普通高等教育"十一五"国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

数学分析

（第一册）

伍胜健　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

北京大学数学教学系列丛书

数学分析

(第 一 册)

伍胜健 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析·第一册/伍胜健编著. —北京：北京大学出版社，2009. 8

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 978-7-301-15685-8

Ⅰ. 数… Ⅱ. 伍… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O.17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 145617 号

书　　名：数学分析(第一册)

著名责任者：伍胜健　编著

责 任 编 辑：刘　勇

标 准 书 号：ISBN 978-7-301-15685-8/O·0787

出 版 发 行：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　址：http://www.pup.cn　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn

电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021

出版部 62754962

印　刷　者：北京大学印刷厂

经　销　者：新华书店

890 毫米×1240 毫米　A5 开本　9.625 印张　255 千字

2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷

印　　数：0001-4000 册

定　　价：18.00 元

内 容 简 介

本书是综合性大学和高等师范院校数学系本科生数学分析课程的教材. 全书共分三册. 第一册共六章, 内容为函数、序列的极限、函数的极限与连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分; 第二册共六章, 内容为定积分、广义积分、数项级数、函数序列与函数项级数、幂级数、傅里叶级数; 第三册共五章, 内容为 n 维欧氏空间与多元函数的极限和连续、多元函数微分学、重积分与广义重积分、曲线积分与曲面积分及场论、含参变量的积分。本书每章配有适量习题, 书末附有习题答案或提示, 供读者参考.

作者多年来在北京大学为本科生讲授数学分析课程, 按照教学大纲, 精心选取教学内容并对课程体系优化整合, 经过几届学生的教学实践, 收到了良好的教学效果. 本书注重基础知识的讲述和基本能力的训练, 按照认知规律, 以几何直观、物理背景作为引入数学概念的切入点, 对内容讲解简明、透彻, 做到重点突出、难点分散, 便于学生理解与掌握.

本书可作为高等院校数学院系、应用数学系本科生的教材, 对青年教师本书也是一部很好的教学参考书. 为了帮助读者学习, 本书配有学习辅导书《数学分析解题指南》(材源渠、方企勤编. 书号: ISBN 978-7-301-06550-1; 定价 24.00 元)供读者参考.

作 者 简 介

伍胜健 北京大学数学科学学院教授、博士生导师. 1992 年在中国科学院数学研究所获博士学位. 主要研究方向是复分析. 在北京大学长期讲授数学分析、复变函数、复分析等课程.

序　言

自 1995 年以来, 在姜伯驹院士的主持下, 北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际, 创造性地贯彻教育部“加强基础, 淡化专业, 因材施教, 分流培养”的办学方针, 全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势, 在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新, 以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革, 取得了显著的成效. 2001 年, 北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖, 在国内外产生很大反响.

在本科教育改革方面, 我们按照加强基础、淡化专业的要求, 对教学各主要环节进行了调整, 使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上, 接受学时充分、强度足够的严格训练; 在对学生分流培养阶段, 我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则, 大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容, 为新的培养方向、实践性教学环节, 以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间. 这样既使学生打下宽广、坚实的基础, 又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向. 与上述改革相适应, 积极而慎重地进行教学计划的修订, 适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时, 并增加了数学模型和计算机的相关课程, 使学生有更大的选课余地.

在研究生教育中, 在注重专题课程的同时, 我们制定了 30

多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门),重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解.

教材建设是教学成果的一个重要体现. 与修订的教学计划相配合,我们进行了有组织的教材建设. 计划自 1999 年起用 8 年的时间修订、编写和出版 40 余种教材. 这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》. 这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果;反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我们新时期的数学教学水平.

经过 20 世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识. 同时也促使数学研究的方式发生巨大变化. 作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识. 数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础. 数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革. 我们现在的改革还是初步的. 教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新. 我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习. 让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力.

