

1681

沈月

建筑力学题解集

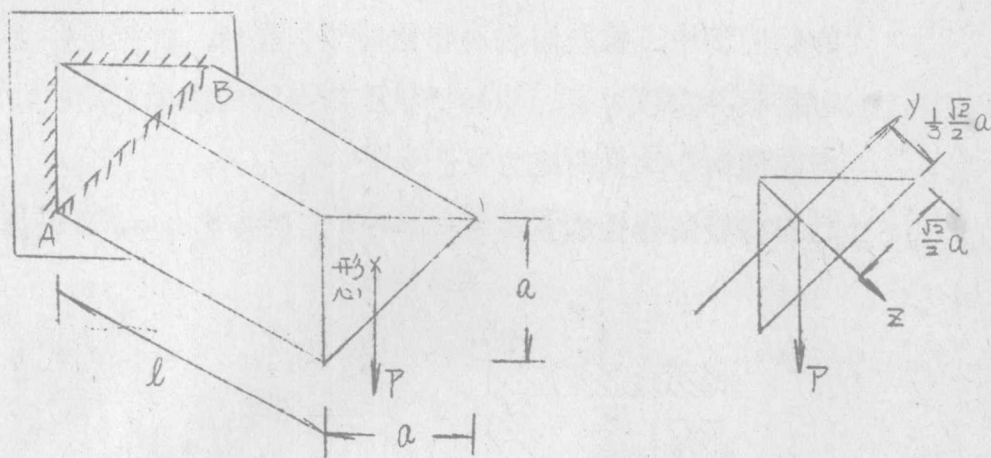
下册

武汉水利电力学院
建筑力学教研室编

一九八三年八月

补 充 题

补-1 图示悬臂梁，截面为等腰直角三角形，荷载 P 通过自由端面形心，并与一直角边平行，求固定端截面上 A 、 B 点的正应力。



〔解〕 因 P 力不与形心主轴重合，属斜弯曲问题，由形心主轴性质可知，对称轴 z 和垂直于 z 的 y 轴为形心主轴， y 、 z 轴到底边距离如图所示。

将 P 力沿 y 、 z 轴分解

$$M_y = M_z = P\ell \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I_y = \frac{1}{36} (\sqrt{2}a) \times \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^3 = \frac{a^4}{72}$$

$$I_z = 2 \times \frac{1}{12} \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^3 = \frac{a^4}{24}$$

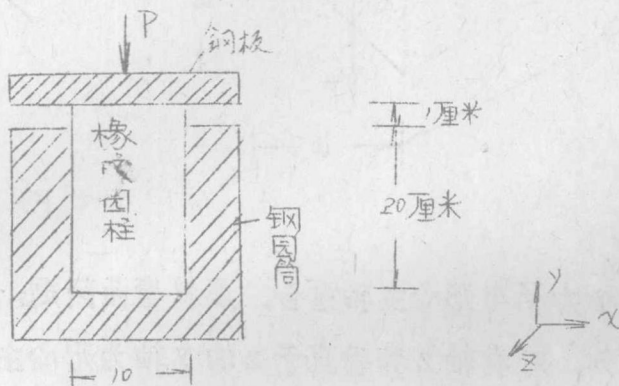
$$\sigma_B = + \frac{M_z y_{\max}}{I_z} - \frac{M_y z_{\max}}{I_y} = + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} P\ell \times \frac{\sqrt{2}}{2} a}{\frac{a^4}{24}}$$

补 充 题

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} P L \times \frac{\sqrt{2}}{6} a}{\frac{a^4}{72}} = \frac{-24 P L}{a^3}$$

补-2 图示一直径10厘米，高21厘米的橡胶圆柱，置于内径相同的钢圆筒中，橡胶圆柱高出圆筒外1厘米，橡胶圆柱上部盖以钢板并加压力P。求当钢板压到与圆筒接触时，橡胶圆柱与钢圆筒壁之间的应力 σ 。

