普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

热力学·统计物理（第四版）学习辅导书

汪志诚

高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

热力学·统计物理（第四版）学习辅导书

汪志诚

高等教育出版社
Higher Education Press

内容简介

本书是与《热力学 · 统计物理(第四版)》配套的学习辅导书。该书的主教材是被广大高校热力学 · 统计物理课程选用的一本经典教材,其第四版由高等教育出版社于2008年12月出版。本书对教材中的全部习题给出了分析和解题思路,对部分习题还介绍了科研实际中的背景,帮助学生加强对所学知识的理解,巩固和提高学习效果。

本书可供选用《热力学 · 统计物理(第四版)》的师生作为教学和学习参考书使用,也可供其他高等学校理工科各专业师生和社会读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

热力学 · 统计物理(第4版)学习辅导书/汪志诚.
北京:高等教育出版社,2009.3
ISBN 978-7-04-025771-7

Ⅰ.热…　Ⅱ.汪…　Ⅲ.①热力学-高等学校-教学参考资料②统计物理学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O414

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第010895号

策划编辑 高　建　**责任编辑** 李　茜　**封面设计** 张　楠　**责任绘图** 尹　莉
版式设计 余　杨　**责任校对** 姜国萍　**责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009年3月第1版
印　　张	14.25	印　　次	2009年3月第1次印刷
字　　数	260 000	定　　价	18.70元

物料号　25771-00

编写说明

本书是与汪志诚编写的《热力学·统计物理(第四版)》配套的参考书。书中包含《热力学·统计物理(第四版)》教材中全部习题和一些补充题的解答。本书注重物理内涵的分析和物理背景的阐述,有的习题还介绍了有关的预备知识。希望本书对初学者学习热力学统计物理课程能有所帮助。

本书的编排与《热力学·统计物理(第四版)》教材一致,分为十一章。教材中原有的习题和补充题按习题内容统一编序。为了便于查阅,在编号后加了注,例如1-1(原1.1题),1-7(补充题)等。《热力学·统计物理(第四版)》教材中的公式和章节将不加说明直接引用,例如式(1.15.4),§2.7等,其他文献和书籍引用时将说明出处。

本书在编写过程中得到兰州大学物理学院领导的大力支持,在此表示衷心的感谢。

编者水平有限,书中错误和不足、不妥之处在所难免,欢迎读者指正。

编者

2008年6月于兰州大学

目　录

第一章 热力学的基本规律

1-1 （原 1.1 题）

试求理想气体的体胀系数 α，压强系数 β 和等温压缩系数 κ_T.

解 已知理想气体的物态方程为

$$pV = nRT, \tag{1}$$

由此易得

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}, \tag{2}$$

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}, \tag{3}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \left(-\frac{1}{V}\right)\left(-\frac{nRT}{p^2}\right) = \frac{1}{p}. \tag{4}$$

1-2 （原 1.2 题）

试证明任何一种具有两个独立参量 T,p 的物质，其物态方程可由实验测得的体胀系数 α 及等温压缩系数 κ_T，根据下述积分求得

$$\ln V = \int (\alpha \mathrm{d}T - \kappa_T \mathrm{d}p).$$

如果 $\alpha = \dfrac{1}{T}, \kappa_T = \dfrac{1}{p}$，试求物态方程.

解 以 T,p 为自变量，物质的物态方程为

$$V = V(T,p),$$

其全微分为

$$\mathrm{d}V = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p. \tag{1}$$

全式除以 V，有

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p.$$

根据体胀系数 α 和等温压缩系数 κ_T 的定义，可将上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \alpha \mathrm{d}T - \kappa_T \mathrm{d}p. \tag{2}$$

上式是以 T,p 为自变量的完整微分，沿一任意的积分路线积分，有

$$\ln V = \int (\alpha \mathrm{d}T - \kappa_T \mathrm{d}p). \tag{3}$$

如果实验测得 α 和 κ_T 作为 T、P 的函数,由上式可得物质的物态方程。

若 $\alpha = \dfrac{1}{T}, \kappa_T = \dfrac{1}{p}$,式(3)可表为

$$\ln V = \int \left(\frac{1}{T}\mathrm{d}T - \frac{1}{p}\mathrm{d}p \right). \tag{4}$$

