

非线性动力学理论 与应用的新进展

张 伟 胡海岩 主编



科学出版社

www.sciencep.com

非线性动力学丛书 10

非线性动力学理论 与应用的新进展

张 伟 胡海岩 主编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要研究工程系统中的非线性动力学、分叉和混沌理论、控制理论及其应用,重点介绍近几年来国内外的最新进展,包括高维非线性系统的多脉冲全局分叉、时滞动力系统、非光滑动力系统等非线性动力系统、C-L方法、规范形的计算、非线性随机优化控制、后绝对稳定性、网络结构与动力学、非线性色散波、非线性系统大范围运动动力学、碰撞振动系统、微转子系统、轴向运动弦线和梁的非线性动力学。

本书可供高等院校力学、机械、数学、物理、航空航天、土木工程等专业的高年级本科生、研究生阅读学习,也可作为教师和科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力学理论与应用的新进展/张伟等主编. —北京:科学出版社,2009
(非线性动力学丛书;10)

ISBN 978-7-03-025699-7

I. 非… II. 张… III. 非线性力学:动力学—研究 IV. O313

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第176199号

责任编辑:吕虹 赵彦超 杨然/责任校对:陈玉凤

责任印制:钱玉芬/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年11月第一版 开本: B5(720×1000)

2009年11月第一次印刷 印张: 34 1/4

印数: 1—2 000 字数: 675 000

定价: 98.00元

如有印装质量问题,我社负责调换

《非线性动力学丛书》编委会

主 编 胡海岩

编 委 (以汉语拼音为序)

陈立群 冯再春 何国威

金栋平 马兴瑞 孟 光

余振苏 徐 鉴 张 伟

周又和

《非线性动力学丛书》序

真实的动力系统几乎都含有各种各样的非线性因素, 诸如机械系统中的间隙、干摩擦, 结构系统中的材料弹塑性、构件大变形, 控制系统中的元器件饱和特性、变结构控制策略等. 实践中, 人们经常试图用线性模型来替代实际的非线性系统, 以求方便地获得其动力学行为的某种逼近. 然而, 被忽略的非线性因素常常会在分析和计算中引起无法接受的误差, 使得线性逼近徒劳无功. 特别对于系统的长时间历程动力学问题, 有时即使略去很微弱的非线性因素, 也会在分析和计算中出现本质性的错误.

因此, 人们很早就开始关注非线性系统的动力学问题. 早期研究可追溯到 1673 年 Huygens 对单摆大幅摆动非等时性的观察. 从 19 世纪末起, Poincaré, Lyapunov, Birkhoff, Andronov, Arnold 和 Smale 等数学家和力学家相继对非线性动力系统的理论进行了奠基性研究, Duffing, van der Pol, Lorenz, Ueda 等物理学家和工程师则在实验和数值模拟中获得了许多启示性发现. 他们的杰出贡献相辅相成, 形成了分岔、混沌、分形的理论框架, 使非线性动力学在 20 世纪 70 年代成为一门重要的前沿学科, 并促进了非线性科学的形成和发展.

近 20 年来, 非线性动力学在理论和应用两个方面均取得了很大进展. 这促使越来越多的学者基于非线性动力学观点来思考问题, 采用非线性动力学理论和方法, 对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性系统建立数学模型, 预测其长期的动力学行为, 揭示内在的规律性, 提出改善系统品质的控制策略. 一系列成功的实践使人们认识到: 许多过去无法解决的难题源于系统的非线性, 而解决难题的关键在于对问题所呈现的分岔、混沌、分形、孤立子等复杂非线性动力学现象具有正确的认识和理解.

近年来, 非线性动力学理论和方法正从低维向高维乃至无穷维发展. 伴随着计算机代数、数值模拟和图形技术的进步, 非线性动力学所处理的问题规模和难度不断提高, 已逐步接近一些实际系统. 在工程科学界, 以往研究人员对于非线性问题绕道而行的现象正在发生变化. 人们不仅力求深入分析非线性对系统动力学的影响, 使系统和产品的动态设计、加工、运行与控制满足日益提高的运行速度和精度需求, 而且开始探索利用分岔、混沌等非线性现象造福人类.

