高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·同济大学应用数学系编

九章丛书

微积分

第二版·上册

同步辅导及习题全解

主 编 边文思 黄淑森

· 知识点窍 · 逻辑推理 · 习题全解

· 全真考题 · 名师执笔 · 题型归类

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

同步辅导丛书

微积分（第二版·上册）同步辅导及习题全解

主　编　边文思　黄淑森

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是高教版《微积分》（第二版·上册）教材的配套学习辅导及习题解答教材。编写的重点在于原教材中各章节全部习题的精解详答，并对典型习题做了很详细的分析和提纲挈领的点评，思路清晰，逻辑缜密，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。本书对各章的知识点进行了归纳和提炼，帮助读者梳理各章脉络，统揽全局。

本书可作为工科各专业本科学生《微积分》课程教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书，也可以作为《微积分》课程教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分（第二版上册）同步辅导及习题全解 / 边文思，黄淑森主编.—北京：中国水利水电出版社，2009
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-6663-7

I. 微… II.①边…②黄… III.微积分－高等学校－教学参考资料 IV.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 124396 号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：李炎　加工编辑：毕超　封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **微积分（第二版·上册）同步辅导及习题全解**
作　　者	主编　边文思　黄淑森
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	170 mm×227mm　16 开本　15 印张　367 千字
版　　次	2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	0001—6000 册
定　　价	19.80 元

编　委　会

前言

《微积分》作为高等数学的重要组成部分，是理工科学生必修的一门重要基础课，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。微积分中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统，这个系统不仅内容丰富，更重要的是结构严密，无懈可击。作为进入大学阶段学习的第一门高等数学课程，许多同学在学习过程中感到微积分抽象、难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路，难以下手。本辅导书旨在帮助广大同学更好地掌握微积分的基本概念和基本理论，综合运用各种解题的技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力。

本书是与同济大学应用数学系编写的"十五"国家级规划教材《微积分》(第二版)配套的学习辅导书。本书由边文思和温州职业技术学院黄淑森教授主编。

本书主要由如下几个部分组成：

1. **学习指南**：从该课程的知识体系出发，对各个章节在全书中的位置以及其他章节的联系作了简明扼要的阐述，使学习有重点。

2. **本章知识网络图**：每章的知识网络图系统全面地涵盖了本章的知识点，使学生能一目了然地浏览本章内容框架结构，全面把握教材的理论体系。

3. **知识点归纳**：对每章知识点做了简练概括，梳理了各知识点之间的脉络联系，突出各章主要定理及重要公式，使读者在各章学习过程中目标明确，有的放矢。

4. **课后习题全解**：教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给出了详细的解答。

由于时间较仓促，编者水平有限，书中难免有疏漏之处，敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2009 年 6 月

目 录

前言

预备知识 …… 1

学习指南 …… 1
本章知识网络图 …… 1
知识点归纳 …… 1
课后习题详解 …… 4

第一章　极限与连续 …… 10

学习指南 …… 10
本章知识网络图 …… 10
第二、三节　数列及函数极限的定义 …… 11
知识点归纳 …… 11
课后习题详解 …… 12
第四节　极限的性质 …… 16
知识点归纳 …… 16
课后习题详解 …… 16
第五节　极限的运算法则 …… 18
知识点归纳 …… 18
课后习题详解 …… 19
第六节　极限存在准则与两个重要极限 …… 23
知识点归纳 …… 23
课后习题详解 …… 24
第七节　无穷小的比较 …… 26
知识点归纳 …… 26
课后习题详解 …… 27
第八节　函数的连续性与连续函数的运算 …… 30
知识点归纳 …… 30
课后习题详解 …… 31

第九节　闭区间上连续函数的性质 …… 34
知识点归纳 …… 34
课后习题详解 …… 34

第二章　一元函数微分学 …… 43

学习指南 …… 43
本章知识网络图 …… 43
第一节　导数的概念 …… 44
知识点归纳 …… 44
课后习题详解 …… 45
第二节　求导法则 …… 49
知识点归纳 …… 49
课后习题详解 …… 50
第三节　隐函数的导数和由参数方程确定的函数的导数 …… 55
知识点归纳 …… 55
课后习题详解 …… 56
第四节　高阶导数 …… 60
知识点归纳 …… 60
课后习题详解 …… 61
第五节　函数的微分与函数的线性逼近 …… 64
知识点归纳 …… 64
课后习题详解 …… 65
第六节　微分中值定理 …… 68
知识点归纳 …… 68
课后习题详解 …… 68
第七节　泰勒公式 …… 71
知识点归纳 …… 71
课后习题详解 …… 72
第八节　洛必达法则 …… 76
知识点归纳 …… 76
课后习题详解 …… 77