选择图 1-1 所示的积分路线,从(T_0, p_0)积分到(T, p_0),再积分到(T, p),相应地体积由 V_0最终变到 V,有

$$\ln \frac{V}{V_0} = \ln \frac{T}{T_0} - \ln \frac{p}{p_0},$$

即

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = C\ (\text{常量}),$$

或

$$pV = CT. \tag{5}$$

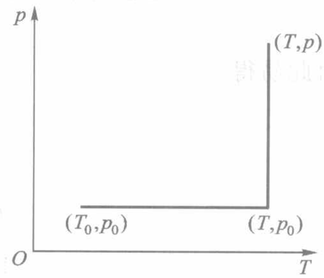

图 1-1

式(5)就是由所给 $\alpha = \dfrac{1}{T}, \kappa_T = \dfrac{1}{p}$ 求得的物态方程. 确定常量 C 需要进一步的实验数据.

1-3 (原 1.4 题)

简单固体和液体的体胀系数 α 和等温压缩系数 κ_T数值都很小,在一定温度范围内可以把 α 和 κ_T看作常量. 试证明简单固体和液体的物态方程可近似为(式(1.3.14))

$$V(T, p) = V_0(T_0, 0)[1 + \alpha(T - T_0) - \kappa_T p].$$

解 以 T, p 为状态参量,物质的物态方程为

$$V = V(T, p).$$

根据习题 1-2 式(2),有

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \alpha \mathrm{d}T - \kappa_T \mathrm{d}p. \tag{1}$$

将上式沿图 1-1 所示的路线求线积分,在 α 和 κ_T可以看作常量的情形下,有

$$\ln \frac{V}{V_0} = \alpha(T - T_0) - \kappa_T(p - p_0), \tag{2}$$

或

$$V(T, p) = V(T_0, p_0) \mathrm{e}^{\alpha(T - T_0) - \kappa_T(p - p_0)}. \tag{3}$$

考虑到 α 和 κ_T的数值很小,将指数函数展开,准确到 α 和 κ_T的线性项,有

$$V(T,p)=V(T_0,p_0)[1+\alpha(T-T_0)-\kappa_T(p-p_0)]. \tag{4}$$

如果取 $p_0=0$,即有

$$V(T,p)=V(T_0,0)[1+\alpha(T-T_0)-\kappa_T p]. \tag{5}$$

1-4 (原 1.3 题)

在 0 ℃和 1 atm(1 atm = 101 325 Pa)下,测得一铜块的体胀系数和等温压缩系数分别为 $\alpha=4.85\times10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$ 和 $\kappa_T=7.8\times10^{-7}$ atm. α 和 κ_T 可近似看作常量. 今使铜块加热至 10 ℃. 问:

(a) 压强要增加多少 atm 才能使铜块的体积维持不变?

(b) 若压强增加 100 atm,铜块的体积改变多少?

解 (a) 根据 1-2 题式(2),有

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=\alpha\mathrm{d}T-\kappa_T\mathrm{d}p. \tag{1}$$

上式给出,在邻近的两个平衡态,系统的体积差 $\mathrm{d}V$, 温度差 $\mathrm{d}T$ 和压强差 $\mathrm{d}p$ 之间的关系. 如果系统的体积不变,$\mathrm{d}p$ 与 $\mathrm{d}T$ 的关系为

$$\mathrm{d}p=\frac{\alpha}{\kappa_T}\mathrm{d}T. \tag{2}$$

在 α 和 κ_T 可以看作常量的情形下,将式(2)积分可得

$$p_2-p_1=\frac{\alpha}{\kappa_T}(T_2-T_1). \tag{3}$$

将式(2)积分得到式(3)首先意味着,经准静态等容过程后,系统在终态和初态的压强差和温度差满足式(3). 但是应当强调,只要初态 (V,T_1) 和终态 (V,T_2) 是平衡态,两态间的压强差和温度差就满足式(3). 这是因为,平衡状态的状态参量给定后,状态函数就具有确定值,与系统到达该状态的历史无关. 本题讨论的铜块加热的实际过程一般不会是准静态过程. 在加热过程中,铜块各处的温度可以不等,铜块与热源可以存在温差等等,但是只要铜块的初态和终态是平衡态,两态的压强和温度差就满足式(3).

将所给数据代入,可得

$$p_2-p_1=\frac{4.85\times10^{-5}}{7.8\times10^{-7}}\times10\ \mathrm{atm}=622\ \mathrm{atm}.$$

因此,将铜块由 0 ℃加热到 10 ℃,要使铜块体积保持不变,压强要增加 622 atm.