在这样的背景下, 有必要组织在工程科学、生命科学、社会科学等领域中从事非线性动力学研究的学者撰写一套非线性动力学丛书, 着重介绍近几年来非线性动力学理论和方法在上述领域的一些研究进展, 特别是我国学者的研究成果, 为从事

非线性动力学理论及应用研究的人员,包括硕士研究生和博士研究生等,提供最新的理论、方法及应用范例.在科学出版社的大力支持下,组织出版了这套《非线性动力学丛书》.

本套丛书在选题和内容上有别于郝柏林先生主编的《非线性科学丛书》(上海教育出版社出版),它更加侧重于对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性动力学问题进行建模、理论分析、计算和实验.与国外的同类丛书相比,它更具有整体的出版思想,每分册阐述一个主题,互不重复等特点.丛书的选题主要来自我国学者在国家自然科学基金等资助下取得的研究成果,有些研究成果已被国内外学者广泛引用或应用于工程和社会实践,还有一些选题取自作者多年的教学成果.

希望作者、读者、丛书编委会和科学出版社共同努力,使这套丛书取得成功.

胡海岩

2001年8月

前 言

为了促进我国从事非线性动力学与控制研究工作的青年学者的成长,培养后备人才,交流最新研究成果,并向国内外同行学习,由国家自然科学基金委员会数理科学部主办、北京工业大学承办的“非线性动力学与控制”高级讲习班于2006年8月15日~21日在北京工业大学成功举办。参加此次高级讲习班的青年教师和研究生共200多人,分别来自清华大学、北京大学、浙江大学、上海交通大学、北京工业大学、北京航空航天大学、西安交通大学、南京航空航天大学、西北工业大学、上海大学、天津大学、湖南大学等50余所高校。此次高级讲习班是继16年前在秦皇岛燕山大学举办的第一届“非线性振动”高级讲习班之后的第二次全国性高级讲习班。

此次“非线性动力学与控制”高级讲习班邀请的主讲教授都是在非线性动力学与控制领域做出突出贡献的杰出学者,他们的研究工作在全国乃至世界都处于先进水平。主讲教授中有四名中国科学院院士和中国工程院院士,三名国家杰出青年科学基金获得者,一名来自加拿大西安大略大学的教授,一名来自香港城市大学的教授,还有六名国内的知名专家。在此次高级讲习班中所有专家都作了关于非线性动力学国际前沿领域的极为精彩的讲座,系统地讲述了他们近十年来所取得的科研成果和本领域的前沿动态。在讲授过程中,青年教师和研究生与专家们进行了零距离的接触,亲身感受到了大师们渊博的知识、深厚的学术造诣、扎实的学术作风和无私的奉献精神。

本书汇集了本次“非线性动力学与控制”高级讲习班部分讲座的内容,可以引领读者尽快了解和进入非线性动力学与控制领域的国际研究前沿。全书共10章,第1章由胡海岩院士撰写,第2章由张伟教授和姚明辉撰写,第3章由陆启韶教授和秦志英撰写,第4章由陈予恕院士和陈芳启教授撰写,第5章由李继彬教授和赵晓华教授撰写,第6章由郁培教授撰写,第7章由黄琳院士、杨莹和段志生教授撰写,第8章由刘曾荣教授撰写,第9章由戴晖辉教授撰写,第10章由陈立群教授撰写,全书由张伟和胡海岩总编。由于时间所限,不足之处敬请读者谅解。