第九节　函数单调性与凸性的判别方法…………………………………………………… 80
知识点归纳 ………………………………………………………………………………… 80
课后习题详解 ……………………………………………………………………………… 80
第十节　函数的极值与最大、最小值 ……………………………………………………… 87
知识点归纳 ………………………………………………………………………………… 87
课后习题详解 ……………………………………………………………………………… 88
第十一节　曲线的曲率……………………………………………………………………… 95
知识点归纳 ………………………………………………………………………………… 95
课后习题详解 ……………………………………………………………………………… 95

第三章　一元函数积分学 ………………………………………………………………… 106

学习指南 …………………………………………………………………………………… 106
本章知识网络图 …………………………………………………………………………… 106
第一节　不定积分的概念及其线性法则 ………………………………………………… 107
知识点归纳……………………………………………………………………………… 107
课后习题详解…………………………………………………………………………… 108
第二节　不定积分的积分方法…………………………………………………………… 111
知识点归纳 ……………………………………………………………………………… 111
课后习题详解…………………………………………………………………………… 112
第三节　不定积分的分部积分法………………………………………………………… 115
知识点归纳 ……………………………………………………………………………… 115
课后习题详解…………………………………………………………………………… 116
第四节　有理函数的不定积分…………………………………………………………… 118
知识点归纳 ……………………………………………………………………………… 118
课后习题详解…………………………………………………………………………… 120
第五节　定积分…………………………………………………………………………… 122
知识点归纳 ……………………………………………………………………………… 122
课后习题详解…………………………………………………………………………… 123
第六节　微积分基本定理 ………………………………………………………………… 125
知识点归纳 ……………………………………………………………………………… 125
课后习题详解…………………………………………………………………………… 126

第七节　定积分的换元法与分部积分法 …… 130
知识点归纳 …… 130
课后习题详解 …… 131
第八节　定积分的几何应用举例 …… 136
知识点归纳 …… 136
课后习题详解 …… 138
第九节　定积分的物理应用举例 …… 146
知识点归纳 …… 146
课后习题详解 …… 146
第十节　平均值 …… 149
知识点归纳 …… 149
课后习题详解 …… 150
第十一节　反常积分 …… 151
知识点归纳 …… 151
课后习题详解 …… 154

第四章　微分方程 …… 168

学习指南 …… 168
本章知识网络图 …… 168
第一、二节　微分方程的基本概念及可分离变量的微分方程 …… 169
知识点归纳 …… 169
课后习题详解 …… 170
第三节　一阶线性微分方程 …… 177
知识点归纳 …… 177
课后习题详解 …… 177
第四节　可用变量代换法求解的一阶微分方程 …… 182
知识点归纳 …… 182
课后习题详解 …… 183
第五节　可降阶的二阶微分方程 …… 193
知识点归纳 …… 193
课后习题详解 …… 193
第六、七节　线性微分方程解的结构 …… 201
知识点归纳 …… 201
课后习题详解 …… 204

预备知识

学习指南

1. 理解函数及其定义域、值域、图形等概念，掌握函数的表示法.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数、反函数和分段函数的概念.

4. 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念，掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

本章知识网络图

- 集合与函数
  - 集合
    - 概念
    - 运算(交换律，结合律，分配律，对偶律)
    - 区间(开区间，闭区间，有限区间，无限区间)
    - 邻域
  - 映射
    - 概念
    - 分类(满射，单射，一一映射)
    - 逆映射
    - 复合映射
  - 一元函数
    - 概念
    - 性质(有界性，单调性，奇偶性，周期性)
    - 反函数
    - 复合函数
    - 函数的运算(和，差，积，商)
    - 基本初等函数(幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数)

知识点归纳

1. 集合的基础知识

(1) 数集

自然数集

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

整数集

$$\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$$

有理数集

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0,\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$$

