龙门品牌　学子至爱

新课标

龙门专题

高中数学思想方法

高中数学

学科主编　傅荣强

本册主编　于长军　朱　岩

优秀畅销书奖

龍門書局

www.Longmenbooks.com

新课标

高中数学思想方法

龙门专题

高中数学

学科主编：傅荣强

本册主编：于长军　朱　岩

编　　者：张书祥　张　硕　杨启发
　　　　　傅琳晶　高　峰　栗　瑛

龍門書局

北　京

举报电话:(010)64030229;(010)64034315;13501151303
邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门专题:新课标.高中数学.高中数学思想方法/傅荣强学科主编;于长军,朱　岩本册主编.—北京:龙门书局,2009

ISBN 978-7-5088-2144-3

Ⅰ.龙…　Ⅱ.①傅…②于…③朱…　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 140211 号

责任编辑:田　旭　马建丽　赵瑞云/封面设计:耕　者

龍　門　書　局出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社总发行　　各地书店经销

*

2009 年 8 月第　一　版　　开本:A5(890×1240)
2009 年 8 月第一次印刷　　印张:6 3/4
字数:240 000

定　价:13.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

策划者语

生命如歌

未名湖畔，博雅塔旁。

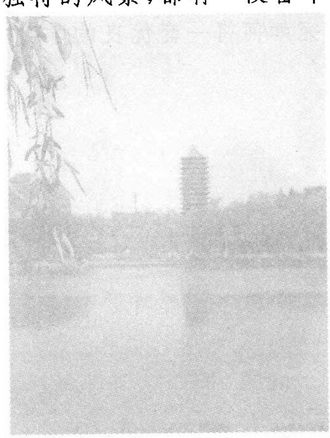
明媚的晨光穿透枝叶，懒散地泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋的是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静地坐着，那是求索知识的学子……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨也是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主，还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”梦想？

在来来往往带他们巡讲的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都有一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。



小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了”。她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大

年三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到39度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分684分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年6.4万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司MICROSOFT聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈地努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考上清华或北大吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化到图书中，让同学们在不知不觉中轻松、快速地获取高分。这就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。

《龙门专题》走向名校的阶梯！

总策划

2008年7月

《龙门专题》状元榜

赵永胜 2007年山西省文科状元

中国人民大学财政金融学院
星座：射手座
喜欢的运动：爬山 乒乓球
喜欢的书：伟人传记，如《毛泽东传》
人生格言：生命不息，奋斗不止
学习方法、技巧：兴趣第一，带着乐趣反复翻阅教科书，从最基本的知识入手，打牢"地基"，从基础知识中演绎难题，争取举一反三，融会贯通。合理安排时间，持之以恒，坚信"天道酬勤，勤能补拙"。

卢　毅 2006年浙江省理科状元

北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：跑步 滑板
喜欢的书：《卡尔维诺文集》
人生格言：做自己
学习方法、技巧：注重知识点的系统性，将每门学科的知识点作一个系统地梳理，无论是预习还是复习，这样便可在课上学习时有的放矢，课后复习时查漏补缺。坚持锻炼，劳逸结合。

武睿颖 2005年河北省文科状元

北京大学元培学院
星座：天秤座
喜欢的运动：游泳 网球
喜欢的书：*A Thousand Splendid Suns*
人生格言：赢得时间，赢得生命
学习方法、技巧：勤奋是中学学习的不二法门；同时要掌握良好的学习方法，如制定学习目标、计划，定期总结公式、解题思路等，这样能事半功倍。最后要培养良好的心态，平和积极地面对学习中的得失。

刘诗泽 2005年黑龙江省理科状元

北京大学元培学院
星座：金牛座
喜欢的运动：篮球 台球 排球
喜欢的书：《三国演义》
人生格言：战斗到最后一滴血
学习方法、技巧：多读书，多做题，多总结。看淡眼前成绩，注重长期积累。坚持锻炼，劳逸结合。

邱　汛 2005年四川省文科状元

北京大学
星座：处女座
喜欢的运动：篮球 乒乓球
喜欢的书：《哈利·波特》
人生格言：非淡泊无以明志，
非宁静无以致远
学习方法、技巧：1. 要保持一颗平常心来面对考试、繁重的学习任务和激烈的竞争。2. 学会从各种测验考试中总结经验、教训，而不要仅仅局限于分数。3. 学会计划每一天的学习任务，安排每一天的学习时间。4. 坚持锻炼，劳逸结合。

