电大·成人高教自考辅导丛书④

經济数学解题指导

（微积分部份）

张日新　编

四川省社会科学院出版社

电大·成人高考学习辅导丛书之四

经济数学解题指导

张日新 编

四川省社会科学院出版社

一九八七·十·成都

前　　言

本书主要供电大学生日常学习经济数学（微积分部分）以及考前进行系统复习时使用。对于成人高教自考，职大、函大、夜大经济类各专业的学员和自学者同样能起到引路解惑和系统地掌握这门课程基础知识的作用，本书也可供教师教学时参考。

本书主要依据中央电大经济数学编写组编的《经济应用数学（一）微积分》及其教学大纲编写而成。编写中注意了当前数学考试中标准化命题的方向，选编了填空题、判断题、选择题、计算题和证明题五种类型的习题。其中部分不属于这五种类型的其他题型，如作图题等归在计算题一类中。

考虑到经济类专业学生的数学基础，书中对所选编的每道习题均给出答案，除较浅显的题以外，都作了较为详细的解答，在某些题目后面还附有说明。

本书力求覆盖面宽，实用性强，具有一定的典型性和代表性，以便读者使用本书后，能了解各种题型的特点，掌握本门课程的基本知识以及解题的基本方法和技巧，提高逻辑推理能力和分析问题、解决问题的能力。为了达到上述目的，在介绍各类题型前，对本门课程必须掌握的基本内容首先作了提要概述，读者务必先要读完这一部分的内容，不要急于做题。

本书中多数类型的题分为两个部分，用“＊＊＊＊＊＊”线分开。前面部分是较基本的和应该掌握的，后面部分难度稍大一些。另外，印有＊号的题是电大教学大纲中作为一般要求了解的题，印有△号的题是由于教学时数的限制电大教学大纲没有要求的。读者可根据大纲的要求以及自己的实际情况选择使用。

由于作者水平所限，再加上时间仓促，本书难免有不妥与错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

1987年9月

目　录

一、基本内容提要

第一部分　函数与极限

（一）　函　　数

一、函数概念

1．定义　设有两个变量x和y，变量x的变化范围为D，如果对于D中的每一个x值，按照某一对应规律f，y都有唯一确定的值与之对应，则称变量y是变量x的函数，记作

$$y=(x)\qquad x\in D$$

x称为自变量，y称为因变量，x的变化范围D叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域。当x取遍D中每个值时，相应的所有函数值的全体叫做函数 $y=f(x)$ 的值域。

2．函数的记号　$y=f(x)$ 是函数的一个记号，表示“y是x的函数”，不能误认为“y等于f与x的乘积。”

在函数概念中，对应规律f是抽象的，只有在具体函数中，对应规律f才是具体的，例如，对于函数 $y=3x^2-2$ 来说，若将它记作 $y=f(x)$，那么这里的f是这样一组运算：把x平方后乘以3，再减去2。

3．函数的要素　函数概念包含着三个因素：定义域，对应规律和值域，其中定义域和对应规律这两个因素决定第三个因素值域。因此值域是派生的，确定一个函数的根本要素是函数的定义域和对应规律。

两个函数当且仅当定义域与对应规律完全相同时才是同一函数，否则就是不同的函数。

二、函数的表示法

函数的表示法通常有公式法、表格法和图示法三种，另外，在经济数学中还会出现积分上限函数和用无穷级数表示函数等其他形式。

用公式法（或称解析法）表示函数，不一定非得用一个式子不可。有时一个函数在定义域的不同部分可能要用几个不同的式子来表示，称为分段函数。例如

$$y=\begin{cases}2x+1 & \text{当}-1\leqslant x\leqslant 0\\ 1 & \text{当}0<x<1\\ x^2-1 & \text{当}1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

就是用三个式子来表示的分段函数，定义域是〔−1，2〕。注意它是一个函数，并不是三个函数。经济现象中的函数经常要用分段函数表示。

三、确定函数定义域的原则

1．实际应用问题要根据问题的实际意义确定函数的定义域。

2．函数用公式法给出时，它的定义域是使表达式有意义的自变量值全体。一般应注意以下几条：（1）分式的分母不能等于零；（2）偶次根式根号内的式子应当非负；（3）对数的真数大于零；（4）$y=\operatorname{tg}x$ 及 $y=\sec x$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，其中k为整数；$y=\operatorname{ctg}x$ 及 $y=\csc x$，$x\neq k\pi$，其中k为整数；（5）$y=\arcsin x$ 及 $y=\arccos x$　$|x|\leqslant 1$。