复数集

$$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R},\mathrm{i}^2=-1\}$$

正实数集

$$\mathbf{R}^{+}=\{x\mid x\in\mathbf{R},x>0\}$$

负实数集

$$\mathbf{R}^{-}=\{x\mid x\in\mathbf{R},x<0\}$$

去 0 实数集

$$\mathbf{R}^{*}=\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$$

(2) 运算公式

$A\cup B=\{u\mid u\in A\text{ 或 }u\in B\}$;

$A\cap B=\{u\mid u\in A\text{ 且 }u\in B\}$;

$A\backslash B=\{u\mid u\in A\text{ 且 }u\overline{\in}B\}$;

$A^c=\{u\mid u\in I\text{ 且 }u\overline{\in}A\}$;

$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$.

(3) 区间和邻域

$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$;

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$;

$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$;

$\mathring{U}(a,\delta)=x\{0<|x-a|<\delta\}=\{x\mid x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\}$;

点 a 的左 δ 邻域 $=\{x\mid a-\delta<x<a\}$.

2. 映射

设 X 和 Y 为两个非空集合,若存在法则 T,使得 $x\in X$ 唯一确定 $y=T(x)\in Y$,则称 T 为 X 到 Y 的映射,记作 $T:X\rightarrow Y$,称 x 为原像,y 为像.集合 X 称为映射 T 的定义域,X 的所有元素的像组成的集合称为映射 T 的值域.

满射　若 $T(X)=Y$,即 Y 中任一元素都是 X 中某元素的像,则称 T 为 X 到 Y 的一个满射;

单射　对任意 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$,必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$,则称 T 为 X 到 Y 的单射;

一一映射　既满足满射又符合单射的映射,又称为一一对应;

复合映射　$(T_2\circ T_1)(x)=T_2[T_1(x)]$.

3. 一元函数

(1) 概念

设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则 D 到 $\mathbf{R}$ 的任一映射 f 称为定义在 D 上的一元函数,简称为函数,记作 $y=f(x),x\in D$.

定义域和对应法则是函数的两要素.

点集$\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$称为$y = f(x)$的图形(或图像).

以上定义的是单值函数,当对应法则为多值时,可根据不同情况进行化简,得到单值函数来进行研究.

(2) 函数的几种特性

有界性、单调性、奇偶性、周期性.

(3) 反函数

设一元函数:$f: D \to f(D)$为一一映射,则称逆映射$f^{-1}: f(D) \to D$为函数f的反函数.f^{-1}的对应规则由f的对应规则所确定.

换言之,设函数f的定义域D与值域$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$一一对应,则$x$也是$y$的函数,记作$x = f^{-1}(y)$,称映射$f^{-1}$为$f$的反函数.习惯上$x$总表示为自变量,$y$表示因变量,因此常记作$y = f^{-1}(x)$为$y = f(x)$的反函数.

在同一坐标平面中,$x = f^{-1}(y)$与$y = f(x)$的图形相同,而$y = f^{-1}(x)$与直线$y = f(x)$的图形关于$y = x$对称.

(4) 复合函数

设函数$y = f(u)$的定义域是D',函数$u = g(x)$的定义域是D,若$u = g(x)$在集合D上有定义且$g(D) \subset D'$,则将由下式

$$y = f[g(x)] (x \in D)$$

定义的函数称为由函数$u = g(x)$和$y = f(u)$构成的复合函数,记作$f \circ g$,即对每个$x \in D$,有$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

(5) 基本初等函数

幂函数 $y = x^{\alpha}$(α为常数);

指数函数 $y = a^{x}$($a > 0$,且$a \neq 1$);

对数函数 $y = \log_a x$(a是常数且$a > 0, a \neq 1$);

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, \cdots$;

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, \cdots$.

(6) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合步骤所构成的并可以用一个算式表示的函数统称为初等函数.

工程中常用的一类初等函数:

双曲正弦 $$y = \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

双曲余弦 $$y = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

双曲正切 $$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

反双曲正弦 $$y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

反双曲余弦 $$y = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

反双曲正切　　$y = \mathrm{artanh}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

双曲函数有与三角函数相似的和角、差角、倍角关系，请读者自己研读并比较；同时应熟悉其性质和图形.