已知橡胶的弹性模量 $E = 10 \text{MPa}$ ，泊桑比 $\mu = 0.4$ 。



〔解〕 橡胶处于三向受力状态，设坐标系如图，由受力状态可知

$$\sigma_x = \sigma_z = \sigma$$

方法一：

$$\sigma_x = \sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0 \quad \varepsilon_y = -\frac{1}{21}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma = \sigma_x = \sigma_z &= \frac{0.4E}{(1+0.4)(1-2 \times 0.4)} \left(-\frac{1}{21} \right) \\ &= -0.68 \text{MPa (压力)} \end{aligned}$$

补-2

补 充 题

方法二:

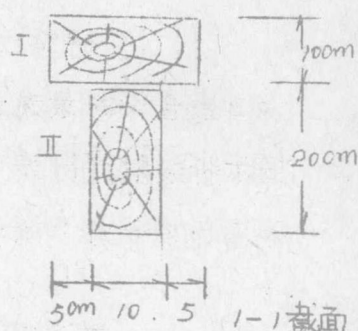
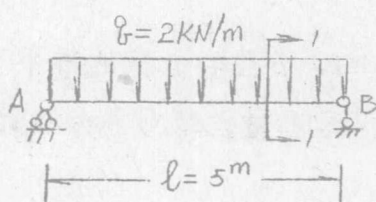
$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E} (\sigma_y - 2\mu\sigma_x) = -\frac{1}{21}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$

联立解上面二式可得:

$$\sigma = \sigma_x = -0.68 \text{ MPa}$$

补-3 图示木梁 AB, 由 I、II 两个矩形截面木梁迭合而成, 其接触面上无任何连接, 且不考虑接触面上的摩擦力作用。求木梁 AB 在图示均布荷载作用下的梁内最大正应力, 并指出发生的位置。(提示: 因梁的变形很小, I、II 两梁作相同曲率的弯曲)。



【解】 因为 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{M_1}{EI_1} = \frac{M_2}{EI_2}$ (跨中处)

且 $M = M_1 + M_2$, E 相同

补 充 题

$$I_1 = \frac{20 \times 10^3}{12} = 1666.67 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{10 \times 20^3}{12} = 6666.67 \text{ cm}^4$$

$$\therefore \frac{M_1}{M_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore M_1 = \frac{1}{5} M = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{8} \times 2 \times 5^2 \right) = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ KN-m}$$

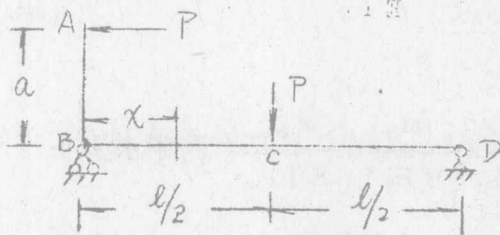
$$M_2 = \frac{4}{5} M = 5 \text{ KN-m}$$

$$\begin{aligned} \text{I 梁 } \sigma_{\max}^{\text{I}} &= \frac{M_1 \times 0.05}{1666.67 \times 10^{-8}} = \frac{1250 \times 0.05}{1666.67 \times 10^{-8}} \\ &= 3.75 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II 梁 } \sigma_{\max}^{\text{II}} &= \frac{M_2 \times 0.10}{6666.67 \times 10^{-8}} = \frac{5000 \times 0.10}{6666.67 \times 10^{-8}} \\ &= 7.45 \text{ MPa} \end{aligned}$$

AB 迭合梁的最大正应力为 7.45 MPa 发生在 II 梁的跨中下侧。

补-4 图示折梁抗弯刚度 EI = 常数, 试用初参数法或重积分法计算 a 应为多长时 D 端转角为零。



补-4

【解】 (一) 用初参法

$$\text{BD 梁 } y_0 = 0, y'_0 = ?, M_0 = -Pa, Q_0 = \frac{P}{2} + \frac{Pa}{\ell}$$