3．分段函数的定义域是各段自变量取值范围的并集，

4．两个函数经过加减乘除四则运算得到的函数的定义域是这两个函数定义域的交集，且相除时新出现的分母不能为零。

5．复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是使 $u=\phi(x)$ 的函数值落在 $=f(u)$ 的定义域内的 x 值的全体。

6．$y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域是原来函数 $y=f(x)$ 的值域。

四、函数的简单性质

1．函数的奇偶性　若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数。

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称。

定义域不是关于原点对称的函数必既不是奇函数，也不是偶函数。

2．函数的增减性　设 $y=f(x)$在区间（a，b）内有定义，若对（a，b）内任意两点和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在（a，b）内是单调增加的；若对（a，b）内任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在（a，b）内是单调减少的。上述定义中的区间可以非开。

单调增加函数的图形是沿x轴正向（从左到右）上升的；单调减少函数的图形是沿x轴正向下降的。

函数增减性的判别，除了直接利用定义和某些基本初等函数的性质（例如$y=e^x$在定义域内是单调增加的）外，主要利用导数判别法（见导数的应用部分）。

3．函数的周期性　设有函数$y=f(x)$。$X\in D$。若存在一个常数$T\neq0$，使得对于任意的$X\in D$，都有$f(x+T)=f(x)$，则称$y=f(x)$为周期函数，满足这个等式的最小正数T称为函数的周期。

$y=\sin x$，$y=\cos x$是周期函数，周期是2π。

4．函数的有界性　设函数$y=f(x)$在（a，b）内有定义，如果存在一个正常数 M，使得对于任意的$x\in$（a，b），恒有$|f(x)|\leqslant M$ 即$-M\leqslant f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$在（a，b）内有界。上述定义中的区间可以非开。

函数$y=f(x)$在（a，b）内有界的几何意义是函数$y=f(x)$的图象位于两直线 $y=M$ 与 $y=-M$之间。

五、复合函数

设y是u的函数$y=f(u)$，定义域为B，而u又是x的函数$u=\phi(x)$，定义域为A，G是A中使$u=\varphi(x)$的函数值落在B内的x全体构成的非空子集，则对任意的$x\in G$，经过u必有唯一确定的y与之对应，于是在G上定义了一个函数，这个函数称为$y=f(u)$与$u=\phi(x)$复合而成的复合函数，记作　　$y=f[\phi(x)]$　　$X\in G$

u叫中间变量，也称f为外层函数，ϕ为内层函数。

复合函数$y=f[\phi(x)]$的定义域G与$u=\phi(x)$的定义域A一般不一定相同。

注意不是任何两个函数都能复合　若G为空集，则无法复合　例如 $y=\arcsin u$与 $u=2+x^2$无法复合。

六、反函数

函数$y=f(x)$的反函数通常用$y=f^{-1}(x)$表示，反函数$y=f^{-1}(x)$与直接函数 $y=f(x)$ 的

图形关于直线$y=x$对称，函数$y=f(x)$的定义域与值域分别是其反函数$y=f^{-1}(x)$的值域与定义域。

求函数$y=f(x)$的反函数的步骤通常是，从$y=f(x)$中解出$x=f^{-1}(y)$，然后将x与y对换，改写成$y=f^{-1}(x)$的形式。

七、基本初等函数与初等函数

1．基本初等函数：常数函数$y=c$（c为常数）；幂函数$y=x^{\alpha}$（α为实数）；指数函数$y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）；对数函数$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）；三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg} x$，$y=\operatorname{ctg} x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；反三角函数$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\operatorname{ars\,tg} x$，$y=\operatorname{arc\,ctg} x$等。

2．初等函数　由基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合所得到的函数，为初等函数。分段函数不是初等函数。

八、经济中常用的函数

1．**总成本函数**　总成本C是总产量q的函数$C=C(q)$。例如，当固定成本为C_1，每生产1个单位的产品变动费用增加C_2时，总成本$C=C_1+C_2q$。

2．**平均成本函数**　平均成本（即单位产品成本）是产量的函数$A\cdot C\cdot=\frac{C}{q}=\frac{C(q)}{q}$

3．**价格函数**　价格与销售密切相关，价格p是销售量q的函数　$p=p(q)$。

4．**需求函数**　一般，需求量与价格有关，需求量q是价格p的函数　$q=q(p)$

5．**供应函数**　考虑供应一方，供应量q也是价格p的函数　$q=q(p)$

6．**收益函数**　收益R是销售量q与价格p的乘积，因而是销售量的函数（需要时也可写成收益是价格的函数）

$$R=p\cdot q=R(q)\qquad(\text{或}R=p\cdot q=R_1(p))$$

7．**利润函数**　利润L是收益R与成本C之差$L=R-C$，当$R=R(q)$，$C=C(q)$时，利润L是q的函数$L=R(q)-C(q)$。

方程$L(q)=0$即$R(q)=C(q)$的解$q=q_0$，称为损益分歧点，它表示当产量q为q_0时，收益与成本相抵。

8．**库存问题**　若在某个时期内某种产品的计划产品数为a件，分期分批生产，每批生产准备费为b元，产品均匀投放市场（即平均库存量为批量的一半），若每件产品在这个时期内库存费为C元，则生产准备费与库存费之和y与批量x之间的函数关系是