课后习题详解

1. 设 $A = \{x \mid \sqrt{1-x^2} \leqslant 1\}$、$B = \{x \mid 0 < x < 2\}$ 是实数域中的两个子集，写出 $A \cup B$、$A \cap B$、$A \backslash B$ 及 $B \backslash A$ 的表达式.

【知识点窍】 并集、交集和差集的基本概念.

解： 对于集合 A，有 $\sqrt{1-x^2} \leqslant 1$，则 $0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1, 1 \geqslant x^2 \geqslant 0, -1 \leqslant x \leqslant 1$

所以
$$A \cup B = \{x \mid -1 \leqslant x < 2\};$$
$$A \cap B = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\};$$
$$A \backslash B = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 0\};$$
$$B \backslash A = \{x \mid 1 < x < 2\}.$$

2. 两个集合 A 与 B 之间如果存在一一对应，则称集合 A 与 B 等势. 例如，设 A 是正奇数集合，B 是正偶数集合，如果定义从 A 到 B 的映射 $T: T(2n+1) = 2n+2$.

其中 n 为任一自然数，则 T 是 A 与 B 之间的一一对应，因此这两个集合等势. 试说明下列数集是等势的：

(1) 整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$；　　(2) 区间 $(1,2)$ 与区间 $(3,5)$.

【知识点窍】 该题为信息给予题，通过所给条件证明欲证问题.

【逻辑推理】 解(1)题须注意：整数比自然数多负数部分，通过分段分析，一一对应即可，解(2)题时，可以设 $(1,2)$ 为自变量，$(3,5)$ 为变量，构造函数即可.

解： (1) 定义映射 T：
$$T(x) = 2x$$
当 x 是正整数时：
$$T(x) = 1-2x$$
当 x 是 0 或负整数时，则 T 是整数集合 $\mathbf{Z}$ 到自然数集 $\mathbf{N}$ 的一一对应，所以整数集合 $\mathbf{Z}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$ 等势.

(2) 设 $x \in (1,2)$，定义映射 T：$T(x) = 2x+1$

则 T 是区间 $(1,2)$ 与区间 $(3,5)$ 的一一对应，所以区间 $(1,2)$ 与区间 $(3,5)$ 等势.

3. 求下列函数的自然定义域

(1) $y = \frac{1}{x+2}$；　　(2) $y = \sqrt{x^2-9}$；

(3) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{1+x}$；　　(4) $y = \frac{1}{[x+1]}$.

【知识点窍】 函数的自然定义域为使算式有意义的一切实数组成的集合. 一般求定义域时应注意的问题：分母不为 0，偶次根号下数值大于 0，对数大于 0 等.

解： (1) 由 $x+2 \neq 0$ 得函数的定义域为　$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$；

(2) 由 $x^2-9\geqslant 0$ 得函数的定义域为 $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$；

(3) 由 $1-x^2\neq 0$ 及 $1+x\geqslant 0$ 得函数的定义域为 $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(4) 由 $[x+1]\neq 0$ 得函数的定义域为 $x\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

4. 下列函数 f 和 φ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x},\varphi(x)=1$；　　(2) $f(x)=x,\varphi(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=1,\varphi(x)=\sin^2x+\cos^2x$；　　(4) $f(x)=1,\varphi(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

【知识点窍】 定义域与对应法则为函数的二要素.故判断两个函数是否相同,对各自定义域和对应法则进行比较即可.

解： (1) 否,两函数的定义域不同;(2) 否,两函数值域不同;

(3) 是;(4) 否,$\varphi(x)=\sec^2x-\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}-\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}$,所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 的定义域不同.

5. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $y=x+x^2-x^3$；(2) $y=a+b\cos x$；(3) $y=x+\sin x+e^x$；(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

【知识点窍】 若 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 为奇函数;否则,$f(x)$ 非奇非偶.由上述条件,本题只须对 $f(-x)$ 化简并与 $f(x)$ 比较即可.

解： (1) $y(-x)\neq y(x),y(-x)\neq -y(x)$,所以 $y=x+x^2-x^3$ 为非奇非偶函数;

(2) $y(-x)=a+b\cos(-x)=a+b\cos x=y(x)$,所以 $y=a+b\cos x$ 是偶函数;

(3) $y(-x)\neq y(x),y(-x)\neq -y(x)$,所以 $y=x+\sin x+e^x$ 为非奇非偶函数;

(4) $y(-x)=(-x)\cdot\dfrac{1}{\sin(-x)}=x\sin\dfrac{1}{x}=y(x)$,所以 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 是偶函数.

