擴環。爲了這個目的，我們必需證明 R 所有的元素都含於 $R[\alpha]$。

0 含於 $R[\alpha]$ 已經證明。次在 R 內任取一個非零元素 c。c 可以看

做元素 α 在環 R 上的多項式，因爲我們可以把它寫成 $c=c\alpha^0$。因此元素 c 也必須含於 $R[\alpha]$。

我們常把 R 的擴環 $R[\alpha]$ 叫做**元素 α 在 R 上的多項式環**。

我們還要再一次指出：因爲 $R[\alpha]$ 是交換環 Ω 的一個子環，所以 $R[\alpha]$ 也是一個交換環。由於 $R[\alpha]$ 是 Ω 的部分集合和含有 α，所以在 $R[\alpha]$ 內可能有零因子存在，這一點是依賴於環 Ω 和所取的元素 α。

現在我們舉一個例子解釋某一個元素的多項式這一概念。

例 設 Ω 是實數體 D，R 是整數環 C。在 D 中取元素 $\alpha=\sqrt{2}$，我們試研究環 $C[\sqrt{2}]$。依照定義，這個環必須包含 $\sqrt{2}$ 在整數環上的所有多項式，換句話說，必須包括形式如下的一切元素：

$$A_1(\sqrt{2})^{k_1}+\cdots+A_s(\sqrt{2})^{k_s} \quad (s\geqslant 1), \tag{2}$$

式中的 $k_1\cdots k_s$ 代表不同的非負整數，$A_1,\cdots A_s$ 代表整數。例如取 $S=3$，$k_1=3, k_2=2, k_3=0, A_1=3, A_2=-5, A_3=7$，我們就得出 $C[\sqrt{2}]$ 的一個元素

$$3(\sqrt{2})^3-5(\sqrt{2})^2+7(\sqrt{2})^0,$$

由於 $(\sqrt{2})^2=2$，所以這個元素可以寫成

$$6\sqrt{2}-3.$$

一般說來，根據等式 $(\sqrt{2})^2=2$，我們可以把 $C[\sqrt{2}]$ 的每一個元素寫成一個二項式 $a+b\sqrt{2}$，式中的 a, b 代表整數。我們從這裏可以看出，用 $\alpha=\sqrt{2}$ 去表示 $C[\sqrt{2}]$ 的每一個元素的方法就不是唯一的：$C[\sqrt{2}]$ 的同一個元素旣可以表示成含 $\sqrt{2}$ 的高於一次冪的形式 (2)，又可以表示成只含 $\sqrt{2}$ 的一次冪的二項式 $a+b\sqrt{2}$。這一個現象是由於 $\alpha=\sqrt{2}$ 滿足等式 $\alpha^2-2=0$ 而起，這個等式的左端是 α 在整數環上係數不爲零的多項式 α^2-2。

根據這個觀察的結果，我們就得出兩個非常重要的概念，就是所謂

的代數元素和超越元素。

假若 Ω 的元素 α 滿足等式

$$A_1\alpha^{k_1}+\cdots+A_s\alpha^{k_s}=0,$$

等式的左端是 α 在環 R 上的一個係數 A_i 不爲零的多項式，我們就說 α 是對於環 R 的一個代數元素。

反之，假若 α 在 R 上的多項式限於且僅限於所有的係數 A_1、…、A_s 爲零時始有上述等式成立，我們就說 α 是對於環 R 的一個超越元素或未知量。

因此 $\sqrt{2}$ 是關於整數環的一個代數元素。

* 在歷史上，第一個超越元素的例子就是所謂的超越數，換句話說，就是對於整數環是超越元素的複數。超越數的存在首先由留維里爾在 1851 年證明，繼後，在 1873 年埃爾米堤發現自然對數底 e 的超越性。利用埃爾米堤的思維方法，林得曼證明了 π——圓周長和直徑的比——也是一個超越數。要算蘇聯學者亞・俄・格爾馮德在 1929—1936 年的工作，使超越數理論的發展向前邁進了極爲重要的一步。格爾馮德證明了一個重要類型的數的超越性，由他的結果就可以斷定 $2^{\sqrt{2}}$，$3^{\sqrt{5}}$（一般總的來說 $m^{\sqrt{n}}$，式中 $m>1$, n 代表一個整數，但 $\sqrt{n}$ 是無理數），e^{π}，$2^{i\sqrt{2}}$ 等的超越性。*

