



新世纪高职高专实用规划教材

公共基础系列

高等数学 习题课教程

王卫群 胡铁城 张新萍 贺楚雄 主 编
卢惟康 刘康波 袁文胜 徐志尧 管永娟 副主编

赠送
电子课件

清华大学出版社





新世纪高等学校教材

（理工类）

高等数学 习题课教程

1

主编 王长利 副主编 王长利 王长利 王长利

ISBN 7-309-04000-0

定价 12.00元

新世纪高职高专实用规划教材 公共基础系列

高等数学习题课教程

王卫群 胡铁城 张新萍 贺楚雄 主 编

卢惟康 刘康波 袁文胜 徐志尧 管永娟 副主编

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是高职高专通用教材,依据高职教育的需要,精心组织内容,是配合主教材《高等数学》的学习辅导书。本书采用“教学要求”、“内容提要”、“解题指导”、“节后习题与自测题”四大板块有机地结合的新形式,主要编写的内容有:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学和无穷级数。

本书可作为高职高专学生学习“高等数学”课的辅导教材或学习参考书,又可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材,对自考学生、专升本学生及数学爱好者来说,本书也是一本较好的自学用书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程/王卫群,胡铁城,张新萍,贺楚雄主编;卢惟康,刘康波,袁文胜,徐志尧,管永娟副主编. —北京:清华大学出版社,2009.9

(新世纪高职高专实用规划教材 公共基础系列)

ISBN 978-7-302-20942-3

I. 高… II. ①王… ②胡… ③张… ④贺… ⑤卢… ⑥刘… ⑦袁… ⑧徐… ⑨管… III. 高等数学—高等学校:技术学校—习题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 148569 号

责任编辑:张瑜 桑任松

装帧设计:杨玉兰

责任校对:李玉萍

责任印制:何芊

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京紫瑞利印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印 张:9.75 字 数:234 千字

版 次:2009 年 9 月第 1 版 印 次:2009 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1~4000

定 价:16.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103 产品编号:033013-01

前 言

本书是《高等数学》配套教材，是针对高职高专学生学习的特点，结合编者多年的教学实践经验编写而成的。

本书共分 12 章，每章包括教学要求、内容提要、解题指导、节后习题、自测题等内容。教学要求指明学生应掌握和理解的知识；内容提要是提示出重点内容和容易混淆的概念；解题指导是通过典型例题的解法教会学生数学思维方法，揭示出解题规律，并通过典型例题中的点评与说明，指出初学者易犯的错误，使学生加深对课堂上所讲内容的理解，以加强基础训练和提高学生的解题能力；节后习题是对应教材给出的相应习题；自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题，可供学生检测对基础知识理解程度和解题能力，书后给出节后习题与自测题的参考解答以供读者参考。

全书由王卫群、胡铁城、贺楚雄、张新萍任主编，卢惟康、刘康波、袁文胜、徐志尧、管永娟任副主编，书中的大部分插图由刘康波、徐志尧绘制，经过正副主编的多次修改，最后由王卫群进行统稿、定稿而成。

本书既适合作为高职高专院校高等数学通用教材，又可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

由于水平有限，时间也比较仓促，书中不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 函数的概念.....	1	习题 4-2 函数的极值与最值.....	41
一、教学要求	1	习题 4-3 函数图形的描绘.....	42
二、内容提要	1	习题 4-4 柯西中值定理与洛必达法则.....	43
三、解题指导	2	自测题 4	43
习题 1-1 函数	4	第 5 章 不定积分	45
习题 1-2 初等函数	6	一、教学要求.....	45
自测题 1	7	二、内容提要.....	45
第 2 章 极限与连续.....	9	三、解题指导.....	45
一、教学要求	9	习题 5-1 不定积分的概念.....	52
二、内容提要	9	习题 5-2 不定积分的换元积分法.....	54
三、解题指导	9	习题 5-3 不定积分的分部积分法.....	55
习题 2-1 极限的概念	12	自测题 5	56
习题 2-2 极限的性质与运算法则	13	第 6 章 定积分	58
习题 2-3 函数的连续性与间断点	14	一、教学要求.....	58
自测题 2	15	二、内容提要.....	58
第 3 章 导数和微分.....	18	三、解题指导.....	59
一、教学要求	18	习题 6-1 定积分的概念	62
二、内容提要	18	习题 6-2 微积分基本公式.....	63
三、解题指导	18	习题 6-3 定积分的计算方法.....	64
习题 3-1 导数的概念	27	习题 6-4 广义积分	64
习题 3-2 求导法则	28	自测题 6	65
习题 3-3 高阶导数	31	第 7 章 定积分的应用	67
习题 3-4 微分	31	一、教学要求.....	67
自测题 3	33	二、内容提要.....	67
第 4 章 导数的应用.....	36	三、解题指导.....	68
一、教学要求	36	习题 7-2 定积分在几何上的应用.....	71
二、内容提要	36	习题 7-3 定积分在物理上的应用.....	71
三、解题指导	37	自测题 7	72
习题 4-1 拉格朗日中值定理及函数的 单调性	40	第 8 章 常微分方程.....	74
		一、教学要求.....	74