林　叶 2005年江苏省文科状元

北京大学
星座：水瓶座
喜欢的运动：跑步 台球 放风筝
喜欢的书：《黑眼睛》《笑面人》
人生格言：不经省察的生活不值得过
学习方法、技巧：学习分两类，一类和理想真正有关，另一类只是不得不过的门槛。不要总因为喜好就偏废其中的一个，它不仅是必须的，而且你也许会发现，它本来也值得你热爱和认真对待。你自己的学习方法别人永远无法替代，它也是你生活的一部分，完善它，就像完善你自己。

田　禾 2005年北京市理科状元

北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：羽毛球
喜欢的书：历史类书籍
人生格言：认真、坚持
学习方法、技巧：认真听讲，勤于思考，作阶段性总结，及时调整学习计划，坚持阅读课外书和新闻，一以贯之，学不偏废。

朱师达 2005年湖北省理科状元

北京大学元培学院
星座：水瓶座
喜欢的运动：足球 篮球 游泳
喜欢的书：《追风筝的人》《史记》
人生格言：有梦想就有可能，有希望
就不要放弃
学习方法、技巧：1. 知识系统化、结构化是掌握知识的有用技巧和重要体现。2. 知其然还要知其所以然，记忆才更牢固。3. 整体把握兴趣和强弱科的平衡。4. 正确认识自己的弱点，集中力量克服它。

编 委 会

Contents

目录

第一篇　数学思想

数学是人类社会发展进程中浑然天成的产物，是人类在长期的社会实践中提取的精华，每项成果都是经过了千锤百炼得来的. 时至今日，数学正式成为一切科学和技术的基础性学科，是人类思考问题、解决矛盾的有效工具，认识现实世界的数量关系和空间形式，就是她丰富的内涵.

学习数学要经历三个阶段. 首先是“备工具”，这里的工具是指定义、公理、定理、公式等一些硬性的结论；其次是“寻指南”，思想就是行动的指南，数学思想就是数学活动的指南针；最后是“集方法”，就是按规则探究数学问题. 工具、指南和方法的合成就是数学能力.

本册书以读者已备齐了“工具”为起点，分两篇来研讨数学思想与数学方法.

第一讲　分类讨论思想

分类是人们的日常行为.每个人每天都见到好多人,你见到的人中,有男人也有女人,这就是分类.这些人中,有青年人、中年人、老年人,这还是分类.到书店购书,书架上有购书引导牌"高一教辅""高二教辅""高三教辅";到菜市场买菜,摊位上边有"蔬菜类""肉类""水产品类"等标识……这些都是分类.

分类又是人类认识世界、改造世界的科学行为.把一个国家划分为省(市、自治区)来管理,抓工业、农业和科学技术等来促进国家的发展,这些都是分类.

分类形成了一种数学思想.在数学活动中,分类好比指南针,它能给我们指明方向.

本讲中,我们将以案例的形式来和大家一起探究需要一次分类、两次分类的相关问题,从中体悟分类讨论思想.

1.1 一次分类

基　础　篇

分类讨论思想概述

(1)分类讨论的标准

案例 1　下面是王数学先生家庭成员的自然情况,请给出这个家庭的 5 个分类.

王数学:男,75 岁,中共党员,初中毕业;

王数学的爱人:李物理,女,73 岁,中共党员,小学毕业;

王数学的儿子:王政治,男,48 岁,中共党员,大学毕业;

王数学的儿媳妇:赵化学,女,47 岁,中共党员,大学毕业;

王数学的孙子:王语文,男,16 岁,团员,高中在读.

分类要在确定的"标准"下施行,随着分类标准的不同,分类的结果也就有了一些差异.怎样理解分类讨论标准呢?

下面给出王数学先生家庭的 5 个分类.

分类 1:按性别分类,王数学先生家庭可分成如下两类:

男:王数学,王政治,王语文;

女:李物理,赵化学.

分类 2:按年龄段分类,王数学先生家庭可分成如下三类:

老年:王数学,李物理;

中年:王政治,赵化学;

青年:王语文.