张继平
2002 年 5 月 18 日
于北京大学蓝旗营

前　言

数学分析是高等院校数学院系本科生最重要的基础课之一，其重要性是不言而喻的. 它也是大学生学习许多后续课程，进入数学领域学习和工作的重要基础. 由于现在高等院校数学院系的专业构成与以前相比大不相同，教育部为此根据高等教育的发展趋势提出了"加强基础、淡化专业、因材施教、分流培养"的办学方针，因此，为满足教学和课程内容改革的需要，出版一套适合当前数学院系各专业学生学习的数学分析教材是必要的.

本套教材正是为此目的而编写的. 本书按照数学分析教学大纲精选内容，并结合作者的教学体会进行了优化整合. 具体地说，在以下几个方面作了尝试：

1. 强调基础内容，加强基础训练. 作者试图对广大学生今后常用的重要基础知识讲深、讲透. 为此加强了极限、收敛、一致收敛、连续与一致连续等概念与相关定理的重点讲述. 强调了用肯定语气来叙述一些否命题，在例题和习题选取上关注这些重要概念和定理的内在联系，这样做对学生掌握概念和理论的准确性有很大帮助，从而对相关理论有更深刻的理解与掌握.

2. 在要求学生掌握数学理论的同时，作者试图强调数学研究方法的重要性. 在引导学生提出问题、分析问题等方面，有很多尝试：如定积分的引入过程，多项式逼近连续函数等方面. 另外在例子的选取方面作者也花费了不少的精力，如在多元函数微分学的学习中，初学者总是觉得举反例是一件困难的事情，我们在例子中引入函数的极坐标表示，就使得读者可以举出许多有趣的反例. 希望读者可以发现此书有一些它的独到之处.

3. 在加强基础概念与理论的同时, 对一些烦琐的计算则只要求学生掌握基本方法, 而不过分强调各种特别技巧的掌握. 数学分析作为大学低年级学生的基础课, 希望学生在系统掌握整个数学分析的理论上集中精力, 为以后的学习打好坚实的基础, 因此本书没有特意去强调一些数学分析在其他学科的应用.

4. 本书对实数理论做了必要的简介: 给出了戴特金分割的定义和戴特金定理的精确形式, 由此可以证明实数域的完备性定理. 尽管对实数理论没有过多地展开, 我们认为这样做不会影响数学分析整个理论的完整性. 本书还在同学能理解的前提下适当地引入了一些课外内容: 如在函数复合与反函数方面简单介绍了分式线性函数; 在定积分的变量替换的例子中引入双曲度量有关的内容等. 这样做主要是考虑到可以引导一些学习有余力的同学有目的地阅读一些课外内容; 另一方面也不会增加大部分同学的学习负担.

本套教材被列入《北京大学数学教学系列丛书》并一直得到北京大学数学科学学院领导的大力支持, 对此作者表示感谢. 本套教材在北京大学数学学院曾由李伟固、王冠香、杨家忠等教授以及本人试讲了多年, 供几届学生使用, 教学效果很好. 在试用过程中, 他们对本书提出不少改进意见, 为此作者向他们致以衷心的感谢. 在本书的编写过程中, 沈良、符自详、黄华鹰、黄炎等同志做了许多技术性工作; 北京大学出版社的编辑刘勇、曾琬婷同志为本书的出版付出了辛勤的劳动, 在此作者向他 (她) 们一并表示深切的感谢.

最后值得指出的是, 作者虽然力图使本教材尽可能地离原定目标近一些, 但由于水平有限, 书中错误与不足之处肯定难免, 恳请广大读者提出宝贵意见.

作　者

2009 年 5 月于北京大学

目　录

第一章　函　　数

数学分析主要由微积分和级数理论组成, 它所研究的主要对象是实函数, 即以实数为自变量并且在实数中取值的函数. 因此, 在本章中我们首先简要地介绍一下实数系的连续性, 然后介绍函数的概念和有关的基本知识.