6. 证明:两个偶函数之积是偶函数,两个奇函数之积是偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

【知识点窍】 奇函数与偶函数的基本特性,构造新函数 $F(x)$ 的两个函数之积,然后求出 $F(x)$ 的奇偶性即可.

证： 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是定义在数集 D 上的函数,令 $F(x)=f(x)g(x)$,如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是偶函数,则对任意的 $x\in D$,

$$F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=F(x)$$

所以 $F(x)$ 是数集 D 上的偶函数;

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是奇函数,则对任意的 $x\in D$,

$$\begin{aligned}F(-x)&=f(-x)g(-x)=(-f(x))(-g(x))\\&=f(x)g(x)=F(x)\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 是数集 D 上的偶函数;

如果 $f(x)$ 是奇函数,$g(x)$ 是偶函数,则对任意的 $x\in D$,

$$\begin{aligned}F(-x)&=f(-x)g(-x)=(-f(x))(-g(x))\\&=-f(x)g(x)=-F(x)\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 是数集 D 上的奇函数.

7. 设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任何函数,证明:

(1) $\varphi(x)=f(x)+f(-x)$ 是偶函数,$\psi(x)=f(x)-f(-x)$ 是奇函数;

(2) 定义在区间 $(-l,l)$ 上的任何函数可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

【知识点窍】 奇函数和偶函数的基本性质.

证: (1) 因为

$$\begin{aligned}\varphi(-x)&=f(-x)+f(-(-x))\\&=f(-x)+f(x)=\varphi(x),\\ \psi(-x)&=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)\\&=-(f(x)-f(-x))=-\psi(x)\end{aligned}$$

所以 $\varphi(x)$ 是偶函数,$\psi(x)$ 是奇函数;

(2) 由(1)知 $\frac{\varphi(x)}{2}$ 是偶函数,$\frac{\psi(x)}{2}$ 是奇函数,而 $f(x)=\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}$ 恒成立,命题得证.

8. 证明:

(1) 两个增加(减少)的函数之和是增加(减少)的;

(2) 两个增加(减少)的正值函数之积是增加(减少)的;

(3) 两个增加的函数的复合函数是增加的.又问两个减少的函数的复合函数情况如何?

【知识点窍】 复合函数的基本特性,依题意分别构造新函数 $F(x)$,然后证明相关性质即可.

证: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均是定义在数集 D 上的增加函数,

(1) 令 $F(x)=f(x)+g(x)$,则对任意的 $x_1,x_2\in D,x_1<x_2$,有

$$F(x_1)=f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)=F(x_2),$$

即 $F(x)$ 在数集 D 上是增加的;同理可证 $f(x)$ 与 $g(x)$ 减小的情形;

(2) 令 $F(x)=f(x)g(x)$,则对任意的 $x_1,x_2\in D,x_1<x_2$

$$F(x_1)=f(x_1)g(x_1)<f(x_2)g(x_2)=F(x_2)$$

即 $F(x)$ 在数集 D 上是增加的;同理可证 $f(x)$ 与 $g(x)$ 减少的情形;

(3) 设任意的 $x\in D,g(x)\in D$,令 $F(x)=f(g(x))$,则对任意的

$$x_1,x_2\in D,x_1<x_2,g(x_1)<g(x_2),$$

所以 $F(x_1)=f(g(x_1))<f(g(x_2))=F(x_2)$,即 $F(x)$ 在数集 D 上增加,同理可证,两个减少的函数的复合函数为减少的.

9. 求下列函数的反函数及反函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x\leqslant 0)$; (2) $y=\begin{cases}x^3, & -\infty<x<1\\ 2^{x-1}, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$

【知识点窍】 反函数的定义及其定义域.

【逻辑推理】 首先确定已知函数是否存在反函数,或在各个区间上分别具有反函数,然后易求得反函数,反函数的定义域为原函数的值域.

解: (1) 因为函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 上单调增加,故反函数存在,易求得

$$y=\sqrt{1-x^2},y^2=1-x^2,$$

$$x=-\sqrt{1-y^2},x=\sqrt{1-y^2}\text{(不合题意,舍去)}$$

所以反函数为 $y=-\sqrt{1-x^2}$，定义域为[0,1].