二、内容提要	74
三、解题指导	74
习题 8-1 微分方程的基本概念与分离 变量法	79
习题 8-2 一阶线性微分方程	79
习题 8-3 二阶常系数线性微分方程	80
自测题 8	80
第 9 章 向量与空间解析几何	82
一、教学要求	82
二、内容提要	82
三、解题指导	82
习题 9-1 空间直角坐标系与向量的 概念	87
习题 9-2 向量的数量积与向量积	87
习题 9-3 平面方程与空间直线方程	88
习题 9-4 曲面与空间曲线	89
自测题 9	89
第 10 章 多元函数的微分学	92
一、教学要求	92
二、内容提要	92
三、解题指导	93
习题 10-1 多元函数的概念、二元函数的 极限和连续性	100
习题 10-2 偏导数	101
习题 10-3 全微分	101
习题 10-4 多元复合函数与隐函数的 微分法	102
习题 10-5 偏导数的应用	102
自测题 10	103
第 11 章 多元函数积分学	105
一、教学要求	105
二、内容提要	105
三、解题指导	106
习题 11-1 二重积分的概念与性质	110
习题 11-2 二重积分的计算	110
习题 11-3 二重积分的应用	111
自测题 11	112
第 12 章 无穷级数	114
一、教学要求	114
二、内容提要	114
三、解题指导	115
习题 12-1 数项级数的概念和性质	117
习题 12-2 正项级数及其判别法	118
习题 12-3 一般项级数	119
习题 12-4 幂级数	120
习题 12-5 傅里叶级数	121
自测题 12	122
参考答案	125
参考文献	146

第 1 章 函数的概念

一、教学要求

1. 理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数的概念.
2. 了解反函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念.
3. 掌握复合函数的复合过程.
4. 了解数学建模的方法与过程.

二、内容提要

本章主要介绍了函数、复合函数及数学建模的有关概念与方法.

1. 基本内容: 函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数、反函数、函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性、数学模型与数学建模的概念; 复合函数的复合过程; 数学建模的方法与过程.

2. 理解函数概念首先应该明确它是不同于相关关系的确定性关系, 其次要能正确确定函数的定义域和判断它的值域, 理解函数符号的含义.

3. 在理解函数概念的基础上, 还要进一步掌握函数几种特性的表达式和几何意义、反函数的概念、分段函数的概念和求值的方法、6 类基本初等函数的性质和图像、复合函数和初等函数的概念.

4. 函数概念是在中学数学的基础上进一步深化的, 应注意和中学教材衔接. 要特别注意与中学教材的不同之处. 具体有以下几点:

(1) 加深对函数的两个要素的理解.

(2) 函数的特性中, 应突出有界性, 这个概念是中学教材里没有的, 并且它的表述比较难理解, 一定要弄清它的几何意义.

(3) 对分段函数要注意它的实际背景, 要求熟悉分段函数.

5. 对函数的复合运算要注意复合的条件以及定义域、值域的变化.

6. 对数学建模的过程要理解模型假设和简化的重要性以及模型检验与修改模型的反复完善过程. 明白数学建模与解数学应用题的不同, 它的答案不唯一, 方法不唯一, 无法归纳成普遍适用的准则.



三、解题指导

例 1-1 已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 求: $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x+1)$, $f(x^2)$.

解: $f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$,

$$f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1},$$

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{2+x}, \quad f(x^2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

例 1-2 求下列函数的定义域.

(1) $f(x) = \frac{3}{5x^2 + 2x}$;

(2) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$;

(3) $f(x) = \lg(4x-3)$;

(4) $f(x) = \arcsin(2x-1)$;

(5) $f(x) = \lg(4x-3) - \arcsin(2x-1)$.

解: (1) 在分式 $\frac{3}{5x^2+2x}$ 中, 分母不能为零, 所以 $5x^2+2x \neq 0$, 解得 $x \neq -\frac{2}{5}$, 且 $x \neq 0$, 即定义域为 $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

(2) 在偶次根式中, 被开方式必须大于等于零, 所以有 $9-x^2 \geq 0$, 解得 $-3 \leq x \leq 3$, 即定义域为 $[-3, 3]$.