$$y=b\cdot\frac{a}{x}+c\cdot\frac{x}{2}$$　其中x取$(0,a]$中a的整数因子。

生产准备费与库存费之和y也可表为批次n的函数$y=bn+c\frac{a}{2n}$

〈二〉极　　限

一、数列的极限

描述性定义　当n无限增大时，若数列$\{f(n)\}$无限地趋近某一常数A，则称A为数列$\{f(n)\}$的极限，或称数列$\{f(n)\}$收敛于A，记作

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=A\qquad\text{或}n\to\infty\text{时，}f(n)\to A$$

如果数列$\{f(n)\}$没有极限，就称数列$\{f(n)\}$发散。

研究数列的极限，不能孤立地察考数列的某一项或若干项，而应着眼于数列的整体，看数列当项数n无限增大时的变化趋势。

精确性定义 设有数列 $\{f(n)\}$，如果存在一个常数A，不论任意给定的正数 ε 怎样小，总存在自然数N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|f(n)-A|<\varepsilon$ 成立，则称A为数列 $\{f(n)\}$ 的极限。

数列 $\{f(n)\}$ 以A为极限的几何意义是：任意给定A的一个不论怎样小的 ε 邻域 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$，至多除了有限个点 $f(1), f(2), \cdots, f(N)$ 以外，其余所有的点 $f(N+1), f(N+2), \cdots$ 全都位于 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内。见图1.1。

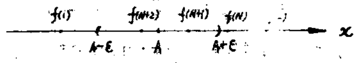

图1-1

二、函数的极限

1．当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限：

描述性定义 当自变量x的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 的值无限地趋近某一常数A，则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，或称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 收敛于A。记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或x\to\infty时，f(x)\to A$$

$x\to\infty$ 包含 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 两种情形，当自变量x取正值并且无限增大时，若 $f(x)$ 无限趋近于某一常数A，则称 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时以A为极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，当自变量x取负值并且绝对值无限增大时，若 $f(x)$ 无限趋近于某一常数A，则称 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时以A为极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$。

2．当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限：

描述性定义 当自变量x无限接近 x_0（但 $x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一常数A，则称A为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，或称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 收敛于A，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \qquad 或当x\to x_0时，f(x)\to A。$$

精确性定义 设有函数 $y=f(x)$，如果存在一个常数A，不论任意给定的正数 ε 怎样小，总存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称A为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限。

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以A为极限的几何意义是：不论给定的正数 ε 怎样小，总存在一个以 x_0 为中心、δ 为半径的去心邻域 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$，只要x位于该去心邻域内，相应的函数 $y=f(x)$ 的图象就必定落在以两直线 $y=A\pm\varepsilon$ 为边界的带形区域内。见图1.2。

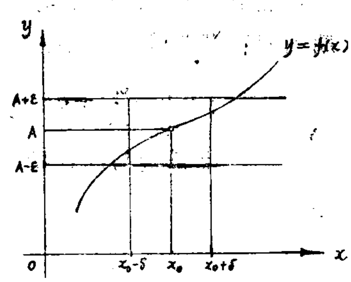

图1-2

必须注意函数 $f(x)$ 在 x_0 的极限仅与 $f(x)$ 在 x_0 附近的函数值变化有关，而与 $f(x)$ 在 x_0 的情形无关。就是说，$f(x)$ 在 x_0 的极限与 $f(x)$ 在 x_0 有无定义以及如果有定义的话函数值是什么都没有关系。

单侧极限 当x从 x_0 的右侧（即x取大于 x_0 的值）无限趋近于 x_0 时，若 $f(x)$ 无限趋近于常数A，则称A为 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$，当x从 x_0 的左侧（即x取小于 x_0 的值）无限趋近于 x_0 时，若 $f(x)$ 无限趋近常数A，则称A为 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极

限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

三、无穷小量与无穷大量

1．无穷小量 极限为零的变量称为无穷小量。即：若$\lim\alpha=0$则α称为无穷小量。

无穷小量的性质： （1）$\lim f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\alpha(x)=0$；（2）有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量；（3）有限个无穷小量的积仍是无穷小量；（4）无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量；