(b) 1-3 题式(4)可改写为

$$\frac{\Delta V}{V_1}=\alpha(T_2-T_1)-\kappa_T(p_2-p_1). \tag{4}$$

将所给数据代入,有

$$\frac{\Delta V}{V_1}=4.85\times10^{-5}\times10-7.8\times10^{-7}\times100$$
$$=4.07\times10^{-4}.$$

因此,将铜块由 0 ℃加热至 10 ℃,压强由 1 atm 增加 100 atm,铜块体积将增加原体积的 4.07×10^{-4}倍.

1－5 (原 1.5 题)

描述金属丝的几何参量是长度 L,力学参量是张力 $\mathscr{T}$,物态方程是

$$f(\mathscr{T},L,T)=0.$$

实验通常在 1 atm 下进行,其体积变化可以忽略.

线胀系数定义为

$$\alpha=\frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathscr{T}}.$$

等温杨氏模量定义为

$$E=\frac{L}{A}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial L}\right)_{T},$$

其中 A 是金属丝的截面积. 一般来说,α 和 E 是 T 的函数,对 $\mathscr{T}$仅有微弱的依赖关系,如果温度变化范围不大,可以看作常量. 假设金属丝两端固定,试证明,当温度由 T_1降至 T_2时,其张力的增加为

$$\Delta\mathscr{T}=-EA\alpha(T_2-T_1).$$

解 由物态方程

$$f(\mathscr{T},L,T)=0 \tag{1}$$

知偏导数间存在以下关系:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathscr{T}}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathscr{T}}\right)_{L}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial L}\right)_{T}=-1. \tag{2}$$

所以,有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial T}\right)_{L}&=-\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathscr{T}}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial L}\right)_{T}\\&=-L\alpha\cdot\frac{A}{L}E\\&=-\alpha AE.\end{aligned} \tag{3}$$

积分得

$$\Delta\mathscr{T}=-EA\alpha(T_2-T_1). \tag{4}$$

在 $T_2<T_1$ 的情形下 $\Delta\mathscr{T}$是正的. 与 1－4 题类似,上述结果不限于保持金属丝长度不变的准静态冷却过程,只要金属丝的初态和终态是平衡态,两态的张力差

$$\Delta\mathscr{T}=\mathscr{T}(L,T_2)-\mathscr{T}(L,T_1)$$

就满足式(4),与经历的过程无关.

1-6 (原1.6题)

一理想弹性丝的物态方程为

$$\mathscr{T}=bT\left(\frac{L}{L_0}-\frac{L_0^2}{L^2}\right),$$

其中 L 是长度,L_0是张力 $\mathscr{T}$ 为零时的 L 值,它只是温度 T 的函数,b 是常量. 试证明:

(a) 等温杨氏模量为

$$E=\frac{bT}{A}\left(\frac{L}{L_0}+\frac{2L_0^2}{L^2}\right).$$

式中 A 是弹性丝的截面积. 在张力为零时,$E_0=\frac{3bT}{A}$.

(b) 线胀系数为

$$\alpha=\alpha_0-\frac{1}{T}\frac{\dfrac{L^3}{L_0^3}-1}{\dfrac{L^3}{L_0^3}+2},$$

其中 $\alpha_0=\frac{1}{L_0}\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}T}$.

解 (a) 根据题设,理想弹性丝的物态方程为

$$\mathscr{T}=bT\left(\frac{L}{L_0}-\frac{L_0^2}{L^2}\right), \tag{1}$$

由此可得等温杨氏模量为

$$\begin{aligned}E&=\frac{L}{A}\left(\frac{\partial\mathscr{T}}{\partial L}\right)_T\\&=\frac{L}{A}bT\left(\frac{1}{L_0}+\frac{2L_0^2}{L^3}\right)\\&=\frac{bT}{A}\left(\frac{L}{L_0}+\frac{2L_0^2}{L^2}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

张力为零时,$L=L_0$,$E_0=\frac{3bT}{A}$.