最后,衷心感谢国家自然科学基金委员会对这次高级讲习班的资助,感谢北京工业大学出版基金对于本书的资助。

作 者

2008年9月

目 录

《非线性动力学丛书》序

前言

第 1 章 时滞动力系统的稳定性与分叉	胡海岩
1.1 前言	1
1.2 线性时滞系统的稳定性判据	2
1.3 时滞稳定性问题	7
1.4 稳定性切换问题	26
1.5 Hopf 分叉及周期运动的多尺度分析	38
1.6 周期运动的数值计算	51
1.7 含时滞状态反馈的 Duffing 振子大范围分叉	56
1.8 含时滞反馈的 Duffing 振子全局动力学	70
参考文献	78
第 2 章 高维系统的多脉冲全局分叉理论及其在悬臂梁中的应用	张伟, 姚明辉
2.1 引言	80
2.2 能量相位法	83
2.3 广义 Melnikov 方法	89
2.4 高维系统的规范形计算	95
2.5 运动方程的建立和摄动分析	102
2.6 解耦系统的动力学	113
2.7 多脉冲轨道的存在性	116
2.8 利用能量相位方法研究多脉冲轨道	124
2.9 混沌运动的数值计算	131
2.10 结论	135
参考文献	136
第 3 章 非光滑动力系统理论和应用	陆启韶, 秦志英
3.1 引言	142
3.2 非光滑力学系统的常用模型	143
3.3 脉冲微分方程和微分包含	147
3.4 非光滑系统周期运动的存在性和稳定性	152
3.5 非光滑系统 Floquet 乘子和 Lyapunov 指数的计算	158

3.6	非光滑动力系统的分叉与混沌	173
3.7	总结与展望	200
	参考文献	201
第 4 章	非自治系统周期解分叉理论及其发展	陈予恕, 陈芳启
4.1	前言	202
4.2	非线性 Mathieu 方程周期解的分叉理论	204
4.3	奇异性及识别问题	215
4.4	普适开折理论	236
4.5	分类问题	249
	参考文献	251
第 5 章	等变非线性动力系统的全局分叉	李继彬, 赵晓华
5.1	等变动力系统的定义和例子	253
5.2	平面等变动力系统的全局分叉	259
5.3	平面等变系统的全局和局部分叉举例: 极限环分布	261
5.4	高维等变动力系统的全局分叉	280
5.5	等变系统全局分叉的应用: 对流模型的分叉	287
5.6	一类三维流的吸引不变环面与扭结周期轨道	297
	参考文献	302
第 6 章	非线性动力系统的规范形计算, Hopf 分叉的控制和应用研究	郁培
6.1	引言	304
6.2	规范形和焦点计算	306
6.3	含参数的最简规范形的计算	323
6.4	Hopf 分叉控制	333
6.5	结论	370
	参考文献	370
第 7 章	关于后绝对稳定性研究的若干问题	黄琳, 杨莹, 段志生
7.1	控制研究的新问题——本质非线性	376
7.2	绝对稳定性研究的历史贡献	377
7.3	多平衡位置系统, 有界性与收敛性	380
7.4	周期过程的问题	382
7.5	二阶类摆系统	387
7.6	高阶类摆系统非局部化简	392
7.7	同异宿轨和混沌	396
7.8	控制与鲁棒性	401
7.9	关联的作用	409

参考文献	425
第 8 章 网络结构和动力学	刘曾荣
8.1 前言	429
8.2 数学准备知识	432
8.3 网络的拓扑结构	435
8.4 网络上的同步行为	444
8.5 传染病的 SIR 模型	462
参考文献	466
第 9 章 弹性杆中的非线性色散波	戴晖辉
9.1 引言	472
9.2 基于三维弹性力学的模型方程	473
9.3 基于 Navier-Bernoulli 假设的模型方程	480
9.4 色散关系	482
9.5 远场方程	485
9.6 结论	488
参考文献	488
第 10 章 轴向运动弦线和梁的非线性动力学	陈立群
10.1 前言	490
10.2 数学模型	490
10.3 线性振动分析	494
10.4 非线性振动的直接多尺度分析	500
10.5 分叉和混沌的数值研究	515
10.6 结束语	531
参考文献	532
《非线性动力学丛书》已出版书目	536

第 1 章 时滞动力系统的稳定性与分叉

胡海岩

1.1 前 言

通常, 动力系统可由状态变量随时间演化的微分方程来描述. 其中, 有些动力系统的状态变量之间存在时滞, 即系统的演化趋势不仅依赖于系统当前的状态, 还依赖于系统过去某一时刻或若干时刻的状态. 人们将这类动力系统称作时滞动力系统. 近年来, 时滞动力系统已成为许多领域的重要研究对象. 针对控制系统、网络系统、生物系统中的时滞动力问题, 人们进行了大量研究, 取得了许多重要成果, 并且巧妙地利用时滞来控制动力系统的行为^[1,2]. 例如, 时滞反馈控制已成为控制混沌的主要方法之一.