2．无穷大量 如果变量β在它的变化过程中，能从某一时刻开始，其绝对值一直保持大于预先给定的任意大的正数E，即$|\beta|>E$

则称变量β为无穷大量，记作$\lim\beta=\infty$。

无穷大量与有界变量之和仍为无穷大量。

3．无穷小量与无穷大量的关系：（1）若α是无穷大量，则$\frac{1}{\alpha}$是无穷小量；（2）若$\alpha(\alpha\neq0)$是无穷小量，则$\frac{1}{\alpha}$是无穷大量。

4．无穷小量的比较 设$\lim\alpha=0$ $\lim\beta=0$

$$\text{若}\lim\frac{\alpha}{\beta}\begin{cases} C\ (C\neq0) & \text{称}\alpha\text{与}\beta\text{为同阶无穷小量。}\\ 1 & \text{称}\alpha\text{与}\beta\text{为等价无穷小量，记作}\alpha\sim\beta\text{。}\\ 0 & \text{称}\alpha\text{是比}\beta\text{较高阶的无穷小量。}\\ \infty & \text{称}\alpha\text{是比}\beta\text{较低阶的无穷小量。}\end{cases}$$

等价无穷小具有性质：若$f(x)\sim f_1(x)$，$g(x)\sim g_1(x)$，则

$\lim f(x)g(x)=\lim f_1(x)g_1(x)$，$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$。

常用的等价无穷小有：$\sin x\sim x$，$\mathrm{tg}x\sim x$ （$x\to0$时）。

四、极限的求法

1．利用极限的四则运算法则 若$\lim f(x)$、$\lim f(x)$都存在，则

$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$ $\lim Cf(x)=C\lim f(x)$ （C为常数）

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$ $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ （$\lim g(x)\neq0$）

2．利用初等函数在定义域上的连续性 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

3．罗比塔法则：（1）$\frac{0}{0}$型，$\frac{\infty}{\infty}$型不定式求极限，可直接使用罗比塔法则：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$（或$\infty$），$f(x)$和$g(x)$在$x_0$的某邻域内（$x_0$可以除外）可导且$g'(x)\neq0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$），则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$）。

上述极限过程改为$x\to\infty$依然适用。

（2）对于$0\cdot\infty$型、$\infty-\infty$型的不定式，化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型。

（3）对于0^0，∞^0、1^∞型不定式，利用恒等式$e^{\ln N}=N$变形为

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

这里$g(x)\cdot\ln f(x)$为$0\cdot\infty$型的不定式，如果$\lim[g(x)\ln f(x)]$存在，则由指数函数的连续性，得 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim[g(x)\ln f(x)]}$

4．利用恒等变形消去极限为零的因子或无穷大量因子

通过分子、分母因式分解，约简分式或有理化等恒等变形消去极限为零的因子或无穷大量因子，然后再用极限的运算法则求极限。

5．无穷小量分出法 例如$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2}=\dfrac{1}{2}$。

6．利用无穷小量的性质 例如无穷小量与有界变量乘积仍是无穷小；无穷小与无穷大的倒数关系，等价无穷小的代换等。

7．两个重要极限：（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$，

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，$\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$。

8．变量代换法

9．讨论分段函数在分段点的极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

（三）连　　续

一、函数在一点连续的定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，自变量x在x_0处有改变量$\triangle x$（即x从x_0变到$x_0+\triangle x$），函数相应的改变量为$\triangle y=f(x_0+\triangle x)-f(x_0)$。如果$\lim\limits_{\Delta x\to0}\triangle y=0$则称函数$y=f(x)$在$x_0$处连续。

函数$y=f(x)$在x_0处连续的另一等价定义是：如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$则称$f(x)$在$x_0$处连续。

由函数在一点连续的定义可见，函数$y=f(x)$在x_0处连续，必须满足：（1）$f(x)$在x_0处有定义，即$f(x_0)$存在；（2）$f(x)$在x_0处存在极限，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数$f(x)$在x_0处间断，x_0称为$f(x)$的间断点。

若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x_0$处左连续；若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处右连续。

$f(x)$在点x_0连续$\Longleftrightarrow f(x)$在点x_0既左连续，又右连续，即$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$。

二、函数在区间上的连续性

如果$f(x)$在区间I上的每一点都连续（若该区间包含端点，则需在左端点右连续，在右端点左连续），则称$f(x)$在I上连续。

三、一切初等函数在其定义域上连续。

四、闭区间上连续函数的性质

1. 如果$y=f(x)$在$[a, b]$上连续，则$f(x)$在$[a, b]$上有最大值和最小值。

2. 如果$y=f(x)$在$[a, b]$上连续，$f(a)\neq f(b)$，则不论C是$f(a)$与$f(b)$之间一个怎样的数，至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得$f(\xi)=C$。

特别，若$f(a)$与$f(b)$异号，则至少存在一点$\xi\in(a, b)$，使得$f(\xi)=0$。

3. 如果$y=f(x)$在$[a, b]$上连续，m、M分别是$f(x)$在$[a, b]$上的最小值与最大值，C是m与M之间任意数（$m\leqslant C\leqslant M$），则至少存在一点$\xi\in[a, b]$，使得$f(\xi)=C$.