(3) 在对数式中, 真数必须大于零, 所以有 $4x-3 > 0$, 解得 $x > \frac{3}{4}$, 即定义域为 $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

(4) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于 1, 所以有 $-1 \leq 2x-1 \leq 1$, 解得 $0 \leq x \leq 1$, 即定义域为 $[0, 1]$.

(5) 该函数为(3)、(4)两例中函数的代数和, 此时函数的定义域应为(3)、(4)两例中定义域的交集, 即 $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right) \cap [0, 1] = \left(\frac{3}{4}, 1\right]$.

例 1-3 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -4 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 3 \\ 5x-1, & x \geq 3 \end{cases}$, 求 $f(-\pi)$, $f(1)$, $f(3.5)$ 及函数的定义域.

解: 因为 $-\pi \in [-4, 1)$,

所以 $f(-\pi) = \sin(-\pi) = 0$;

因为 $1 \in [1, 3)$,

所以 $f(1) = 1$;

因为 $3.5 \in [3, +\infty)$,

所以 $f(3.5) = 5 \times (3.5) - 1 = 16.5$.

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4, +\infty)$.

例 1-4 设有函数 $f(x) = x - 1$ 和 $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, 问它们是否为同一个函数?

解: 当 $x \neq -1$ 时, 函数值 $f(x) = g(x)$, 但是 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

而 $g(x)$ 在 $x = -1$ 点无定义, 其定义域为 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$.

由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同, 所以它们不是同一个函数.

例 1-5 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$;

(2) $f(x) = 2x^2 + \sin x$;

(3) $f(x) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^x) \quad (a > 0, a \neq 1)$.

解: (1) 因为 $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 7 = 3x^4 - 5x^2 + 7 = f(x)$

所以 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = 2(-x)^2 + \sin(-x) = 2x^2 - \sin x \neq f(x)$,

同样可以得到 $f(-x) \neq -f(x)$,

所以 $f(x) = 2x^2 + \sin x$ 既非奇函数, 也非偶函数.

(3) 因为 $f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-(-x)} - a^{-x}) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) = -\frac{1}{2}(a^{-x} - a^x) = -f(x)$

所以 $f(x) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^x)$ 是奇函数.

例 1-6 验证函数 $y = 3x - 2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

证: 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任取两点 $x_1 < x_2$, 于是 $f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 - 2) - (3x_2 - 2) = 3(x_1 - x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $y = 3x - 2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

例 1-7 求 $y = 4x - 1$ 的反函数.

解: 由 $y = 4x - 1$ 得到 $x = \frac{y+1}{4}$, 然后交换 x 和 y , 得 $y = \frac{x+1}{4}$, 即 $y = \frac{x+1}{4}$ 是 $y = 4x - 1$

的反函数.

例 1-8 已知 $y = \sqrt{u}$, $u = 2x^3 + 5$, 将 y 表示成 x 的函数.

解: 将 $u = 2x^3 + 5$ 代入 $y = \sqrt{u}$, 可得 $y = \sqrt{2x^3 + 5}$.



例 1-9 已知 $y = \ln u$, $u = 4 - v^2$, $v = \cos x$, 将 y 表示成 x 的函数.

解: $y = \ln(4 - v^2) = \ln(4 - \cos^2 x)$.

例 1-10 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y = \sin(x^3 + 4)$; (2) $y = 5^{\cot \frac{1}{x}}$.

解: (1) 设 $u = x^3 + 4$, 则 $y = \sin(x^3 + 4)$ 由 $y = \sin u$, $u = x^3 + 4$ 复合而成.

(2) 设 $u = \cot \frac{1}{x}$, 则 $y = 5^u$; 设 $v = \frac{1}{x}$, 则 $u = \cot v$, 所以, $y = 5^{\cot \frac{1}{x}}$ 可以看成是 $y = 5^u$ 、
 $u = \cot v$ 、 $v = \frac{1}{x}$ 这 3 个函数复合而成的.