时滞动力系统的数学模型是时滞微分方程(组). 例如, 含单个时滞的单自由度系统的振动可归结为如下时滞常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\tau)), & t > t_0, \\ x(t) = \varphi(t), \quad x'(t) = \varphi'(t), & t \in [t_0 - \tau, t_0], \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其中, $\tau > 0$ 为系统的时滞. 对于时滞微分方程 (1.1.1), 其初始条件由定义在 $[t_0 - \tau, t_0]$ 上的连续可微函数确定, 系统在 $t > t_0$ 后的行为不仅依赖于 t_0 时刻的状态, 而且与 $[t_0 - \tau, t_0]$ 这一时间段的运动有关. 因此, 单自由度时滞动力系统的解空间是无穷维的. 时滞动力系统的这一基本特征导致了其非常丰富的动力学特性, 也给她研究带来了相应的难度.

若时滞 $\tau=0$, 则方程 (1.1.1) 退化为常微分方程系统. 在研究实际问题时, 人们很自然地忽略短时滞, 而将时滞动力系统约简为普通动力系统. 然而, 这样做是不可靠的. 事实上, 存在这样的时滞动力系统, 其约简的微分方程的零解不稳定, 但对任意时滞, 原方程的零解是稳定的; 反之亦然^[3]. 对周期解的存在性也有类似的结论. 一个时滞微分方程存在 Hopf 分叉时, 其约简的常微分方程却可以不产生 Hopf 分叉. 因此, 在许多情况下, 必须直接研究时滞微分方程.

时滞对系统的动态性质有很大的影响. 例如, 时滞常常导致系统失稳. 又如, 时滞系统一般有无穷多个特征值, 从而, 从一个侧面说明时滞系统是无穷维的. 可以证明, 对于 n 自由度线性时滞反馈振动系统, 若时滞很小, 则只有 $2n$ 个特征值在相应的无时滞系统的特征值附近; 时滞系统的最危险特征值派生于无时滞线性反馈系

统的最危险的特征值;但随着时滞增加,已有诸特征值的危险程度会发生交换,并且特征方程还会派生出新的危险特征值^[4].

非线性时滞动力系统比用常微分方程所描述的非线性动力系统有着更加丰富的动力学行为.时滞动力系统的动力学行为有着许多特殊的性质,例如,一维时滞动力系统即可产生混沌,二维自治时滞动力系统的相轨线可自身相交.这些与用常微分方程描述的动力系统有着本质的区别.同时,时滞动力系统所表现出的分叉现象、通向混沌的道路等都更加丰富和多样化.例如,在悬臂梁的振动控制实验中引入速度负反馈以增大系统的阻尼,并不是反馈增益越大系统的稳定性越好;当反馈增益达到一定的量值时,系统在一定的初始扰动下会表现出强烈的自激振动,其理论根据就是反馈环节中的时滞导致系统产生了动态分叉.

本章在概述时滞动力系统的一些特点之后,主要介绍时滞动力系统的稳定性分析和周期运动的求解,同时将涉及概周期运动和混沌运动等问题.由于问题与方法总是交叉联系的,一种问题可以有多种方法来解决,一种方法也可以解决多种问题,因此,为突出从问题出发寻找解决方法的研究思路,本章选择以问题为主线、以方法为内容的叙述方式,结合一些实际例子,介绍时滞动力系统研究的成果.

1.2 线性时滞系统的稳定性判据

稳定性是系统最基本的品质.对于线性动力系统而言,系统的稳定性与平衡点的稳定性相一致.本章主要介绍含有时滞的线性时不变动力系统的稳定性.这类系统的稳定性可通过研究其特征方程根的分布来确定.然而,时滞动力系统的特征方程是含有指数函数的超越方程,原则上有无穷多个根,因此其根的分布情况变得相当复杂.