第二部分　一元函数微分学

（一）导　　数

一、导数的概念

1. 导数的定义　设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，当自变量在点x_0取得改变量Δx（$\Delta x\neq 0$）时，函数相应的改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数$f(x)$在点x_0处的导数，记作$f'(x_0)$，或$y'\Big|_{x=x_0}$，或$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$。这时称$f(x)$在$x_0$处可导。

如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$不存在，称$f(x)$在点$x_0$处不可导。

极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$称为函数$y=f(x)$在$x_0$的左导数；极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$称为函数$y=f(x)$在$x_0$的右导数。函数$y=f(x)$在$x_0$可导的充要条件是左、右导数都存在而且相等。

若函数$y=f(x)$在区间I上每一点都可导（当区间包含端点时，则需在左端点存在右导数，在右端点存在左导数），则称$f'(x)$为函数$f(x)$在区间I上的导函数，简称导数。导函数也可用y'或$\dfrac{dy}{dx}$表示。

2. 可导与连续的关系　函数$y=f(x)$在x_0连续是$f(x)$在x_0可导的必要条件。即如果$f(x)$在x_0处可导，则$f(x)$在x_0处必连续；而$f(x)$在x_0处连续，却不一定在x_0可导。

3. 导数的几何意义　函数$y=f(x)$在点$x=x_0$处的导数$f'(x_0)$就是曲线$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率。

4. 导数的经济意义　一些基本经济函数的导数就是它的边际函数（或称为函数的变化率）。

边际成本　设产品的总成本C是产量q的函数$C=C(q)$，则总成本C对产量q的变化率$C'(q)$叫做边际成本，它反映了总成本C在产量为q时的变化情况，近似地表示在产量为q个单位的基础上，再多生产1个单位的产品，成本变化情况。

边际收入　设产品的总收入R是销售量q的函数$R=R(q)$，则总收入R关于销售量q的变化率$R'(q)$叫做边际收入，它反映了总收入R在销售量为q时的变化情况。

边际利润 设产品的利润L是产量q的函数$L=L(q)$，则利润L关于产量q的变化率$L'(q)$叫做边际利润。它反映了利润L在产量为q时的变化情况。

类似可理解边际需求、边际供应等。

5．函数的弹性 设函数$y=f(x)$在x处可导，则$\eta(x)=x\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}$叫做f(x)在点x处的弹性。

需求量对价格的弹性 若需求量Q关于价格p的需求函数$Q=Q(p)$，则

$$\eta(p)=p\cdot\frac{Q'(p)}{Q(p)}$$

叫做需求量对价格的弹性，其经济意义是：在价格为p时，价格每变动1%，需求量变化的百分数。类似可理解成本对产量的弹性等。

二、求导数的方法

1．利用定义求导 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。

求分段函数在分段点的导数要用定义来求。

2．求导数的基本公式

(1) $(C)'=0$ (C为常数)

(2) $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ 特别 $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$； $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$ $(a>0, a\neq1)$ 特别 $(e^x)'=e^x$

(4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$ $(a>0, a\neq1)$ 特别 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

(5) $(\sin x)'=\cos x$；$(\cos x)'=-\sin x$；

$(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2x}=\sec^2x$；$(\mathrm{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2x}=-\csc^2x$；

$(\sec x)'=\sec x\cdot\mathrm{tg}x$；$(\csc x)'=-\csc x\cdot\mathrm{ctg}x$。

(6) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

$(\mathrm{arc\,tg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；$(\mathrm{arc\,ctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$。

3．求导的基本法则 设u(x)、v(x)均可导，则 (1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$
(2) $(Cu)'=Cu'$ (C为常数) (3) $(uv)=u'v+uv'$

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $v\neq0$

4．复合函数求导法则 设函数$y=f(u)$及$u=\phi(x)$均可导，则

$[f(\varphi(x))]'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$。简记为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$。