习题 1-1 函 数

一、填空题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x > 1 \\ x, & x \leq 1 \end{cases}$, 则 $f[f(2)] = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知 $f(x+1) = x^2 + 2x$, 则 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知函数 $f(x+t) = f(x) + f(t)$ 对任何实数都成立, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 函数 $y = \sqrt{4-x} + \frac{1}{\ln(x-1)}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^2 + 2, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 函数 $y = \sqrt{x^3 + 3}$ 的值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 设函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, $g(x) = x - 1$, 则它们在区间 $\underline{\hspace{2cm}}$ 上是相同的函数.
8. $y = \frac{x+1}{x-1}$ 的反函数为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 函数 $y = -x^2 + 1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调 $\underline{\hspace{2cm}}$, 在区间 $[0, +\infty)$ 内单调 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. 已知 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数且 $f(a) = 3$, 则 $f(a + 2T) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

1. 将函数 $f(x) = 1 + |x - 1|$ 表示为分段函数时, $f(x) = (\quad)$.
 (A) $\begin{cases} 2-x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 2-x, & x < 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x, & x \geq 1 \\ 2-x, & x < 1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2-x, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$

2. 下列几对函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是().

- (A) $f(x) = \lg x^2$ 与 $g(x) = 2 \lg x$ (B) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$
 (C) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$ (D) $f(x) = 1$ 与 $g(x) = \frac{x}{x}$

3. 反函数保持原来函数的()性质.

- (A) 单调性 (B) 奇偶性 (C) 周期性 (D) 有界性

4. 函数 $y = x + \tan x$ 是().

- (A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 非奇非偶函数 (D) 有界函数

5. 函数 $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ 是定义域内的().

- (A) 周期函数 (B) 单调函数 (C) 有界函数 (D) 无界函数

6. 函数 $y = |\sin x|$ 的周期是().

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

三、计算题

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \sqrt{5x+8}$;

(2) $y = \frac{1}{4-x^2}$;

(3) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{9-x^2}$;

(4) $y = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$;

(5) $y = \cos \sqrt{x}$;

(6) $y = \tan(1+x)$;

(7) $y = \arcsin(x-2)$;

(8) $y = \sqrt{5-x} + \arctan \frac{1}{x}$;

(9) $y = \ln(2+x)$;

(10) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

2. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{x}{x}$;

(2) $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, $g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$;

(3) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

3. 讨论下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y = \frac{x}{1-x}$, $(-\infty, 1)$;

(2) $y = x + \ln x$, $(0, +\infty)$.

4. 下列函数中哪些是偶函数? 哪些是奇函数? 哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y = x^4(1-x^2)$;

(2) $y = 3x^2 - x^3$;



$$(3) y = \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$(4) y = x(x-1)(x+1);$$

$$(5) y = \sin x - \cos x + 1;$$

$$(6) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

5. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

$$(1) y = \sin(x-2);$$

$$(2) y = \sin 4x;$$

$$(3) y = 1 + \cos \pi x;$$

$$(4) y = x \sin x;$$

$$(5) y = \cos^2 x.$$

6. 求下列函数的反函数：

$$(1) y = \sqrt[3]{x+5};$$

$$(2) y = \frac{2-x}{2+x};$$

$$(3) y = 1 + \ln(x+3);$$

$$(4) y = \frac{2^x}{2^x + 1}.$$

习题 1-2 初等函数

一、填空题

1. 函数 $y = \tan(3x^2 + 2)$ 是由函数_____和_____复合而成.

2. 函数 $y = 3^{\cos 2x}$ 的复合过程为_____.

3. 函数 $y = e^u$, $u = \sin v$, $v = 3 + x$ 的复合函数是_____.

二、选择题

1. 下列函数中，是基本初等函数的为().

$$(A) f(x) = x + 1 \quad (B) y = \sin \sqrt{x} \quad (C) f(x) = x^{\sqrt{2}} \quad (D) f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

2. 下列函数不是初等函数的是().

$$(A) y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (B) y = \begin{cases} 1 + x, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$(C) y = \sqrt{-2 - \cos x}$$

$$(D) y = \left[\frac{\sin(e^x - 1)}{\lg(1 + x^2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

3. 下列函数中不是复合函数的是().

$$(A) y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad (B) y = e^{1+x^2} \quad (C) y = \ln \sqrt{1-x} \quad (D) y = \sin(2x+1)$$

4. 函数 $y = 3^{\sin 2x}$ 由下列初等函数复合而成().

$$(A) y = 3^u, u = \sin v, v = 2x \quad (B) y = 3, y = \sin 2x$$

(C) $y = 3^{\sin u}$, $u = 2x$

(D) $y = 3$, $y = \sin 2x$, $y = 2$

三、计算题

1. 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数.

(1) $y = u^2$, $u = \sin x$; (2) $y = \cos u$, $u = 2x$; (3) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 + x^2$;

(4) $y = e^u$, $u = x^2$; (5) $y = u^2$, $u = e^x$.

2. 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域.

(1) $f(x^2)$;

(2) $f(\cos x)$;

(3) $f(x+a)$ ($a > 0$);

(4) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$).

3. 指出下列初等函数由哪些基本初等函数复合而成?