以後我們常用最後幾個拉丁字母 $x, y, z,\cdots$ 代表未知量。從現在開始我們就專門來討論含未知量的多項式；這種類型的多項式在代數上佔着非常重要的位置。

我們容易證明，用 x 代表多項式環 $R[x]$ 的每一個元素的方法是唯一的，換句話說，多項式相等的條件可述如下：$R[x]$ 的多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$，除去係數爲零的項外，限於且僅限於兩個所含的項完全

一致時相等。[1]

設在多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中，除去係數等於零的項外，兩者所含的項完全一致。由多項式 $f(x)$ 減去多項式 $g(x)$，則所有不為零的項都相互消去，結果得 $f(x)-g(x)=0$，換句話說 $f(x)=g(x)$。

次設 $f(x)=g(x)$。假若所與的條件不滿足，$f(x)$ 必有係數不為零的某一項而不含於多項式 $g(x)$ 中，由此 $f(x)-g(x)$ 至少含有係數不為零的一項，但是 $f(x)-g(x)$ 同時又等於零，所以

$$f(x)-g(x)=C_1x^{k_1}+\cdots+C_qx^{k_q}=0, \quad C_1\neq 0.$$

這個等式和 x 在 R 上的超越性相違反。

現在我們導入含未知量的多項式的次數的概念。設

$$f(x)=A_1x^{k_1}+\ldots+A_sx^{k_s}$$

是 $R[x]$ 的任意一個多項式，並設 $f(x)$ 至少有一個係數不是零。由於 x 的超越性，這樣的一個多項式顯然不等於零。所謂這個多項式的次數是指係數不為零的各項的最高次數。

例如 $$f(x)=x^3+7x^5-0\cdot x^8+2x-1$$

就是在整數環上的一個五次多項式。

顯然，我們可以把環 R 的每一個元素 $a\neq 0$ 看做含未知量 x 的零次多項式，因為 $a=ax^0$。至於 R 的零元素，我們可以把它看做沒有次數的多項式，或者叫它是零多項式。

根據我們已經證明的多項式相等的條件，知道兩個次數不同的含未知量的多項式決不會相等。

我們還應當注意，x 雖然是 Ω 的元素，但不是 R 的元素。不僅如此，

---

[1] 讀者應當注意，這個性質是含未知量的多項式的特性。從上面所舉的例子我們可以知道，代數元素的多項式就不具備這個性質。

我們還可以證明,在 $R[x]$ 的多項式 $f(x)$ 中，沒有次數大於零的多項式能够等於環 R 的元素。假若不然,設 $f(x)=a$, a 代表環 R 的一個元素。結果：等式的左端是次數大於零的多項式，等式的右端是零次多項式或零多項式 $(a=0)$。這個等式顯然和未知量的多項式的相等條件相抵觸。

把 $R[x]$ 的多項式 $f(x)$ 的項依照未知量 x 的降冪排列,我們得出所謂的多項式的標準形式:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n, \tag{3}$$

式中的 n 代表一個非負整數，$a_0, a_1,\cdots a_n$ 代表 R 的元素。我們以後在實際的利用上,往往把多項式寫成這個形式。

a_0x^n 叫做多項式的最高項，a_n 叫做多項式的絕對項。最高項的係數 a_0 叫做多項式的最高係數。

顯然，多項式(3)的次數限於且僅限於最高係數 a_0 不爲零時始等於 n。至於其餘的係數 $a_1,\cdots a_n$ 可以部分爲零或甚至於全爲零。

爲了方便,有時並不把項依照 x 的降冪排列，相反的，可以把項依照 x 的升冪排列:

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n.$$

和上面一樣，$f(x)$ 的次數限於且僅限於 $a_n\neq0$ 時等於 n。

要研究未知量 x 的多項式環 $R[x]$ 的更多性質，我們先求這些多項式的加法和乘法規則。爲了這個目的把多項式的項按照升冪排列。設

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n,$$
$$g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_mx^m$$

是 $R[x]$ 的任意兩個多項式。爲了更確定起見,不妨設 $n\geqslant m$。使這兩

個多項式相加得

$$f(x)+g(x)=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m).$$

先去括弧再集同類項，提出同類項的公因子（因爲我們討論的是環 Ω 的元素，所以這個運算是完全合理的）後得

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n, \tag{4}$$

式中的 $c_i=a_i+b_i(i=0,1,\cdots n)$，但 $n>m$ 時，我們必須假設 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$。

根據上面的結果，我們得到了一個非常簡單的多項式加法規則：把 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的同次冪的係數相加就得出這兩個多項式的和的係數 c_i。

由等式(4)，我們知道兩個多項式的和的次數不超過這兩個多項式次數較高的一個的次數。

利用和與和相乘的規則，容易求出多項式的乘積 $f(x)\cdot g(x)$。集合同類項後再提出公因子得：

$$f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+a_nb_mx^{n+m}. \tag{5}$$

根據等式（5），可以得出含未知量 x 的多項式環 $R[x]$ 的一個重要性質。就是說，$R[x]$ 是一個不含零因子的環。事實上，如果 $f(x)\neq 0$ 和 $g(x)\neq 0$，那麼這兩個多項式的每一個都具有一個完全確定了的次數。設 $f(x)$ 的次數是 n，$g(x)$ 的次數是 m，於是便有 $a_n\neq 0$ 和 $b_m\neq 0$。由此乘積 a_nb_m 不等於零，因爲 R 不含零因子，從這裏，我們再去研究一下（5），便可以看出，如果 $a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$，所以由 $a_nb_m\neq 0$ 和 x 的超越性，乘積 $f(x)g(x)$ 也不等於零。

不僅如此，由等式(5)我們還可以看出：$R[x]$ 的兩個多項式的乘積的次數等於這兩個多項式的次數的和。

我們還要附帶提一下，規則(4),(5)不僅對於含未知量的多項式成立，對於任意一個元素 α 的多項式也同樣的成立，因爲這些規則僅僅根據環 Ω 的元素的加法和乘法運算的一般性質而得來。但是，在 α 是代數元素的時候，$R[\alpha]$ 可能含有零因子。這是不足爲奇的，因爲未知量的多項式環不含零因子，主要地是由 x 的超越性而起。現在我們舉一個例子以資說明。

例　我們來研究形式如下

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}$$

的二階矩陣的集合 M，式中 a, b 代表任意的整數。讀者容易證明，關於矩陣的乘法和加法，集合 M 構成一個交換環。M 含有單位元素，因爲二階單位矩陣

$$e=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

顯然就是 M 的單位元素。我們還要指出，二階零矩陣

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

就是 M 的零元素。現在我們把 M 當成 Ω 看待。其次不難看出，所有形式如

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix}$$

的二階矩陣(a 代表任意的整數)的集合 N 可以看做是 M 的一個子環。N 含有單位元素，但不含零因子。

今由 M 中取出矩陣

$$\alpha=\begin{Vmatrix}1&0\\0&-1\end{Vmatrix}.$$

因爲單位元素 e 含於 N 和 $\alpha^2=e$, 所以 α 是關於環 N 的一個代數元素。

現在我們證明 α 的多項式環 $N[\alpha]$ 含有零因子。爲了這個目的取 α 在環 N 上的兩個多項式:

$$f(\alpha)=\alpha-e,\quad g(\alpha)=\alpha+e.$$

因爲

$$\alpha-e=\begin{Vmatrix}1&0\\0&-1\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&0\\0&-2\end{Vmatrix}\neq 0,$$

$$\alpha+e=\begin{Vmatrix}1&0\\0&-1\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2&0\\0&0\end{Vmatrix}\neq 0,$$