考察线性时滞微分方程

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^l B_j x(t - \tau_j), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad A, B_j \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad (1.2.1)$$

其特征方程为

$$p(\lambda) = \det \left(\lambda I - A - \sum_{j=1}^l B_j e^{-\lambda \tau_j} \right) = 0. \quad (1.2.2)$$

式 (1.2.2) 可展开为

$$p(\lambda) \equiv \lambda^n + d_1(\lambda)\lambda^{n-1} + \cdots + d_{n-1}(\lambda)\lambda + d_n(\lambda) = 0, \quad (1.2.3)$$

其中, $p(\lambda)$ 称作特征拟多项式, $d_j(\lambda)$ 是关于 $e^{-\lambda \tau_1}$, $e^{-\lambda \tau_2}$ 及 $e^{-\lambda \tau_l}$ 的多项式. 特别

地, 有

$$d_1(\lambda) = -\text{tr}(A) - e^{-\lambda\tau_1}\text{tr}(B_1) - e^{-\lambda\tau_2}\text{tr}(B_2) - \cdots - e^{-\lambda\tau_l}\text{tr}(B_l), \quad (1.2.4)$$

其中, $\text{tr}(A)$ 与 $\text{tr}(B_j)$ 分别是矩阵 A 与 B_j 的迹.

特征拟多项式 $p(\lambda)$ 一般有无穷多个根, 无法利用直接求解的方法获知其全部特征根的分布情况. 但是, 根据其构成形式, 可以得到以下重要定性结论.

定理 1.2.1 特征拟多项式 $p(\lambda)$ 在复平面的右半平面至多有有限个根.

定理 1.2.2 特征拟多项式 $p(\lambda)$ 在复平面的任一条形区域 $\{\lambda = x + iy \mid a \leq x \leq b\}$ 中至多有有限个根.

定理 1.2.3 若特征拟多项式 $p(\lambda)$ 的所有根都具有负实部, 则必存在一正实数, 使得其所有根都满足 $\text{Re}\lambda \leq -\alpha$.

类似于线性常微分方程零解的稳定性与其特征根分布之间的关系, 线性时滞微分方程零解的稳定性与系统特征根的分布有如下关系.

定理 1.2.4 方程 (1.2.1) 的零解是渐近稳定的, 当且仅当其特征方程 (1.2.3) 的根皆具有负实部.

定理 1.2.5 若特征方程 (1.2.3) 有实部为零的重根或正实部的根, 则方程 (1.2.1) 的零解不稳定.

以上结论的证明需用到多项式理论与复变函数的若干知识, 有兴趣的读者可参考文献 [3~5].

可以看出, 判断一个线性时滞微分方程是否渐近稳定等价于判断其特征多项式的所有特征根是否皆具有负实部. 对于线性常微分方程, 著名的 Routh-Hurwitz 判据提供了一种直接利用方程参数来判定稳定性的代数方法, 这种判别法在理论上也已被推广到时滞动力系统^[5]. 但由于其应用中需计算无穷多个行列式, 从而失去了应用价值.

经过不断研究与探索, 迄今为止, 人们已经发展了一些稳定性判据. 本节将分别介绍几种具有代表性的判据, 其证明可参考所列出的相关文献.

1.2.1 Pontryakin 定理^[3]

定理 1.2.6 考察方程 (1.2.1), 其特征拟多项式 $p(\lambda)$ 如式 (1.2.3) 所示. 令 $U(\omega) \equiv \text{Re}[e^{i\omega\tau_{\max}}p(i\omega)]$, $V(\omega) \equiv \text{Im}[e^{i\omega\tau_{\max}}p(i\omega)]$, 其中 $\tau_{\max} = \max(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_l)$, 则方程 (1.2.1) 零解渐近稳定的充分必要条件是 $U(\omega)$ 与 $V(\omega)$ 的根是交错相邻的单实根, 且对于所有的 $\omega > 0$, 以下不等式成立:

$$U(\omega)V'(\omega) - V(\omega)U'(\omega) > 0. \quad (1.2.5)$$

例 1.2.1 利用 Pontryakin 定理判定线性时滞微分方程

$$\dot{x}(t) - x(t-1) + 2x(t) = 0 \quad (1.2.6)$$

零解的稳定性.