(1) $y = \lg \sin x^3$;

(2) $y = e^{\sqrt{1+\sin x}}$;

(3) $y = \arccos(\sqrt{\ln(x^2 - 1)})$.

自 测 题 1

一、求下列函数的定义域

1. $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;

2. $y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

3. $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x(x-1)}$;

4. $y = \sqrt{4-x^2} + \ln(x^2 - 1)$;

5. $f(x) = \frac{1}{\ln(2x-1)}$;

6. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \arcsin(5 - 2x)$;

7. $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = f[f(x)]$, 求函数 $g(x)$ 的定义域;

8. 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 求 $f(1 - \ln x)$ 的定义域.

二、计算题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$, 求 $f(3)$, $f(0)$, $f(-0.5)$.

2. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x(1 + \sqrt{1+x^2})$, $x > 0$, 求 $f(x)$.

3. 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{x}{1-x} + 1$, 求 $f(0)$, $f(x+1)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x^2)}$.

4. 设 $f(x)$ 是 x 的二次函数, 且 $f(0) = 1$, $f(x+1) - f(x) = 2x$, 求 $f(x)$.



三、判断下列函数的奇偶性

1. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$;

2. $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$;

3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

4. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ 1+x, & x > 0 \end{cases}$.

四、证明题

1. 证明函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 在它的整个定义域内有界.

2. 证明: 若 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $x=0$ 有定义, 则 $f(0)=0$.

五、求下列函数的反函数

1. $y = \lg(x+4)$;

2. $y = 1 + \lg(x+2)$.

第2章 极限与连续

一、教学要求

1. 理解数列极限和函数极限的概念, 掌握极限的四则运算法则; 理解无穷小与无穷大的概念, 了解无穷小的性质, 理解函数极限与无穷小的关系, 知道两个无穷小比较的意义; 掌握两个重要的极限.

2. 了解函数连续性的概念, 会求函数的间断点; 知道初等函数连续性的概念, 掌握初等函数的极限求法; 了解闭区间上连续函数的性质.

二、内容提要

本章主要介绍了函数极限和连续的概念以及函数极限的一些计算方法.

1. 基本内容: 数列、函数极限的概念; 无穷小与无穷大; 极限的性质与四则运算法则; 两个重要极限; 函数在一点连续的概念; 间断点的类型.

2. 求函数极限的常用方法有:

- (1) 利用极限定义求极限(包括左、右极限与极限存在的关系);
- (2) 利用极限的四则运算法则求极限;
- (3) 利用无穷小的性质求极限;
- (4) 利用无穷小与无穷大的关系求极限;
- (5) 利用两个重要极限求极限;
- (6) 利用函数的连续性求极限.

3. 需要注意的是:

(1) 求极限的四则运算法则前提条件, 参与运算的各个函数极限都要存在, 利用商的运算法则求极限时, 还要求做分母的函数极限不为零;

(2) 判断分段函数在分段点处的连续性时需要分三步进行: 第一步求出该点的函数值; 第二步求出分段点的左右极限; 第三步判断极限值与函数的关系.

三、解题指导

例 2-1 求下列极限:



$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 6);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 4}{x^4 + x^2 + 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+5}{x-5};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}.$$

解: (1) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 6) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2) - \lim_{x \rightarrow 2} (2x) + \lim_{x \rightarrow 2} 6$
 $= 3(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 6$
 $= 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 6$
 $= 14.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 4}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x^2 - 4)}{\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x^4 + x^2 + 1)} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}.$$

(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 5} (x-5) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x+5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 5} (x-5)}{\lim_{x \rightarrow 5} (x+5)} = \frac{0}{10} = 0$, 即 $\frac{x-5}{x+5}$ 是

$x \rightarrow 5$ 时的无穷小量, 由无穷小量与无穷大量的倒数关系, 可得 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+5}{x-5} = \infty$.

(4) 所给函数的分子、分母的极限均为 0, 但它们都有趋向于 0 的公因子 $(x-1)$, 可约去这个不为零的公因子, 再利用商的极限运算法则便可求出所给极限, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

例 2-2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$$

解: (1) 因为 $\left| \cos \frac{1}{x^2} \right| \leq 1$, 所以 $\cos \frac{1}{x^2}$ 是有界函数; 又因为当 $x \rightarrow 0$ 时, x 是无穷小量,

故由无穷小量的性质, 可得 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x^2} = 0$.

(2) 变换一下形式, 与上题同理, 可得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$.

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} \stackrel{\text{令 } x = \sin t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

例 2-3 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx+c};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+3};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{2}{x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{x}.$$