所以 $f(\alpha)$ 和 $g(\alpha)$ 都不等於零，但是 $f(\alpha)$ 和 $g(\alpha)$ 的乘積却等於零:

$$(\alpha-e)(\alpha+e)=\alpha^2+\alpha e-e\alpha-e^2=\alpha^2+\alpha-\alpha-e^2=$$
$$=e-e^2=e-e=0.$$

最後這個結果,自然還可以直接證明如下:

$$(\alpha-e)(\alpha+e)=\begin{Vmatrix}0&0\\0&-2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2&0\\0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\end{Vmatrix}=0.$$

現在再回來研究含未知量 x 的多項式環。我們現在來看一下除法。發現出,縱使 R 是一個體,在 $R[x]$ 內除法是不一定可以施行的，換句話說，設 $f(x)$ 和 $g(x)\neq 0$ 是 $R[x]$ 的兩個已知多項式，$R[x]$ 內不一定有第三個多項式 $h(x)$ 存在而滿足

$$f(x)=g(x)h(x).$$

例如，如果 $f(x)=x+a$, $g(x)=x^2+a$ (a 代表 R 的某一個不爲零的元素)，那麼就不可能在 $R[x]$ 求出一個多項式 $h(x)$ 滿足等式 $x+a=$

$(x^2+a)h(x)$, 因爲 $(x^2+a)h(x)$ 的次數高於 $x+a$ 的次數。

根據上述結果，$R[x]$ 是一個不含零因子的交換環，但不是一個體。

設在 Ω 中或在環 R 的另外一個擴環 Ω' 中另取一個未知量 y[1]。我們現在證明 y 在 R 上的多項式環和原來的環 $R[x]$（嚴格的說，除去一一同構不計外）是相同的。換句話說，有下述定理成立：

含未知量的多項式環的唯一性定理 設 x, y 是含於環 R 的相同或不相同的擴環 Ω 和 Ω' 的兩個未知量，則 x 在 R 上的多項式環和 y 在 R 上的多項式環一一同構。

證明 令 $R[x]$ 的每一個多項式和 $R[y]$ 中具有相同係數的多項式成對應：

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \longrightarrow f(y)=a_0+a_1y+\ldots+a_ny^n. \quad (6)$$

首先我們證明：這個對應 (6) 不僅是唯一的，而且是一個一一對應。爲了這個目的，在 $R[x]$ 中另取一個多項式

$$g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m.$$

根據所與的對應關係，$g(x)$ 必須對應 $g(y)$

$$g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m \longrightarrow g(y)=b_0+b_1y+\ldots+b_my^m.$$

設 $f(y)=g(y)$。於是，根據含未知量的多項式的相等條件，$f(y)$ 和 $g(y)$ 的差僅僅是係數等於零的項。由此得出，$f(y)$ 和 $g(y)$ 的同次冪的項的係數必須相等，換句話說，$b_0=a_0$, $b_1=a_1$ 等。由於係數的一致，所以 $f(x)$ 等於 $g(x)$。這樣，我們就證明了 $R[x]$ 內不相等的多項式必須對應 $R[y]$ 內不相等的多項式，換句話說，對應 (6) 是一個一一對應。