$$\begin{aligned} \text{CD 段: } EIy = EIy_0 + EIy'_0 x - \frac{x^2}{2} M_0 - \frac{x^3}{3!} Q_0 \\ + \frac{P}{3!} \left(x - \frac{\ell}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } x = \ell \text{ 时 } EIy_D = EIy'_0 \ell + \frac{Pa}{2} \ell^2 - \frac{P\ell^3}{12} - \frac{Pa\ell^2}{6} \\ + \frac{P\ell^3}{48} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore y'_0 = -\frac{1}{EI} \left(\frac{Pa\ell}{3} - \frac{P\ell^3}{16} \right)$$

$$EIy' = EIy'_0 - M_0 x - \frac{x^2}{2} Q_0 + \frac{P}{2} \left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{现题意要求 } EIy'_D = -\frac{Pa\ell}{3} + \frac{P\ell^2}{16} + Pa\ell - \frac{\ell^2}{2} \\ \times \left(\frac{P}{2} + \frac{Pa}{\ell} \right) + \frac{P}{2} \times \frac{\ell^2}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{解出 } a = \frac{3}{8} \ell$$

(二) 用重积分法求出 BD 梁在杆端力偶 Pa 和跨中 P 作用下 D 端的转角

$$\text{分别为 } \theta_D \equiv \frac{Pa\ell}{6EI} \text{ 和 } \theta_D' = -\frac{P\ell^2}{16EI}$$

补 充 题

$$\text{现题意要求 } \theta_D = \theta_D' + \theta_D'' = \frac{Pa\ell}{6EI} - \frac{P\ell^2}{16EI} = 0$$

$$\text{解出 } a = \frac{3}{8}\ell$$

补-5 图示结构由受压柱BC在B点与悬臂梁AB铰结，在C点与基础铰结而构成，已知梁的抗弯刚度为 EI_1 ，梁长 $\ell_1=1\text{m}$ ，柱的抗弯刚度为 EI_2 ，柱长 $\ell_2=10\text{m}$ ，且 $EI_1=10EI_2$ ，试求梁的固端A下沉 Δ 为多大时，柱会受压失稳。

【解】 (1) 设柱内压力为 P （即梁的B支座反力）

$$(2) \text{ 由悬臂梁的挠度 } \Delta = \frac{P\ell_1^3}{3EI_1}$$

$$\therefore P = \frac{3EI_1}{\ell_1^3} \Delta$$

$$(3) \text{ 柱的欧拉临界力 } P_{EJ} = \frac{\pi^2 EI_2}{\ell_2^2}$$

$$(4) \text{ 若 } P = P_{EJ}$$

$$\frac{3EI_1}{\ell_1^3} \Delta = \frac{\pi^2 EI_2}{\ell_2^2}$$

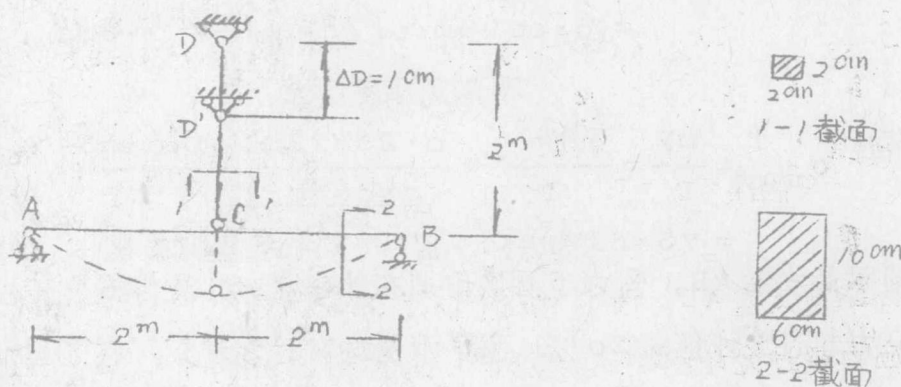
补 充 题

$$\text{可解得 } \Delta = \frac{\pi^2 EI_2}{\ell_2^2} \times \frac{\ell_1^3}{3EI_1} = \frac{\pi^2 \times 1^3}{3 \times 10^2} \times \frac{1}{10} \\ = 0.00329^m = 3.29\text{mm}$$