即复合函数的导数等于函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数，

5．反函数的求导法则 反函数的导数等于原来函数导数的倒数，

即 $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$ $(x'_y\neq0)$

或 $$x_y=\frac{1}{y'_x}\quad(y'_x\neq 0)$$

6．隐函数的导数　若函数$y=f(x)$由方程$F(x,y)=0$确定，则$f'(x)$可由方程

$$\frac{d}{dx}F(x,f(x))=0$$

确定。即将方程$F(x,y)=0$中的y看成x的函数，两边对x求导，再解出y'。

也可直接使用公式计算：$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\qquad(F'_y\neq 0)$$

7．对数求导法　先取对数，再求导数的方法，称为对数求导法。

(1)当函数是若干个因式通过乘、除、乘方、开方构成时，用对数求导法计算它的导数较为简便。

(2)幂指函数$y=u(x)^{v(x)}$(其中$u(x)>0$)的导数也用对数求导法计算。

8．高阶导数　函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$的导数$[f'(x)]'$，称为函数$y=f(x)$的二阶导数，记作$f''(x)$，或y''，或$\frac{d^2y}{dx^2}$。

一般，函数$y=f(x)$的$(n-1)$阶导数$f^{(n-1)}(x)$的导数，称为$f(x)$的n阶导数，记作$f^{(n)}(x)$，或$y^{(n)}$，或$\frac{d^ny}{dx^n}$。

二阶和二阶以上的导数，统称高阶导数。

(二)微　　分

一、微分的概念

1．微分的定义　对于函数$y=f(x)$，如果当自变量在x处有改变量$\triangle x$时，相应函数的改变量$\triangle y$可表示为　$\triangle y=A\cdot\triangle x+\alpha\cdot\triangle x$

其中A是与$\triangle x$无关的常数，α当$\triangle x\to 0$时是无穷小量，则称函数$f(x)$在x处可微，$A\cdot\triangle x$称为$f(x)$在x处的微分，记作dy或$df(x)$。即　$dy=A\cdot\triangle x$

函数的微分dy是函数改变量$\triangle y$的线性主要部分。　特别，$dx=\triangle x$。

2．可微与可导的关系　对一元函数来说，可微与可导是等价的。若函数$y=f(x)$在x处可微，则$y=f(x)$在x处可导；反之，若函数$y=f(x)$在x处可导，则$f(x)$在x处可微。且

$$dy=f'(x)dx$$

导数$f'(x)$反映的是函数在点x处变化的快慢程度，而微分$dy=f'(x)dx$则反映函数在x处自变量有一微小改变量$\triangle x$时，函数改变量$\triangle y$的近似值。

二、微分法则和基本公式

1．微分基本公式　微分基本公式与导数基本公式形式不同，实质是一样的。由

$\frac{dy}{dx}=f'(x)$即得$dy=f'(x)dx$。

(1)　$d(C)=0$　(C为常数)　　(2)　$d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$

特别　$d(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x^2}dx$，$d(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

(3) $d(a^x)=a^x\ln a\,dx$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 特别 $d(e^x)=e^x dx$

(4) $d(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e\,dx$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 特别 $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

(5) $d(\sin x)=\cos x\,dx$; $d(\cos x)=-\sin x\,dx$; $d(\operatorname{tg}x)=\frac{1}{\cos^2 x}dx=\sec^2 x\,dx$;

$d(\operatorname{ctg}x)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\csc^2 x\,dx$; $d(\sec x)=\sec x\operatorname{tg}x\,dx$;

$d(\csc x)=-\csc x\operatorname{ctg}x\,dx$。

(6) $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

$d(\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{1}{1+x^2}dx$; $d(\operatorname{arc\,ctg}x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$。

2．微分运算法则

(1) $d(u\pm v)=du\pm dv$ (2) $d(cu)=cdu$ (C为常数)

(3) $d(uv)=vdu+udv$ (4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$ $(v\neq 0)$

3．微分形式的不变性 无论u是中间变量还是自变量，函数$y=f(u)$的微分形式总是

$$dy=f'(u)du$$

三、微分的应用

1．微分在近似计算中的应用 设$y=f(x)$在x_0处可微，且$f'(x_0)\neq 0$，则当$|\triangle x|$很小时，有

(1)求函数改变量的近似公式 $\triangle y\approx dy=f'(x_0)\triangle x$

(2)求函数值的近似公式 $f(x_0+\triangle x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\triangle x$

当$|x|$很小时，常用的近似公式有

$(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$ （α实数） 特别$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$

$\sin x\approx x$ $\operatorname{tg}x\approx x$ $e^x\approx 1+x$ $\ln(1+x)\approx x$