(b) 线胀系数的定义为

$$\alpha=\frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathscr{T}}.$$

由链式关系知

$$\alpha = -\frac{1}{L}\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial T}\right)_L\left(\frac{\partial L}{\partial \mathscr{T}}\right)_T, \tag{3}$$

而

$$\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial T}\right)_L = b\left(\frac{L}{L_0}-\frac{L_0^2}{L^2}\right)+bT\left(-\frac{L}{L_0^2}-\frac{2L_0}{L^2}\right)\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}T},$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{T}}{\partial L}\right)_T = bT\left(\frac{1}{L_0}+\frac{2L_0^2}{L^3}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{L}\frac{b\left(\frac{L}{L_0}-\frac{L_0^2}{L^2}\right)-bT\left(\frac{L}{L_0^2}+\frac{2L_0}{L^2}\right)\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}T}}{bT\left(\frac{1}{L_0}+\frac{2L_0^2}{L^3}\right)}\\ &=\frac{1}{L_0}\frac{\mathrm{d}L_0}{\mathrm{d}T}-\frac{1}{T}\frac{\frac{L^3}{L_0^3}-1}{\frac{L^3}{L_0^3}+2}.\end{aligned} \tag{4}$$

1－7 （补充题）

在 0 ℃和 1 atm 下，空气的密度为 1.29 kg·m^{-3}. 空气的定压比热容 $c_p=0.996\times10^3\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$，$\gamma=1.41$. 今有 27 m^{3}的空气，试计算：

（a）若维持体积不变，将空气由 0 ℃加热至 20 ℃所需的热量.

（b）若维持压强不变，将空气由 0 ℃加热至 20 ℃所需的热量.

（c）若容器有裂缝，外界压强为 1 atm，使空气由 0 ℃缓慢地加热至 20 ℃所需的热量.

解 （a）由题给空气密度可以算得 27 m^{3}空气的质量 m_1 为

$$m_1 = 1.29\times27\ \mathrm{kg}=34.83\ \mathrm{kg}.$$

定容比热容可由所给定压比热容算出

$$c_V=\frac{c_p}{\gamma}=\frac{0.996\times10^3}{1.41}\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}=0.706\times10^3\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}.$$

维持体积不变，将空气由 0 ℃加热至 20 ℃所需热量 Q_V 为

$$\begin{aligned}Q_V &= m_1c_V(T_2-T_1)\\ &=34.83\times0.706\times10^3\times20\ \mathrm{J}\\ &=4.920\times10^5\ \mathrm{J}.\end{aligned}$$

（b）维持压强不变，将空气由 0 ℃加热至 20 ℃所需热量 Q_p 为

$$Q_p=m_1c_p(T_2-T_1)$$

$$= 34.83 \times 0.996 \times 10^3 \times 20\ \mathrm{J}$$
$$= 6.938 \times 10^5\ \mathrm{J}.$$

(c) 若容器有裂缝，在加热过程中气体将从裂缝漏出，使容器内空气质量发生变化. 根据理想气体的物态方程

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

M 为空气的平均摩尔质量，在压强和体积不变的情形下，容器内气体的质量与温度成反比. 以 m_1，T_1 表示气体在初态的质量和温度，m 表示温度为 T 时气体的质量，有

$$m_1 T_1 = mT,$$

所以在过程(c)中所需的热量 Q 为

$$\begin{aligned} Q &= c_p \int_{T_1}^{T_2} m(T)\,\mathrm{d}T \\ &= m_1 T_1 c_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T} \\ &= m_1 T_1 c_p \ln \frac{T_2}{T_1}. \end{aligned}$$

式中用定压比热容 c_p，意味着已计及气体从裂缝漏出对外所做的功. 将所给数据代入，得

$$\begin{aligned} Q &= 34.83 \times 273 \times 0.996 \times 10^3 \ln \frac{293}{273}\ \mathrm{J} \\ &= 6.678 \times 10^5\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

1－8 （原 1.7 题）

抽成真空的小匣带有活门，打开活门让气体冲入. 当压强达到外界压强 p_0 时将活门关上. 试证明：小匣内的空气在没有与外界交换热量之前，它的内能 U 与原来在大气中的内能 U_0 之差为 $U - U_0 = p_0 V_0$，其中 V_0 是它原来在大气中的体积. 若气体是理想气体，求它的温度和体积.