分类 3:按政治面貌分类,王数学先生家庭可分成如下两类:

党员:王数学,李物理,王政治,赵化学;

团员:王语文.

分类 4: 按文化程度分类，王数学先生家庭可分成如下四类：

小学毕业：李物理；

初中毕业：王数学；

高中在读：王语文；

大学毕业：王政治，赵化学.

分类 5: 按姓氏分类，王数学先生家庭可分成如下三类：

王姓：王数学，王政治，王语文；

李姓：李物理；

赵姓：赵化学.

以上讨论中的“性别，年龄段，政治面貌，文化程度，姓氏”就是所谓的分类讨论标准.

案例 2　用 2，3，4 这 3 个数字可以组成多少个没有重复数字的三位偶数？

如图 1-1-1 所示，按三位数的个位上的数字分类.

合乎要求的三位数，个位上的数字必须是偶数.

图 1-1-1(1)中，个位上的数字是 2，三位数有 2 个，即 342，432.

图 1-1-1(2)中，个位上的数字是 4，三位数有 2 个，即 234，324.

由以上讨论可知，合乎要求的三位数共有 $2+2=4$(个).

3	4	2

4	3	2

(1)

2	3	4

3	2	4

(2)

图 1-1-1

在以上讨论中，我们是按三位数的个位上的数字来分类的. 其中，三位数的个位上的数字是否为偶数，这就是分类讨论标准.

分类讨论标准

一般地，在集合 A 上讨论某一数学问题时，可依据某个标准 P，把 A 划分为子类 A_1，A_2，…，A_n，这时，在 A_1，A_2，…，A_n 上实施对问题的讨论等价于在 A 上实施对问题的讨论，把 P 就称作分类讨论标准.

例如，对方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 及 $\Delta=b^2-4ac$ 来说，判断方程实根的情况，其分类讨论标准是 $\Delta>0$ 还是 $\Delta=0$ 还是 $\Delta<0$，这时，我们可以简单地说按 Δ 分类.

又如，鉴定函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$ 的单调性，其分类讨论标准是 $0<a<1$ 还是 $a>1$，可以理解为按 a 分类.

又如，计算 $\sin\frac{n\pi}{2}(n\in\mathbf{Z})$ 的值，其分类讨论标准可确定为 n 是奇数还是偶数，并可简单地认为按 n 分类.

(2)分类讨论的原则

学习数学，必须遵守规则，否则你就学不下去了.

为解决数学问题中的矛盾，分类旨在化大为小、化小为了，操作程序是各个击破.

一般地，在集合 A 上讨论某一数学问题有困难时，可按某一分类讨论标准 P 把 A 划分为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集，而后，分别在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 上讨论这个数学问题与在 A 上讨论这个数学问题相比较，其效果是一样的.

分类时，要遵循以下**三条原则**：

①$A_i\neq\varnothing,i=1,2,\cdots,n$；

②$A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j$，且 $i,j,=1,2,\cdots,n$；

③$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A$.

下面阐述一下这三条原则各自的作用.

如图 1-1-2，A 相当于全集，$A_i(i=1,2,\cdots,n)$都是按 P 实施划分后 A 的子集.

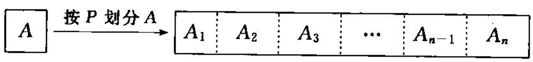


图 1-1-2

“①$A_i\neq\varnothing,i=1,2,\cdots,n$”可以保证问题不是在空集上讨论的，否则的话也就没有什么意义了；

“②$A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j$，且 $i,j=1,2,\cdots,n$”可以保证问题不会重复，也就是说，在 A_1 上讨论问题，肯定不含 $A_2,A_3,\cdots,A_n$ 中的元素；在 A_2 上讨论问题，肯定不含 $A_1,A_3,\cdots,A_n$ 中的元素……

“③$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A$”可以保证问题不会遗漏，也就是说，分别在 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 上讨论问题，其总和等于在 A 上讨论同一个问题.

例如，$\sqrt{x^2}=\begin{cases}x(x\geqslant0),\\-x(x<0)\end{cases}$就是在 $A=\mathbf{R}$ 上讨论的，得到结果的过程中，A 被划分为 $A_1=\{x|x\geqslant0\}$与 $A_2=\{x|x<0\}$两类，这个分类就满足：①$A_i\neq\varnothing,i=1,2$；②$A_1\cap A_2=\varnothing$；③$A_1\cup A_2=A$. 之所以人们承认这个结论，就是因为这个分类是清楚的.