2，微分在误差估计中的应用 对于函数$y=f(x)$，设x为自变量的近似值，$\triangle x$表示x与实际值的误差，$\triangle y$表示由x确定的函数近似值$f(x)$与函数实际值之间的误差，称$|\triangle x|$为自变量的绝对误差，称$|\triangle y|$为函数的绝对误差，并称$\left|\frac{\triangle x}{x}\right|$为自变量的相对误差，称$\left|\frac{\triangle y}{y}\right|$为函数的相对误差。

当$\triangle y$不易计算时，若$f'(x)\neq 0$且$|\triangle x|$很小，可用$|dy|$、$\left|\frac{dy}{y}\right|$分别来近似代替函数的绝对误差和相对误差 $|\triangle y|\approx|dy|$ $\left|\frac{\triangle y}{y}\right|\approx\left|\frac{dy}{y}\right|$

（三）中 值 定 理

一、罗尔定理

条件：$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续；$f'(x)$在开区间(a,b)内存在；$f(a)=f(b)$。

结论：在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$f'(\xi)=0$$

二、拉格朗日定理

条件：$f(x)$在闭区间〔a, b〕上连续；$f'(x)$在开区间（a, b）内存在。

结论：在（a, b）内至少存在一点ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{(fb)-f(a)}{b-a}$$

$$\text{或}\qquad f(b)f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

拉格朗日公式的另一形式　$f(b)-f(a)=f'\left[a+\theta(b-a)\right](b-a)\qquad(0<\theta<1)$

拉格朗日定理的两个重要推论：1．若对区间I上每一x，都有$f'(x)=0$，则函数$f(x)$在I上是一个常数；2．若对区间I上每一x，都有$f'(x)=g'(x)$，则在I上$f(x)$与$g(x)$至多只相差一个常数，即$f(x)=g(x)+C$，其中C是常数。

•三、柯西定理

条件：$f(x)$，$g(x)$在闭区间〔a, b〕上连续；$f'(x)$，$g'(x)$在开区间（a, b）内存在，且$g'(x)\neq 0$。

结论：在（a, b）内至少存在一点ξ，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

四、几点说明

1．三个定理的关系

$$\boxed{\text{罗尔定理}}\ \underset{f(a)=f(b)\text{的特殊情形}}{\overset{\text{推　广}}{\rightleftarrows}}\ \boxed{\text{拉格朗日定理}}\ \underset{g(x)=x\text{的特殊情形}}{\overset{\text{推　广}}{\rightleftarrows}}\ \boxed{\text{柯西定理}}$$

2．三个定理都是定性的。它们只肯定ξ的存在，既没有说明只有一个ξ，也没有说明ξ的具体位置。

3．三个定理的条件是重要的，只要有一个不满足，定理的结论就可能不成立。但定理的条件又只是充分条件，并不必要。

〈四〉导　数　的　应　用

一、导数几何意义的应用

设函数$y=f(x)$在x_0处可导，则过曲线$y=f(x)$上点$(x_0, f(x_0))$的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

若$y=f(x)$在x_0处导数为∞，则过曲线$y=f(x)$上点（x_0，$f(x_0)$）的切线方程为$x=x_0$。

二、导数作为函数变化率的应用

1．一些经济函数的边际函数　见第7页导数的经济意义；

2．函数的弹性　见第8页

三、函数的增减性

利用导数判别函数增减性的方法和步骤：1．先求出定义域中导数为零的点和导数不存在的点；2．用上述点将函数的定义域分成若干个小区间，在每一个小区间上，若导数大于零，则函数在该区间上单调增加；若导数小于零，则函数在该区间上单调减少。

四、函数的极值

1．极值概念　　设函数$y=f(x)$在x_0的某一邻域U内有定义，若对U内任意的X

$(x \neq x_0)$，都有$f(x) < f(x_0)$，则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的极大值，x_0为极大值点。若对U内任意的$x(x \neq x_0)$，都有$f(x) > f(x_0)$，则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的极小值，x_0为极小值点。极大值和极小值统称极值，极大值点和极小值点统称极值点。

2．极值的必要条件　设函数$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处$f(x)$取得极值，则$f'(x_0)=0$。

3．判别函数极值的方法和步骤：（1）先求出定义域中导数为零的点（称为驻点）及连续但导数不存在的点；（2）对于上述可能的极值点x_0，利用下面两个判别法中的一个进行判别（对导数不存在的点只能用判别法一）。

判别法一：如果$f'(x)$的符号在x_0左右邻近由正变负，则$f(x_0)$为$f(x)$的极大值；如果$f'(x)$的符号在x_0左右邻近由负变正，则$f(x_0)$为$f(x)$的极小值。

判别法二：若$f'(x_0)=0$，而$f''(x_0) \neq 0$，则当$f''(x_0) > 0$时，$f(x_0)$为$f(x)$的极小值；当$f''(x_0) < 0$时，$f(x_0)$为$f(x)$的极大值。