§1.1　实　　数

在近几个世纪中科学技术之所以取得了辉煌的成就, 在很大程度上是因为数学研究取得了重大进展, 其中微积分的创立是现代数学的里程碑. 微积分在物理、天文、技术、化学、生物等的研究中显示了强大的威力, 解决了许多过去认为高不可攀的困难问题, 促进了科学技术的发展. 然而, 由于在创建初期微积分是以几何直观和物理直觉为依据而进行演绎推理的, 因此就形成了方法上有效但逻辑上不能自圆其说的矛盾局面. 为了解决微积分在理论上面临的问题, 许多著名数学家都投身于微积分理论基础的研究. 人们后来发现, 微积分的主要理论基础是严格的极限理论. 到了 19 世纪初, 柯西 (Cauchy) 以极限理论为微积分奠定了理论基础. 但是柯西构筑的理论大厦起初并不完善, 这是因为柯西并没有对实数给出严格的定义. 而后来人们又发现, 极限理论的某些基本原理依赖于实数系的连续性. 为此, 本节简要地介绍一下这方面的内容.

1.1.1　数集

在介绍实数理论前, 我们简要地介绍一下集合的概念.

在数学中, 所谓**集合**是将具有某种特性的对象的全体放在一起作为一个整体, 通常用大写字母 A, B, C, X, Y 等记之. 这些对象称为集

合中的**元素**, 通常用小写字母 a, b, c, x, y 等记之. 若 a 是 A 中的元素, 则记为 $a \in A$, 并读做 a 属于 A. 如果 a 不是 A 中的元素, 则记为 $a \notin A$, 并读做 a 不属于 A. 集合的概念是最基本的概念, 它不能用别的概念来加以定义.

集合通常有列举法和描述法两种表示法. 列举法是将集合中的元素全部列出, 如: $A = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$; 而描述法是将集合的特性精确给出, 如: $B = \{x : x\text{是 } x^2 - 1 = 0\text{的根}\}$; $E = \{x : x\text{是正有理数}\}$. 一般来说, 在数学分析中我们主要研究由数构成的集合, 并且很少研究由有限个元素构成的集合, 大部分集合是由无穷多个元素组成 (这种集合简称为无穷集合), 因此这些集合必须用描述法表示.

若集合 A 中的每一个元素 x 都属于集合 B, 则称 B **包含** A, 记为 $A \subseteq B$, 此时也称 A 是 B 的**子集**. 如果 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 同时成立, 则认为 A, B 是同一个集合, 此时也记为 $A = B$. 如上面的集合 $B = \{x : x\text{是 } x^2 - 1 = 0\text{的根}\}$ 与 $C = \{1, -1\}$ 是相等的.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记为 $A \subset B$. 特别地, 我们引入空集 $\varnothing$; 即 $\varnothing$ 中不含有任何元素. 因此 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

集合有如下的运算: 给定集合 A, B, 有

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**并**;

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为 A 与 B 的**交**;

$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差**.

读者容易将集合的并与交推广到多个集合的情形.

为了数学论述简便, 习惯上常将逻辑推理中一些常用的词用符号表示. 现将本书常用的两个数学记号 $\forall$ 和 $\exists$ 说明如下:

$\forall$　代表"任意一个";

$\exists$　代表"存在".

利用上述记号可以使得我们以后在行文上非常方便. 例如, 我们可以将 $A \subset B$ 的定义叙述为: $\forall x \in A$, 有 $x \in B$.

1.1.2 实数系的连续性

人类所认识的第一个数系就是自然数系, 它的定义为 $\{0,1,2,\cdots\}$. 虽然自然数对于计数来说是够用了, 但是自然数系并不是一个完善的数系. 首先作为量的描述手段, 它只能表示一个单位量的整数倍, 而无法去表示此单位量的部分. 此外, 作为量的运算手段, 它只能自由地进行加、乘运算, 而不能自由地进行加、乘运算的逆运算. 自然数的这种离散性和运算的不完备性, 促使人们去对它进行扩充. 人们首先引进了负数, 得到了整数系. 对整数系人们可以自由进行加、减运算. 人们为了得到可以自由地进行加、减、乘、除四则运算的数系, 对整数系中的任意两个数进行加、减、乘、除 (除数不为零) 得到的数的全体记为一个新的数系, 这就是随后得到的有理数系.