解 将冲入小匣的气体看作系统. 系统冲入小匣后的内能 U 与其原来在大气中的内能 U_0 由式(1.5.3)

$$U - U_0 = W + Q \tag{1}$$

确定. 由于过程进行得很迅速，过程中系统与外界没有热量交换，$Q = 0$. 过程中外界对系统所做的功可以分为 W_1 和 W_2 两部分来考虑. 一方面，大气将系统压入小匣，使其在大气中的体积由 V_0 变为零. 由于小匣很小，在将气体压入小匣的过程中大气压强 p_0 可以认为没有变化，即过程是等压的（但不是准静态的）. 过程中大气对系统所做的功为

$$W_1 = -p_0 \Delta V = p_0 V_0.$$

另一方面,小匣既抽为真空,系统在冲入小匣的过程中不受外界阻力,与外界也就没有功变换,则

$$W_2 = 0.$$

因此式(1)可表为

$$U - U_0 = p_0 V_0. \tag{2}$$

如果气体是理想气体,根据式(1.3.11)和(1.7.10),有

$$p_0 V_0 = nRT_0, \tag{3}$$

$$U_0 = \frac{nRT_0}{\gamma - 1}, \quad U = \frac{nRT}{\gamma - 1}. \tag{4}$$

式中 n 是系统所含物质的量. 代入式(2)即有

$$T = \gamma T_0. \tag{5}$$

活门是在系统的压强达到 p_0 时关上的,所以气体在小匣内的压强也可看作 p_0,其物态方程为

$$p_0 V = nR\gamma T_0. \tag{6}$$

与式(3)比较,知

$$V = \gamma V_0. \tag{7}$$

1-9 (原 1.8 题)

满足 $pV^n = C$(常量)的过程称为多方过程,其中常数 n 称为多方指数. 试证明:理想气体在多方过程中的热容量 C_n 为

$$C_n = \frac{n-\gamma}{n-1} C_V.$$

解 根据式(1.6.1),多方过程中的热容量

$$C_n = \lim_{\Delta T \to 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_n = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_n + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_n. \tag{1}$$

对于理想气体,内能 U 只是温度 T 的函数,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_n = C_V,$$

所以

$$C_n = C_V + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_n. \tag{2}$$

将多方过程的过程方程式 $pV^n = C$ 与理想气体的物态方程联立,消去压强 p 可得

$$TV^{n-1} = C_1 \text{(常量)}. \tag{3}$$

将上式微分,有

$$V^{n-1} \mathrm{d}T + (n-1) V^{n-2} T \mathrm{d}V = 0,$$

所以

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_n = -\frac{V}{(n-1)T}. \tag{4}$$

代入式(2),即得

$$\begin{aligned} C_n &= C_V - \frac{pV}{T(n-1)} \\ &= \frac{n-\gamma}{n-1} C_V, \end{aligned} \tag{5}$$

其中用了式(1.7.8)和(1.7.9).

1-10 (原1.9题)

试证明,理想气体在某一过程中的热容量 C_n 如果是常量,该过程一定是多方过程. 多方指数 $n = \frac{C_n - C_p}{C_n - C_V}$. 假设气体的定压热容量和定容热容量是常量.

解 根据热力学第一定律,有

$$dU = đQ + đW. \tag{1}$$

对于准静态过程有

$$đW = -p dV,$$

对理想气体有

$$dU = C_V dT,$$

气体在过程中吸收的热量为

$$đQ = C_n dT,$$

因此式(1)可表为

$$(C_n - C_V) dT = p dV. \tag{2}$$

用理想气体的物态方程 $pV = \nu RT$ 除上式,并注意 $C_p - C_V = \nu R$,可得

$$(C_n - C_V)\frac{dT}{T} = (C_p - C_V)\frac{dV}{V}. \tag{3}$$

将理想气体的物态方程全式求微分,有

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}. \tag{4}$$

式(3)与式(4)联立,消去 $\frac{dT}{T}$,有

$$(C_n - C_V)\frac{dp}{p} + (C_n - C_p)\frac{dV}{V} = 0. \tag{5}$$

令 $n = \frac{C_n - C_p}{C_n - C_V}$,可将式(5)表为

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}+n\frac{\mathrm{d}V}{V}=0. \tag{6}$$

如果 C_p,C_V和 C_n都是常量,将上式积分即得

$$pV^n=C\ (\text{常量}). \tag{7}$$

式(7)表明,过程是多方过程.

1-11 (原1.10题)

声波在气体中的传播速度为

$$a=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}.$$

假设气体是理想气体,其定压和定容热容量是常量. 试证明气体单位质量的内能 u 和焓 h 可由声速及 γ 给出:

$$u=\frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)}+u_0,$$

$$h=\frac{a^2}{\gamma-1}+h_0,$$

其中 u_0,h_0为常量.