又如，对直线 $x+ay+3=0$ 的相关讨论中，我们总是从直线没有斜率和直线的斜率存在这样的角度切入，即 $a=0$ 时，直线没有斜率，$a\neq0$ 时，直线的斜率为 $-\frac{1}{a}$，其中，对 $a=0$与 $a\neq0$ 的讨论，同样满足分类讨论的三条原则.

再如，像把空间两条直线划分为平行、相交、异面三种位置关系，在程序框图中设置判断框，三角函数中把角的终边落在坐标轴上与落在四个象限内区别对待，等等，这些分类都满足分类讨论的三条原则.

解题方法指导

运用分类讨论思想指导我们的数学行为，操作程序是划总体为若干个个体，把对总体的探究转至讨论各个个体，其原理是这两者的效果是一样的.

分类讨论思想的精髓就是它的三条原则，用其解析数学问题，其根本在确保解的不重不漏上. 三条原则中，第(1)条，是为了每一个集合都不空；第(2)条，是为了解的不重复；第(3)条，是为了解的不遗漏.

分类讨论的优势，体现在可以迅速地找出解决问题的切入点上，以解决开头难的问

题，使我们的数学探究活动有一个良好的开局.

要注意，分类讨论某个数学问题，必须在同一个标准下进行，切忌用两个或两个以上的标准对数学对象实施分类，这和我们平时的为人处事是一样的，对待他人和自己，无论从哪个角度来评价，不可采用多重标准，数学是蛮有人情味儿的.

以下我们从简单的问题起步，阶梯式地以例来感悟分类讨论思想，意在抛砖引玉.

[例 1]　设 $x,y\in\mathbf{R}$，对 $xy=0$ 给出一个分类.

解　我们知道，x、y 中至少有一个为 0 时，就可以使得 $xy=0$ 成立.

$xy=0$ 可以划分成以下三类：

第一类：$x=0,y\neq0$；

第二类：$x\neq0,y=0$；

第三类：$x=0,y=0$.

点评　本例中，$xy=0$，所以，x 与 y 中不可能没有 0，这样分类讨论标准就明确了，即 x 与 y 中有几个 0?

把我们的分类结果“$x=0,y\neq0$”“$x\neq0,y=0$”“$x=0,y=0$”与集合类比，它们都非空，任意两个的交都是空的，三者的并就是全集，即 $xy=0$. 这就说明了以上分类是符合分类讨论的三条原则的.

[例 2]　设集合 $A=\{a,b,c\}$，写出 A 的所有子集可按怎样的思路来操作?

解　$A=\{a,b,c\}$ 共有 3 个元素，写出 A 的所有子集，可按子集中含有的元素的个数来分类，即

第 1 类：不含有任何元素的子集；

第 2 类：含有 1 个元素的子集；

第 3 类：含有 2 个元素的子集；

第 4 类：含有 3 个元素的子集.

点评　从本例中我们要得到一个启示还要了解一个注意事项.

启示：解答中，我们确定的分类讨论标准是“按子集中含有的元素的个数来分类”，此举之后，解答就步入具体操作环节了. 一般地，一旦分类讨论标准确定了，它就意味着我们找到了解决问题的突破口或者说切入点，解题就从这里开始.

注意事项：把 A 的子集全部写出来，它们是 $\varnothing$；$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$；$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$；$\{a,b,c\}$. 在这个环节中，极易丢掉 $\varnothing$ 和 $\{a,b,c\}$ 两个解.

[例 3]　现有面值为 1 分、2 分、5 分的硬币各 1 枚，将这 3 枚硬币同时向桌面上抛掷，硬币落到桌面上时，每枚硬币都有正面向上或反面向上的可能. 在这 3 枚硬币落稳于桌面上之后，写出它们出现正面、反面的一切可能的结果.

解　以恰有 k 枚硬币出现正面向上为标准进行分类，其中 $k=0,1,2,3$.

记“面值为 l 分的硬币落稳于桌面上以后，出现正面向上”为 A_l，否则为 $\overline{A_l}$. 其中 $l=1,2,5$.