解 对应于方程 (1.2.6) 的特征方程为

$$p(\lambda) = \lambda - e^{-\lambda} + 2 = 0. \quad (1.2.7)$$

此时 $\tau_{\max} = 1$, $U(\omega) = 2 \cos(\omega) - \omega \sin(\omega) - 1$, $V(\omega) = \omega \cos(\omega) + 2 \sin(\omega)$. 经计算可得, 对任意 $\omega > 0$, $U(\omega)V'(\omega) - V(\omega)U'(\omega) = \omega [\sin(\omega) + \omega] + 6 - 3 \cos(\omega) > 0$ 成立, 因此满足条件 (1.2.5). 为判断 $U(\omega)$ 与 $V(\omega)$ 的根是否为交错相邻的单实根, 可采用图解法. 由图 1.2.1 可见, $U(\omega)$ 与 $V(\omega)$ 的根的确为交错相邻的单实根. 因此, 由 Pontryakin 定理可判定该时滞系统的零解是渐近稳定的.

在 Pontryakin 判据中, 判断 $U(\omega)$ 与 $V(\omega)$ 是否具有交错相邻的单实根是一个比较困难的数学问题, 在具体应用时会受到许多限制. 但在数学上, 该方法仍不失为一种有效的方法.

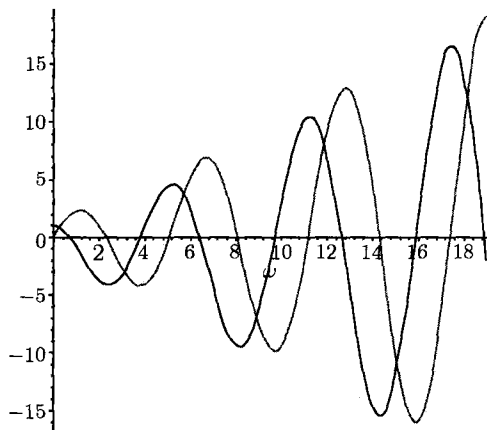


图 1.2.1 $U(\omega)$ 与 $V(\omega)$ 的函数曲线

1.2.2 Hassard 定理^[6]

定理 1.2.7 考察方程 (1.2.1), 其特征拟多项式 $p(\lambda)$ 如式 (1.2.3) 所示, 令 $M(\omega) \equiv \operatorname{Re}[i^{-n}p(i\omega)]$, $N(\omega) \equiv \operatorname{Im}[i^{-n}p(i\omega)]$. 如果 $M(\omega)$ 的所有正根为 $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_m > 0$ (可证明必为有限个), 则系统的零解是渐近稳定的充分必要条件是

$$p(0) \neq 0, \quad (1.2.8a)$$

$$N(\rho_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.2.8b)$$

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{2}(-1)^m \operatorname{sgn} N(0) + \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \operatorname{sgn} N(\rho_j) = 0. \quad (1.2.8c)$$

例 1.2.2 利用 Hassard 定理判定线性时滞微分方程

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x(t-4) = 0 \quad (1.2.9)$$

零解的稳定性.

解 对应方程 (1.2.9) 的特征方程为

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + e^{-4\lambda} = 0. \quad (1.2.10)$$

此时, $n=2$, $p(0) = 1 \neq 0$, 条件 (1.2.8a) 成立. 由 $M(\omega) = \omega^2 - \cos 4\omega$ 和 $N(\omega) = \sin 4\omega - 2\omega$, $M(\omega)$ 有一个正根 $\rho_1 = 0.3602$, 所以 $m = 1$, 而 $N(\rho_1) = 0.2712 > 0$, 故条件 (1.2.8b) 成立. 此时, 条件 (1.2.8c) 变为 $n/2 - \operatorname{sgn} N(0)/2 + \operatorname{sgn} N(\rho_1) = 0$, 将 $n=2$ 及 $N(0) = 0$ 代入显然不成立. 因此, 由 Hassard 定理可判定该系统的零解不稳定.