当 $\Delta \geq 3.29\text{mm}$ 时柱会受压失稳

补-6 图示矩形截面简支钢梁 AB 长 4 米，中点 C 处连接一根长 2 米的正方形截面钢柱 CD。试全面校核当 D 支座下沉 $\Delta_D = 1$ 厘米时，该结构的强度、刚度和稳定性。已知钢材的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$ ，许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ，梁的允许挠度

$$\left[\frac{f}{\ell}\right] = \frac{1}{500} \quad (\text{注：柱两端作为铰接，梁柱自重勿略不计})$$



[解]: (1) 设压柱 CD 中压力为 P ，则柱缩短 $\Delta = \frac{P \times \ell_1}{EA}$ ，梁挠度

$$\Delta_C = \frac{P \ell_2^3}{48EI}$$

由 C 点相容条件解出 P 。

$$\Delta_D - \Delta_C = \Delta$$

$$\text{即 } 0.01 = \frac{P \times 4^3}{48 \times 200 \times 10^9 \times \frac{0.06 \times 0.1^3}{12}}$$

补-7

补 充 题

$$= \frac{p \times 2}{200 \times 10^9 \times 0.02^2}$$

$$0.01 - 1333.33 \times 10^{-9} p = 25 \times 10^{-9} p$$

解出 $p = 7361 \text{ N (压力)}$

$$(2) \text{ 压杆临界力 } p_{lj} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times \frac{0.02^4}{12}}{2^2}$$

$$= 6579 \text{ N}$$

$p > p_{lj}$ 不满足稳定条件

$$(3) \text{ 梁的挠度 } \delta_C = \frac{p l^3}{48 EI} = 1333.33 \times 10^{-9} \times 7361$$

$$= 0.0098 \text{ m} > [f] = \frac{400}{500} = 0.8 \text{ cm}$$

不满足刚度要求

$$(4) \sigma_{\max} = \frac{M y}{I} = \frac{\frac{1}{4} p l^2}{I} = \frac{0.25 \times 7361 \times 4 \times 0.05}{\frac{0.06 \times 0.1^3}{12}}$$

$$= 73.61 \text{ MPa} < [\sigma] \quad \text{满足强度要求}$$

补-7 图示简支梁AB，当力P直接作用在梁中点时，梁内最大正应力超过允许值的20%，为了消除这种过载现象，在梁AB上装置了辅助梁CD，试求辅助梁的跨度a。

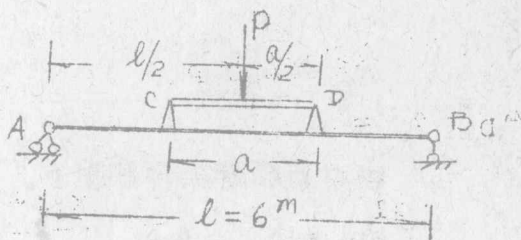
[解]:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\frac{p l}{4}}{W}$$

$$= 1.2 [\sigma]$$

$$[\sigma] W = \frac{p l}{4.8}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\frac{p}{4} (l-a)}{W}$$



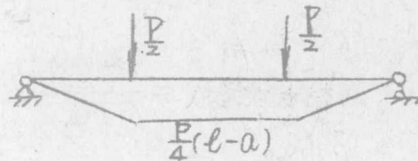
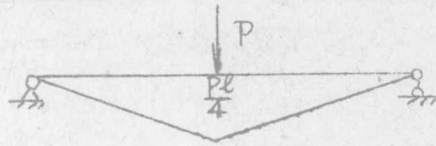
补 充 题