解 根据式(1.8.9),声速 a 的平方为

$$a^2=\gamma pv, \tag{1}$$

其中 v 是单位质量的气体体积. 理想气体的物态方程可表为

$$pV=\frac{m}{M}RT,$$

式中 m 是气体的质量,M 是气体的摩尔质量. 对于单位质量的气体,有

$$pv=\frac{1}{M}RT, \tag{2}$$

代入式(1)得

$$a^2=\frac{\gamma}{M}RT. \tag{3}$$

以 u,h 表示理想气体的比内能和比焓(单位质量的内能和焓). 由式(1.7.10)—(1.7.12)知

$$Mu=\frac{RT}{\gamma-1}+Mu_0,$$

$$Mh=\frac{\gamma RT}{\gamma-1}+Mh_0. \tag{4}$$

将式(3)代入,即有

$$u=\frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)}+u_0,$$

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1} + h_0. \tag{5}$$

式(5)表明,如果气体可以看作理想气体,测定气体中的声速和 γ 即可确定气体的比内能和比焓.

1-12 (原1.11题)

大气温度随高度降低的主要原因是空气在对流层中不断发生对流. 由于气压随高度而降低,空气上升时膨胀,下降时收缩. 空气的导热系数很小,膨胀和收缩的过程可以认为是绝热过程. 试计算大气温度随高度的变化率 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$,并给出数值结果.

解 取 z 轴沿竖直方向(向上). 以 $p(z)$ 和 $p(z+\mathrm{d}z)$ 分别表示在竖直高度为 z 和 $z+\mathrm{d}z$ 处的大气压强. 二者之差等于两个高度之间由大气重量产生的压强,即

$$p(z) = p(z+\mathrm{d}z) + \rho(z) g \mathrm{d}z, \tag{1}$$

式中 $\rho(z)$ 是高度为 z 处的大气密度,g 是重力加速度. 将 $p(z+\mathrm{d}z)$ 展开,有

$$p(z+\mathrm{d}z) = p(z) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} p(z) \mathrm{d}z,$$

代入式(1),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} p(z) = -\rho(z) g. \tag{2}$$

式(2)给出由于重力的存在导致的大气压强随高度的变化率.

以 M 表大气的平均摩尔质量. 在高度为 z 处,大气的摩尔体积为 $\frac{M}{\rho(z)}$,则物态方程为

$$p(z) \frac{M}{\rho(z)} = RT(z), \tag{3}$$

$T(z)$ 是竖直高度为 z 处的温度. 代入式(2),消去 $\rho(z)$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} p(z) = -\frac{Mg}{RT(z)} p(z). \tag{4}$$

由式(1.8.6)易得气体在绝热过程中温度随压强的变化率为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p}. \tag{5}$$

综合式(4)和式(5),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} T(z) = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} p(z)$$

$$= -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{Mg}{R}. \tag{6}$$

大气的 $\gamma = 1.41$（大气的主要成分是氮和氧，都是双原子分子），平均摩尔质量为 $M = 29\times 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$，$g = 9.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，代入式(6)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}T(z) = -10\ \mathrm{K\cdot km^{-1}}. \tag{7}$$

式(7)表明，每升高 1 km，温度降低 10 K. 这结果是粗略的. 由于各种没有考虑的因素，实际每升高 1 km，大气温度降低 6 K 左右.

1-13 （原 1.12 题）

假设理想气体的 C_p 和 C_V 之比 γ 是温度的函数. 试求在准静态绝热过程中 T 和 V 的关系. 该关系式中要用到一个函数 $F(T)$，其表达式为

$$\ln F(T) = \int \frac{\mathrm{d}T}{(\gamma-1)T}.$$

解 根据式(1.8.1)，理想气体在准静态绝热过程中满足

$$C_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V = 0. \tag{1}$$

用物态方程 $pV = nRT$ 除上式，第一项用 nRT 除，第二项用 pV 除，可得

$$\frac{C_V}{nR}\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0. \tag{2}$$

利用式(1.7.8)和(1.7.9)，

$$C_p - C_V = nR,$$

$$\frac{C_p}{C_V} = \gamma,$$

可将式(2)改写为

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0. \tag{3}$$

将上式积分，如果 γ 是温度的函数，定义

$$\ln F(T) = \int \frac{1}{\gamma-1}\frac{\mathrm{d}T}{T}, \tag{4}$$

可得

$$\ln F(T) + \ln V = C_1\ (\text{常量}), \tag{5}$$

或

$$F(T)V = C\ (\text{常量}). \tag{6}$$

式(6)给出当 γ 是温度的函数时，理想气体在准静态绝热过程中 T 和 V 的关系.

1-14 （原 1.13 题）