1.2.3 Michailov 定理^[7]

定理 1.2.8 方程 (1.2.1) 的特征拟多项式 $p(\lambda)$ 在虚轴上无根, 令 $R(\omega) \equiv \operatorname{Re}[p(i\omega)]$, $S(\omega) \equiv \operatorname{Im}[p(i\omega)]$, 则方程零解渐近稳定的充分必要条件是当 ω 由零变为无穷大的过程中, $\arg p(i\omega)$ 的变化为 $n\pi/2$, 即

$$\arg p(i\omega)|_0^{+\infty} = \frac{n\pi}{2} \quad (1.2.11)$$

或等价地

$$\int_0^{+\infty} Z(\omega) d\omega = \frac{n\pi}{2}, \quad Z(\omega) = \frac{R(\omega)S'(\omega) - S(\omega)R'(\omega)}{R^2(\omega) + S^2(\omega)}. \quad (1.2.12)$$

例 1.2.3 利用 Michailov 定理判定线性时滞微分方程

$$\dot{x} - x(t-3) + 2x = 0 \quad (1.2.13)$$

零解的稳定性.

解 对应于方程 (1.2.13) 的特征方程为

$$p(\lambda) = \lambda - e^{-3\lambda} + 2 = 0. \quad (1.2.14)$$

首先, 可由数值方法确定 $p(i\omega) = i\omega - e^{-3i\omega} + 2 = 0$ 无实数解, 即特征拟多项式 $p(\lambda)$ 在虚轴上无根. 又经计算

$$Z(\omega) = \frac{3\omega \sin(3\omega) - 5 \cos(3\omega) - 1}{\omega^2 + 4 \cos(3\omega) - 2\omega \sin(3\omega) + 5}.$$

由于对式 (1.2.12) 直接积分比较困难, 一般采用数值积分方法求得其近似解, 经 Maple 软件计算

$$\int_0^{+\infty} Z(\omega) d\omega = 1.570796326 \approx \pi/2.$$

事实上, 可以证明此积分的结果一定是 $\pi/2$ 的某整数倍. 因此, 由 Michailov 定理可判定该时滞系统的零解是渐近稳定的.

1.2.4 Fu-Olbrot-Polis 定理^[8]

定理 1.2.9 考察方程 (1.2.1), 其特征拟多项式 $p(\lambda)$ 如式 (1.2.3) 所示, 则其零解是渐近稳定的充分必要条件是函数 $W(i\omega)$ 的 Nyquist 图不包含原点, 这里

$$W(\lambda) \equiv \frac{p(\lambda)}{(\lambda + 1)^n}. \quad (1.2.15)$$

由于该定理类似于线性控制理论中的 Nyquist 判据, 因此也称为 Nyquist 图判据.

例 1.2.4 利用 Nyquist 图判据判定线性时滞微分方程

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 5 + \dot{x}(t - \tau_1) + 2x(t - \tau_1) + 2\dot{x}(t - \tau_2) + 3x(t - \tau_2) = 0. \quad (1.2.16)$$

在两组时滞参数① $\tau_1 = 3, \tau_2 = 1.5$; ② $\tau_1 = 2.5, \tau_2 = 2$ 下零解的稳定性.

解 对应于方程 (1.2.16) 的特征方程为

$$p(\lambda) \equiv \lambda^2 + 3\lambda + 5 + (\lambda + 2)e^{-\lambda\tau_1} + (2\lambda + 3)e^{-\lambda\tau_2} = 0. \quad (1.2.17)$$

此时, 两组时滞参数下 $W(i\omega) \equiv \frac{p(i\omega)}{(i\omega + 1)^2}$ 的 Nyquist 图分别如图 1.2.2(a) 和 (b) 所示. 由图可以看出, 当 $\tau_1 = 3, \tau_2 = 1.5$ 时, $W(i\omega)$ 的 Nyquist 图不包含原点, 因此系统零解是渐近稳定的; 当 $\tau_1 = 2.5, \tau_2 = 2$ 时, $W(i\omega)$ 的 Nyquist 图包含原点, 因此系统零解是不稳定的.