$$= [\sigma]$$

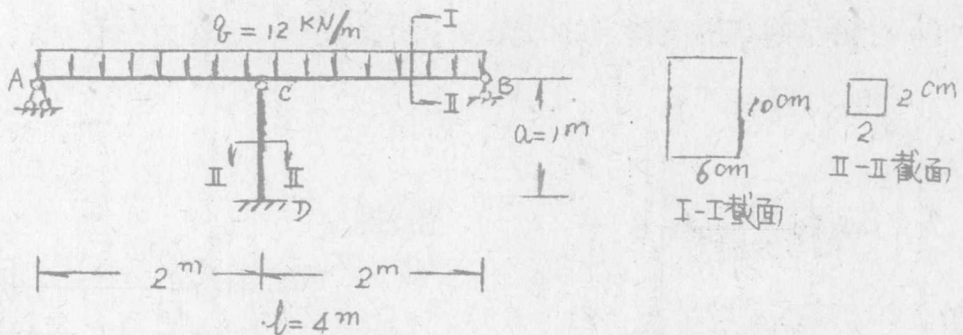
$$[\sigma]_W = \frac{p(\ell - a)}{4}$$

$$\therefore \frac{p\ell}{4 \cdot 8} = \frac{p(\ell - a)}{4}$$

$$\text{解出 } a = 1\text{m}$$



补-8 图示结构中, 梁AB和柱CD均为AB钢, 其屈服极限 $\sigma_s = 240\text{MPa}$, 弹性模量 $E = 210\text{GPa}$ 。梁柱横截面形状和尺寸如图所示。当梁上承受均布荷载 $q = 12\text{KN/m}$ 时, 试确定梁和柱的工作安全系数?



〔解〕: (1) CD柱缩短为AB梁简支时在 q 作用下的位移与CD柱反力 N 作用下位移之差

$$\text{即 } y_q - y_N = \Delta \ell_{CD}$$

$$\text{则 } \frac{5q\ell^4}{384EI} - \frac{N\ell^3}{48EI} = \frac{Na}{EA}$$

代入 q, ℓ, a, E, I, A 的数值 解得柱内压力 N

$$(2) \text{ 柱内 } N = 29.72\text{KN} \quad \text{梁内 } M = \frac{12 \times 4^4}{8} - \frac{29.72 \times 4}{4} = -6\text{KN-m}$$

补 充 题

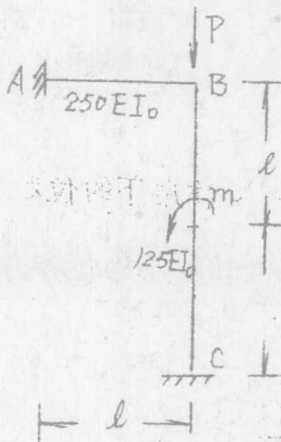
$$\text{梁的安全系数 } n = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{240 \times 10^6}{\frac{6000 \times 0.05}{0.06 \times 0.1^3 / 12}} = \frac{240}{60} = 4$$

$$\text{柱长细比 } \lambda = \frac{0.7 \times 100}{\sqrt{16/12/4}} = 121 > 100$$

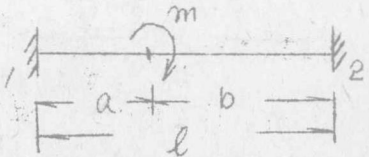
$$\text{柱临界力 } P_k = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(0.7\ell)^2} = 56.4 \text{ kN}$$

$$\text{柱安全系数 } n = \frac{56.4}{29.72} = 1.88$$

补-9 求图示刚架中 B 结点的转角 φ_B 和 C 支座的诸反力分量 M_C , H_C , V_C 。



附注:



$$M_{12} = \frac{mb}{l^2} (2\ell - 3b)$$

$$M_{21} = \frac{ma}{l^2} (2\ell - 3a)$$

[解] 用位移法在 B 处加刚臂求出的转角即为 φ_B , 求出的 M_{CB} ,

Q_{CB} , N_{CB} 即为 C 处的反力 M_C , H_C , V_C 。

$$r_{11}\varphi + R_1 P = 0 \quad r_{11} = 1250 \frac{EI_0}{l}$$

补-10

补 充 题

$$R_{1P} = -\frac{m}{4}$$

$$\therefore \varphi_B = \varphi_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = \frac{m}{4} \times$$