---

1) 和 Ω 一樣，我們自然也假設 Ω' 是一個交換環。R 的單位元素亦爲 Ω' 的單位元素。

現在我們再看和$f(x)+g(x)$與乘積$f(x)g(x)$對應的多項式是什麼。根據多項式的加法規則在$n\geqslant m$時有

$$f(x)+g(x)=h(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n,$$

式中$c_i=a_i+b_i$，$(i=0,1,\cdots,n)$，但$n>m$時，必須令$b_{m+1}=0,\cdots,b_n=0$。$h(x)$應當和具有相同係數的$h(y)$成對應：

$$h(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n\to h(y)=c_0+c_1y+\cdots+c_ny^n.$$

但是在環$R(y)$裏，顯然有同樣的加法規則(4)成立。因之

$$f(y)+g(y)=c_0+c_1y+\cdots+c_ny^n=h(y),$$

所以

$$f(x)+g(x)\to f(y)+g(y).$$

同理，根據多項式的乘法規則(5)，我們得出這樣的結論：乘積$f(x)g(x)$必須和$f(y)g(y)$成對應。

綜合上述，我們就證明了對應(6)是環$R[x]$和環$R[y]$的一個一一同構，定理也就得到了證明。

有時爲了簡單，我們需要把未知量x代以下式：

$$y=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n,\quad c_0\neq 0,$$

等式的右端是$R[x]$的某一個次數不小於一$(n\geqslant 1)$的多項式，等式左端的y被看做是新的未知量。

例如，在二次多項式

$$x^2+2a_1x+a_2$$

中，令$x=y-a_1$則得出一個更簡的含未知量y的多項式：

$$y^2+b,$$

式中$b=a_2-a_1^2$。這個多項式的形式較原多項式簡單，因爲y的一次項

的係數是零。

根據下述的事實，這種置換是完全合理的：$R[x]$ 的每一個 $n\geqslant 1$ 次多項式都是關於 R 的一個超越元素。

證明　假若不然，設

$$y=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_n,\quad c_0\neq 0,\quad n\geqslant 1$$

是關於 R 的一個代數元素。這就是說，我們可以選擇一個非負整數 k 和選擇環 R 的元素 $a_0\neq 0, a_1,\cdots,a_k$ 而使 y 滿足下述等式：

$$a_0y^k+a_1y^{k-1}+\ldots+a_k=0. \tag{7}$$

顯然，$k\neq 0$，因爲 $k=0$ 時，等式(7)的左端只剩下一個 a_0，但 a_0 是假設不爲零的。

根據上述可令 $k\geqslant 1$。把 y 的值代入等式(7)得

$$a_0(c_0x^n+\ldots+c_n)^k+a_1(c_0x^n+\ldots+c_n)^{k-1}+\ldots+a_k=0,$$

除去括弧後再集合同類項則有

$$a_0c_0{}^kx^{kn}+\ldots+(a_0c_n^k+a_1c_n^{k-1}+\ldots+a_k)=0. \tag{8}$$

因爲 x 是關於 R 的超越元素，所以等式(8)所有的係數都必須是零，特別 $a_0c_0{}^k=0$。由於 R 不含有零因子，所以從最後這個等式得 $a_0=0$ 或 $c_0=0$，無論是那一個情形都和 $a_0\neq 0, c_0\neq 0$ 的假設相衝突[1]。

對於超越元素(未知量)的概念我們已經談得够多了。現在發生這樣一個問題，就是關於任意一個環 R 這種元素是否存在。這個問題的完全回答將在第八章講述；在那裏我們可以證明：對於每一個不含零因

1）　至於零次多項式或零多項式，它們已經是關於 R 的代數元素了。事實上，若 $y=c$ 是 R 的某一個元素，我們就可以選擇 k 和係數 $a_0\neq 0, a_1,\cdots a_k$ 而使 $a_0c^k+a_1c^{k-1}+\cdots+a_k=0$。因爲令 $k=1$, $a_0=e$, $a_1=-c$ (e 代表 R 的單位元素)，就有 $c-c=0$. 在此，我們有理由令 $a_1=-c$，因爲 $-c$ 是 R 的元素。