五、函数的最大值和最小值

1．函数的极值只是函数在极值点附近(某个邻域)函数值的最大值或最小值，是一个局部性概念。函数的最大值与最小值则是函数在所考察的整个区间上所有函数值的最大值与最小值，是一个全局性、整体性概念。最大值与最小值统称最值。

2．函数的最大值与最小值不一定存在，但闭区间上的连续函数必有最大值与最小值。

闭区间〔a，b〕上连续函数的最大值与最小值的求法：只需把(a，b)内一切可能的极值点(驻点和导数不存在的点)的函数值与端点的函数值比较，最大者就是最大值，最小者就是最小值。

3．对于求最值的应用问题，首先应弄清题意，建立适当的函数关系式$y=f(x)$，然后求极值；如果连续函数$f(x)$在区间I内只有唯一的极值，则这个极值就是$f(x)$在I上的最值，至于是最大值还是最小值由这个极值是极大值还是极小值确定。

六、曲线的凹向和拐点　用二阶导数确定曲线凹向与拐点的方法和步骤：

1．求出定义域内$f''(x)=0$的点和$f''(x)$不存在的点。

2．用上述点将函数的定义域分成若干小区间。在每一个小区间上，若$f''(x)>0$，则曲线$y=f(x)$在该区间内是凹的(电大教材称为上凹)；若$f''(x)<0$，则曲线在该区间内是凸的（电大教材称为下凹)；若在x_0的左右邻近$f''(x)$变号，则$(x_0, f(x_0))$是曲线的拐点　若在x_0的左右邻近$f''(x)$没有变号，则$(x_0, f(x_0))$不是曲线的拐点。

七、用微分法描绘函数图形

1．确定函数$y=f(x)$的定义域。

2．研究函数的奇偶性，以确定曲线的对称性。

3．确定曲线与坐标轴的交点(不易确定时不必强求)。

4．求出$f'(x)$和$f''(x)$，以及定义域内$f'(x)=0$及$f''(x)=0$的点，用这些点和定义域内$f'(x)$、$f''(x)$不存在的点将定义域分成若干小区间，用$f'(x)$和$f''(x)$的符号确定函数的极值，曲线的升降，凹向和拐点。

5．如果曲线有渐近线，则求出渐近线：

若$x=x_0$是函数$f(x)$的间断点，且$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=\infty$，则直线$x=x_0$是曲线的垂直渐近线。若函数的定义域为无穷区间，且$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=b$或

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$，则直线$y=b$是曲线向左方或向右方延伸的水平渐近线。

△若函数$f(x)$的定义域为无穷区间，且 $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ (\text{或}x\to+\infty)}} \dfrac{f(x)}{x}=a$

$\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ (\text{或}x\to+\infty)}} [f(x)-ax]=b$，则直线$y=ax+b$是曲线向左方（或向右方）延伸的斜渐近线。水平渐近线是斜渐近线$a=0$的特殊情形。

6．描点作图，作图时可根据需要再适当补充一些必要的点。

第三部分　一元函数积分学

（一）不　定　积　分

一、原函数与不定积分概念

1．若在区间I上，$F'(x)=f(x)$，则$F(x)$叫做$f(x)$的一个原函数。

2．并不是所有函数都有原函数。区间I上连续的函数在I上必定存在原函数。初等函数在其定义域上连续，故初等函数在其定义域上必定有原函数。

3．若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(x)+C$也是$f(x)$的原函数，其中C为任意常数，所以，$f(x)$有无穷多个原函数，它们都可表为$F(x)+C$的形式。$f(x)$的所有原函数全体叫做$f(x)$的不定积分，记作 $\int f(x)dx=F(x)+C$　（C为任意常数）

二、不定积分的性质

1．积分运算是微分运算的逆运算

$$\left[\int f(x)dx\right]'=f(x) \qquad \text{或} \; d\int f(x)dx=f(x)dx$$

$$\int f'(x)dx=f(x)+C \qquad \text{或} \int df(x)=f(x)+C$$

2．不定积分的线性性质

(1) $\int [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\cdots+\int f_n(x)dx$

(2) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$　　（$k\neq0$的常数）

三、基本积分公式

1．$\int 0dx=C$；$\int dx=x+C$　　2．$\int x^{\alpha}dx=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\;(\alpha\neq-1)$

特别 $\int \dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}+C$；$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$

3．$\int \dfrac{1}{x}dx=\ln|x|+C$　　4．$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$　（$a>0$，$a\neq1$）

特别 $\int e^x dx=e^x+C$　5．$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$；$\int \cos x\,dx=\sin x+C$