$$\frac{l}{1250EI_0} = \frac{ml}{5000EI_0} \quad (2)$$

$$M_{CB} = \varphi_B \bar{M}_1 + M_P = \frac{ml}{5000EI_0}$$

$$\times \left(\frac{125EI_0}{l} \right) + \left(-\frac{m}{4} \right)$$

$$= -0.225m$$

$$M_{BC} = \frac{ml}{5000EI_0} \left(\frac{250EI_0}{l} \right)$$

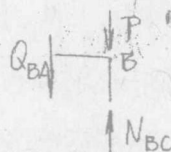
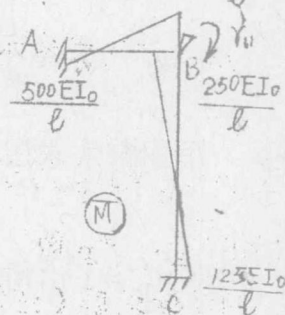
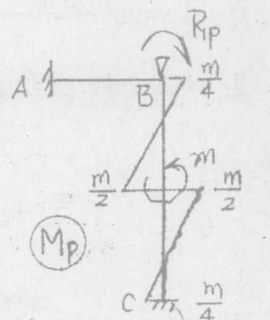
$$+ \left(-\frac{m}{4} \right) = -0.2m$$

$$Q_{CB} = Q_0 - \frac{M_{BC} + M_{CB}}{2l} = \frac{m}{2l} - \frac{(-0.225m - 0.2m)}{2l}$$

$$= 0.7125 \frac{m}{l}$$

$$M_{AB} = \varphi_B \bar{M}_1 + M_P = \frac{ml}{5000EI_0} \left(\frac{500EI_0}{l} \right) = 0.1m$$

$$M_{BA} = \frac{ml}{5000EI_0} \times \frac{1000EI_0}{l} = 0.2m$$



补充题

$$Q_{BA} = 0 - \frac{(0.1m + 0.2m)}{\ell} = -0.3 \frac{m}{\ell}$$

取 B 点为脱离体由竖向平衡可知 $N_{CB} = N_{BC} = Q_{BA} + p$

$$= -0.3 \frac{m}{\ell} + p$$

$$\therefore \varphi_B = \frac{m\ell}{5000EI_0}, \quad M_C = -0.225m, \quad H_C = 0.7125 \frac{m}{\ell}$$

$$V_C = 0.3 \frac{m}{\ell} + p$$

补-10 用图乘法求图示结构的挠曲线方程 (只考虑弯曲变形影响)

[解]:

(1) 设 $P_k = 1$ 作用于 x 处

(2) 作 M_k, M_p 图

(3) 图乘法求解 (注意 M_p

需分成四部分面积进行图乘)

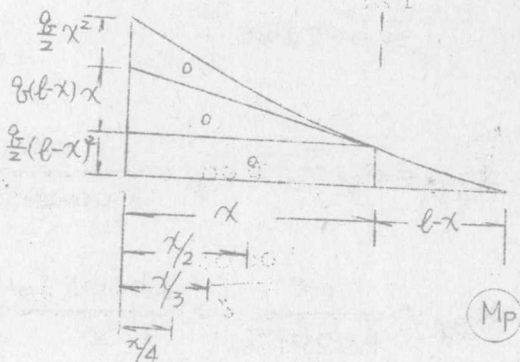
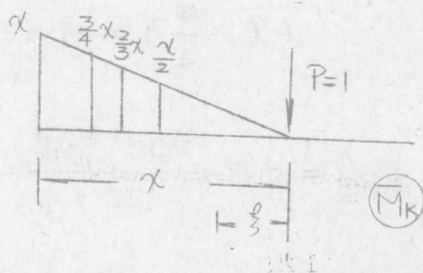
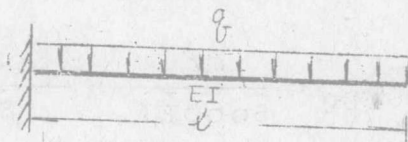
$$\Delta_x = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \frac{qx^2}{2} \cdot x \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} q \right.$$

$$\left. (\ell-x) \cdot x \cdot \frac{2x}{3} + \frac{q}{2} (\ell-x)^2 \cdot \frac{x}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{qx^4}{24} - \frac{q\ell x^3}{6} + \frac{q\ell^2 x^2}{4} \right)$$