(2) 因为函数在实数域**R**上单调增加，所以函数的反函数存在，在区间 $-\infty<x<1$ 内，$y=x^3$，$x=\sqrt[3]{y}$，所以 $-\infty<x<1$ 内函数的反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$，定义域为 $-\infty<x<1$ 内原来函数的值域 $-\infty<x<1$；在 $1\leqslant x<+\infty$ 上，$y=2^{x-1}$，$x=1+\log_2 y$，所以此时函数的反函数为 $y=1+\log_2 x$，定义域为 $1\leqslant x<+\infty$ 上原来函数的值域 $1\leqslant x<+\infty$.

10. 作出下列函数的图形：

(1) $y=\operatorname{sgn}(\cos x)$；　　(2) $y=[x]-2[\frac{x}{2}]$.

解： (1) 由 $y=\cos x$ 的图形，即图 1.

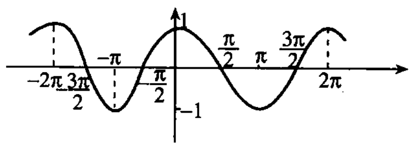


图 1

及
$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

即可得 $y=\operatorname{sgn}(\cos x)$ 的图形，即图 2.

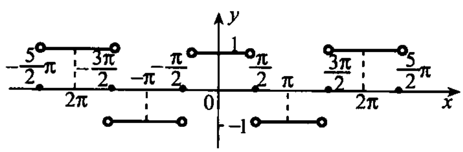


图 2

(2) 由于 $$y=[x]-2[\frac{x}{2}]=\begin{cases}0, & \text{当 } 2k\leqslant x<2k+1 \text{ 时}\\ 1, & \text{当 } 2k+1\leqslant x<2k+2 \text{ 时}\end{cases}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

即可得 $y=[x]-2[\frac{x}{2}]$ 的图形为图 3.

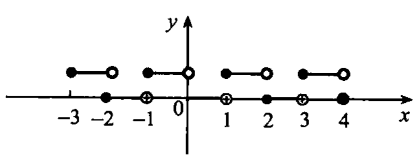


图 3

11. 给定函数

$y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，令 $f_1(x)=-f(x)$，$f_2(x)=f(-x)$，$f_3(x)=-f(-x)$. 说明函数 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，$y=f_3(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形的位置关系.

解： 函数 $y=f_1(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于 x 轴对称；$y=f_2(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于

y 轴对称；$y=f_3(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称.

12. 证明：

(1)$\sinh x+\sinh y=2\sinh\dfrac{x+y}{2}\cosh\dfrac{x-y}{2}$；

(2)$\cosh x-\cosh y=2\sinh\dfrac{x+y}{2}\sinh\dfrac{x-y}{2}$.

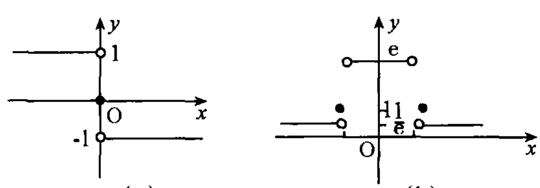
【知识点窍】 直接由 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 的定义证明。

证： (1)
$$2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}=2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(e^x+e^y-e^{-y}-e^{-x})$$
$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$
$$=\sinh x+\sinh y.$$

(2)
$$2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}=2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}-e^{\frac{x-y}{2}}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(e^x-e^{-y}-e^y+e^{-x})$$
$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-\frac{1}{2}(e^y+e^{-y})$$
$$=\cosh x-\cosh y$$

13. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & 当\ |x|<1,\\ 0 & 当\ |x|=1,\\ -1 & 当\ |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解： $f[g(x)]=\begin{cases}1 & 当\ |g(x)|=e^x<1，即\ x<0\\ 0 & 当\ |g(x)|=e^x=1，即\ x=0\\ -1 & 当\ |g(x)|=e^x>1，即\ x>0\end{cases}$ 其图形如图 4(a) 所示



(a)　　(b)

图 4

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e & 当\ |x|<1,\\ 1 & 当\ |x|=1,\\ e^{-1} & 当\ |x|>1.\end{cases}$ 其图形如图 4(b) 所示

14. (1) 设 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x+2)$；

(2) 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f(\cos x)$.