再记 3 枚硬币落稳于桌面上以后，恰有 k 枚硬币出现正面向上，其中 $k=0,1,2,3$.

当 $k=0$ 时，其结果是 $\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_5$.

当 $k=1$ 时，其结果是 $A_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_5$，$\overline{A}_1\ A_2\ \overline{A}_5$，$\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ A_5$.

当 $k=2$ 时，其结果是 $\overline{A}_1\ A_2\ A_5$，$A_1\ \overline{A}_2\ A_5$，$A_1\ A_2\ \overline{A}_5$.

当 $k=3$ 时，其结果是 $A_1\ A_2\ A_5$.

以上 8 个结果就是一切可能的结果.

点评 (1)本例中，$k=0,1,2,3$ 就是对 3 枚硬币一切可能的结果的分类，它满足"分类讨论的三条原则".

(2)分类讨论的标准的确定，与解题者的思维方式有关. 例如，本例中的分类讨论标准也可以以"反面向上"为标准.

(3)本例中，字母 A_1、A_2、A_5 的上方，有时有横线"—"，有时没有横线"—". 分类还可以这样理解，A_1、A_2、A_5 的上方，3 个都有"—"，恰有 2 个有"—"，恰有 1 个有"—"，都没有"—".

(4)继本例之后，读者自行练习一下"抛掷 2 枚硬币 1 次"、"抛掷 1 枚硬币 2 次"，应如何分类.

[例 4] 已知函数 $f(x)=2x^2-4tx+2t^2+4t(t\in\mathbf{R})$，$x\in[-1,5]$，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

解 因为 $f(x)=2(x-t)^2+4t$，$x\in[-1,5]$，

所以，抛物线的开口向上，且对称轴的方程为 $x=t$，区间 $[-1,5]$ 的中点 $c=\dfrac{-1+5}{2}=2$.

先求最大值：

$t<2$ 时，$[f(x)]_{\max}=f(5)=2t^2-16t+50$.

$t\geqslant 2$ 时，$[f(x)]_{\max}=f(-1)=2t^2+8t+2$.

综上，得

$$[f(x)]_{\max}=\begin{cases}2t^2-16t+50(t<2),\\2t^2+8t+2(t\geqslant 2).\end{cases}$$

再求最小值：

当 $t<-1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,5]$ 上为增函数，

所以 $$[f(x)]_{\min}=f(-1)=2t^2+8t+2.$$

当 $-1\leqslant t\leqslant 5$ 时，

$$[f(x)]_{\min}=f(t)=4t.$$

当 $t>5$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,5]$ 上为减函数，

$$[f(x)]_{\min}=f(5)=2t^2-16t+50.$$

综上，得

$$[f(x)]_{\min}=\begin{cases}2t^2+8t+2 & (t<-1),\\4t & (-1\leqslant t\leqslant 5),\\2t^2-16t+50 & (t>5).\end{cases}$$

点评　本例我们是按抛物线的对称轴所处的位置进行分类的，于其中要有两点收获.

(1)本例中，求二次函数的最大值，是以区间$[-1,5]$的中点2为界分成两类的；而求函数的最小值，是以区间$[-1,5]$的两个端点为界分成三类的.

(2)抛物线开口向下时，求闭区间上二次函数的最大(小)值的分类方法与抛物线开口向上时的情况相类似，求最小值要分成两类，求最大值要分成三类.

[例5]　求二次函数$f(x)=-x^2+2x,x\in[a,5a]$的值域.其中$a\neq0$.

解　抛物线的开口向下，对称轴的方程为$x=1$，区间$[a,5a]$的中点为$3a$.

因为$5a>a$，所以$a>0$.

如图1-1-3所示，以下分四类来讨论.