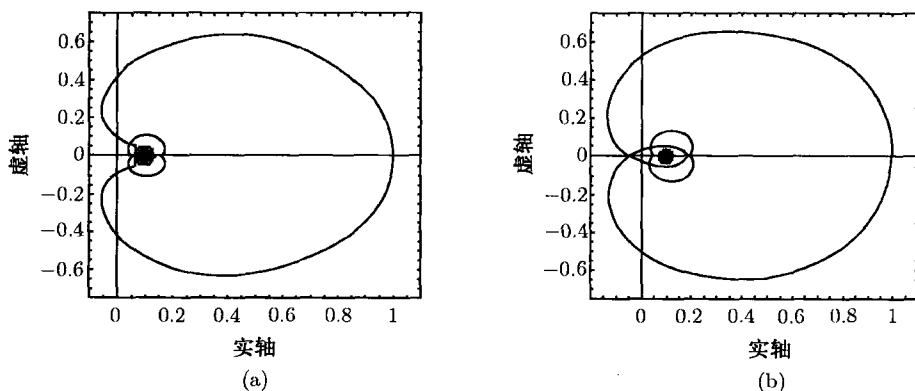


图 1.2.2 $W(i\omega)$ 的 Nyquist 图

(a) $\tau_1 = 3, \tau_2 = 1.5$; (b) $\tau_1 = 2.5, \tau_2 = 2$

1.3 时滞稳定性问题^[4]

1.2 节介绍的几种稳定性判别方法适用于系统参数和时滞完全确定的情况,而在实践中人们经常面临系统参数或时滞量并不完全确定的情况. 针对这种情况,一个基本的想法是如何获得系统稳定性随时滞增加而变化的全貌,这就是本节和 1.4 节将要介绍的全时滞稳定性与稳定性切换. 如果对于任意给定的时滞系统皆稳定,则称该时滞动力系统是全时滞稳定的或时滞无关稳定的,这里所说的稳定一般是指渐近稳定. 首先给出判定时滞动力系统全时滞稳定性的一个原则性的判据.

定理 1.3.1 方程 (1.2.1) 零解是全时滞稳定的当且仅当它满足以下两个条件:

- (1) 当时滞均为零时, 方程 (1.2.1) 是渐近稳定的;
- (2) 对于任意给定的一组时滞 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, 方程 $p(i\omega) = 0$ 无非零实根.

该定理的意义是, 若系统在零时滞时的特征根皆具有负实部, 而且随着时滞由零逐渐增大其特征根不穿越虚轴, 则系统的特征根总位于复平面的左半平面, 从而该系统是全时滞稳定的. 显然, 该定理也是判定 1.2 节中所述时滞系统稳定性的一个充分条件.

1.3.1 单自由度振动系统的全时滞稳定性

考察具有时滞状态反馈的单自由度线性振动系统

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\dot{x}(t) + x(t) = u x(t - \tau_1) + v \dot{x}(t - \tau_2), \quad (1.3.1)$$

其中, ζ 是系统阻尼比, u, v 是反馈增益, $\tau_1, \tau_2 \geq 0$ 是反馈环节的时滞. 我们的目的是要给出使系统保持全时滞稳定的 u, v 的所有参数组合.

对应方程 (1.3.1) 的特征方程为

$$D(\lambda, \tau_1, \tau_2) \equiv \lambda^2 + 2\zeta\lambda + 1 - u \exp(-\lambda\tau_1) - v\lambda \exp(-\lambda\tau_2) = 0, \quad (1.3.2)$$

当时滞均为零时, 式 (1.3.2) 简化为

$$D(\lambda, 0, 0) = \lambda^2 + (2\zeta - v)\lambda + 1 - u = 0. \quad (1.3.3)$$

由 Routh-Hurwitz 判据可知, 式 (1.3.3) 的特征根皆具有负实部的充分必要条件是

$$u < 1, \quad v < 2\zeta. \quad (1.3.4)$$

在式 (1.3.4) 条件下, 方程 $D(i\omega, \tau_1, \tau_2) = 0$ 对任意的 $\tau_1, \tau_2 \geq 0$ 都无零根. 注意到 $D(i\omega, \tau_1, \tau_2)$ 的实根是关于原点对称的, 根据定理 1.3.1, 对任意的 $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, 只要找到使 $D(i\omega, \tau_1, \tau_2) = 0$ 无正实根时 u, v 满足的条件即可.