对于一个数集 K, 若 K 中至少有一个非零元素, 且 K 中任何两个元素的加、减、乘、除 (除数不为零) 运算后得到的数仍然属于 K, 即 K 关于四则运算封闭, 则称 K 为一个数域. 容易看出, 有理数集就是一个数域. 从代数上来讲, 有理数系已经是一个完美的数系, 它可以在任何精度要求下对一个量进行表示和实施有效的运算, 并且任何两个有理数之间必有有理数存在 (或说有理数有稠密性). 然而, 早在 2500 年前, 人们就发现有理数系也有缺陷. 例如, 若用 c 来表示一个边长为 1 的正方形的对角线的长度, 则 c 就无法用有理数表示. 所以, 有理数虽然在数轴上密密麻麻, 但并没有布满整个数轴, 留有许多“空隙”. 这说明还有新的数存在, 但它没有被严格地定义. 由于有理数系已经对四则运算封闭, 因此我们必须用不同于以前的数系的扩充才有可能得到新的数. 我们前面曾经指出, 微积分的理论基础是极限论, 但在这种具有“空隙”的有理数系上实施极限运算, 就会极为不便. 因此, 正如四则运算需要一个封闭的数域一样, 极限运算也需要一个关于极限封闭的数域. 这就需要将有理数进行扩充, 使其能够填补有理数在数轴上留下的所有这些“空隙”. 于是, 这又归结到如何定义无理数的问题上了. 这一历史任务, 终于在 19 世纪后半叶, 由戴德金 (Dedekind) 和康

托尔 (Cantor) 等人完成. 以下我们简要地介绍一下戴德金关于实数的构造方法.

定义 1.1.1　设 S 是一个有大小顺序的非空数集, A 和 B 是它的两个子集, 如果它们满足以下条件:

(1) $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$;

(2) $A \cup B = S$;

(3) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, 都有 $a < b$;

(4) A 中无最大数,

则我们将 A, B 称为 S 的一个**分划**, 记为 $(A|B)$.

现在我们来考虑有理数系 $\mathbb{Q}$ 的分划. 对 $\mathbb{Q}$ 的任意分划 $(A|B)$, 必有以下两种情形之一发生:

(1) B 中存在最小数, 此时称 $(A|B)$ 是一个**有理分划**;

(2) B 中不存在最小数, 此时称 $(A|B)$ 是一个**无理分划**.

例 1.1.1　记

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0 \text{ 或 } x > 0 \text{ 且 } x^2 < 2\}, \qquad B = \mathbb{Q} \setminus A,$$

则 $(A|B)$ 是一个无理分划.

有理数系 $\mathbb{Q}$ 的所有分划构成了一个集合, 我们称这个集合为**实数系**, 并记为 $\mathbb{R}$. 显然, 有理数集与 $\mathbb{R}$ 中的有理分划是一一对应的. 因此 $\mathbb{R}$ 可以被认为是由有理数集加上无理分划所构成. 我们称 $\mathbb{R}$ 中的这些无理分划为**无理数**. 换句话说, $\mathbb{R}$ 是由全体有理数与无理数所构成的集合. 例如, 例 1.1.1 中的无理分划对应的就是大家熟知的无理数 $\sqrt{2}$. 我们可以在 $\mathbb{R}$ 上很自然地定义大小顺序关系及四则运算, 经过冗长但不是很困难的论证, 可以证明它是一个以有理数域为其子域的有序域.

前面我们已经指出有理数系有稠密性, 但没有连续性, 即有理数之间有许多“空隙”. 下面的戴德金分割定理告诉我们, 在有理数集合中加入无理数之后, 就没有“空隙”了, 也就是说实数系具有了连续性. 对于一个数集 A, 若对任意两个数 $a, b \in A$, a, b 之间的所有的数都在 A 中, 则称 A 是**连通的**. 换句话说, 实数集是一个连通的集合.