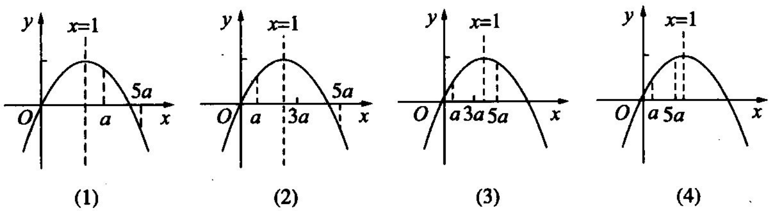


图1-1-3

(Ⅰ)由图(1)知，当$1<a$，即$a>1$时，值域为$[f(5a),f(a)]$，即

$$[-25a^2+10a,-a^2+2a].$$

(Ⅱ)由图(2)知，当$a\leqslant1<3a$，即$\frac{1}{3}<a\leqslant1$时，值域为$[f(5a),f(1)]$，即

$$[-25a^2+10a,1].$$

(Ⅲ)由图(3)知，当$3a\leqslant1\leqslant5a$，即$\frac{1}{5}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$时，值域为$[f(a),f(1)]$，即

$$[-a^2+2a,1].$$

(Ⅳ)由图(4)知，当$0<5a<1$，即$0<a<\frac{1}{5}$时，值域为$[f(a),f(5a)]$，即

$$[-a^2+2a,-25a^2+10a].$$

点评　从本例中要理顺清楚一件事并获得思维上的提升.

理顺清楚一件事：如果我们把本例改为求函数的最大值，那么其结果是$[f(x)]_{\max}=\begin{cases}f(5a),\left(0<a<\frac{1}{5}\right),\\ f(1),\ \left(\frac{1}{5}\leqslant a\leqslant1\right),\\ f(a),\ (a>1);\end{cases}$改为求函数的最小值，其结果是$[f(x)]_{\min}=\begin{cases}f(5a)\left(a>\frac{1}{3}\right),\\ f(a)\ \left(0<a\leqslant\frac{1}{3}\right).\end{cases}$

再结合本例的结果可知，求值域分四类，求最大值分三类，求最小值分两类.读者可自行总结一下抛物线的开口向上时的相应结论.

思维上的提升：分类，它是过程不是结果，是手段但不是目的.学习分类，精通的目的

在于应用，探究分类，意在找到解决矛盾的起点，从此开始，你就进行状态了.

[例6] 设 $a>0$，且 $a\neq 1$. 讨论 $f(x)=a^{\ln(-x+3)}$ 的单调性.

解 函数的定义域是 $(-\infty,3)$.

函数 $y=-x+3$ 与 $y=\ln x$ 分别是减函数、增函数，

所以，函数 $y=\ln(-x+3)$ 是减函数.

以下分类：

当 $0<a<1$ 时，$y=\ln(-x+3)$ 与 $y=a^x$ 都是减函数，

所以，$f(x)=a^{\ln(-x+3)}$ 在 $(-\infty,3)$ 上是增函数.

同理，当 $a>1$ 时，$f(x)=a^{\ln(-x+3)}$ 在 $(-\infty,3)$ 上是减函数.

点评 本例是就 $0<a<1$ 与 $a>1$ 进行分类的，它源于讨论指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的单调性时对 a 的分类. 由此看来，处理新的数学问题时，可以把以往成熟的经验借鉴过来.

本例勾起了我们一个回忆，即函数的单调性有“同增异减”之说.

[例7] 如图 1-1-4，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，$AA_1=2$. 过棱 AB 作一个与底面 ABC 成 θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 角的截面，求截面的面积.

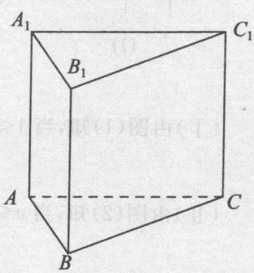


图 1-1-4

解 如图 1-1-5，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，取 AB 的中点 M，连结 CM，C_1M. $CM\perp AB$，$C_1M\perp AB$，

$\therefore \angle C_1MC$ 就是平面 ABC_1 与平面 ABC 所成的二面角的平面角.

$\because CM=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2$，$CC_1=2$，

$$\therefore \quad \tan\angle C_1MC=\frac{C_1C}{CM}=1,$$

$$\therefore \quad \angle C_1MC=\frac{\pi}{4}.$$

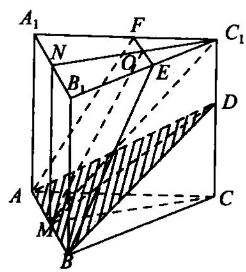


图 1-1-5

(1) 当 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，过 AB 棱的截面是等腰三角形 ABD，$\angle DMC=\theta$.

截面的面积为