$$= \frac{qx^2}{24EI} (x^2 + 6\ell^2 - 4\ell x)$$

补-12



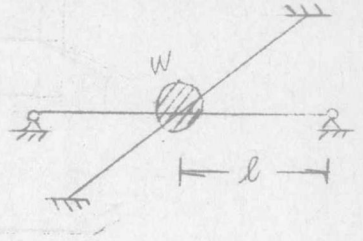
补 充 题

- 11 一个四臂等长的十字架，中点为刚性联结，四个端点分别为简支和固定于同一高程上如图所示，在十字架的中点处突然全部加上重量为 $W = 3000$ 公斤的重物，已知 $l = 200$ cm，杆件惯性矩 $I = 46470$ cm⁴，材料弹模 $E = 2.1 \times 10^6$ kg/cm²。

试求：(1) 突加该重物后十字架中点的竖向最大挠度
(2) 突加重物后，十字架中点的振动中心，振动频率和振幅。

解：(1) 求最大挠度 Δ

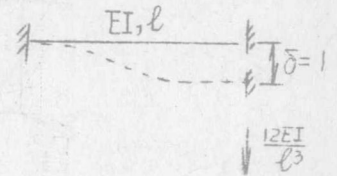
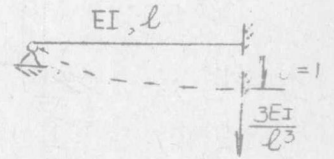
查形常数可知，中点单位位移需施加的力



$$K_{11} = 2 \left(\frac{3EI}{l^3} + \frac{12EI}{l^3} \right) = \frac{30EI}{l^3}$$

$$= \frac{30 \times 2.1 \times 10^6 \times 46470}{8 \times 10^6}$$

$$= 365951.25 \text{ kg/cm}$$



设突加 W 后最大位移为 Δ

势能消耗 $W\Delta =$ 动能增加 $\frac{1}{2} K_{11} \Delta^2$

$$\therefore \Delta = \frac{2W}{K_{11}} = \frac{2 \times 3000}{365951.25} = 0.01639 \text{ cm}$$

(2) 振动中心在 W 产生的静力位移处即 $\Delta_1 = \frac{\Delta}{2}$ 处振幅为 $\frac{\Delta}{2}$ 。

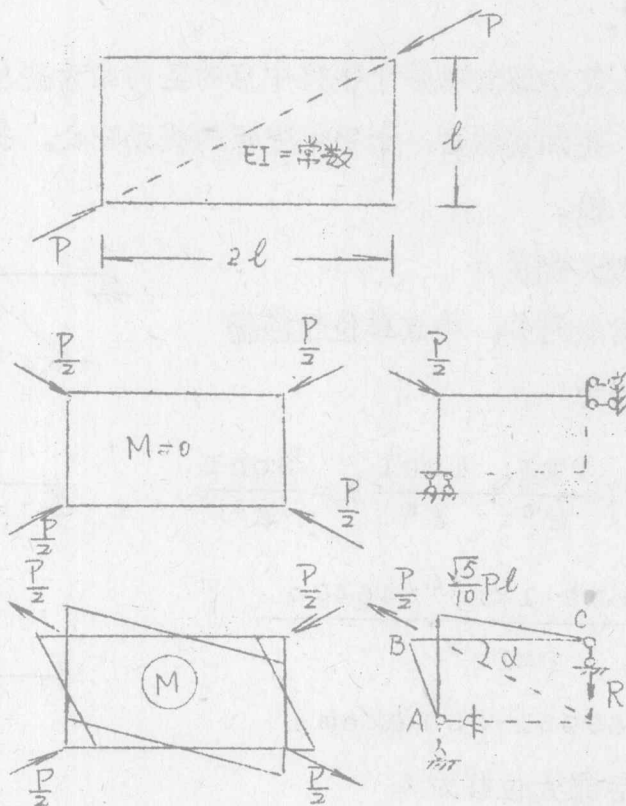
$$\text{频率 } \omega = \sqrt{\frac{K_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{gK_{11}}{W}} = \sqrt{\frac{980 \times 365951.25}{3000}}$$

补 充 题

$$= 345.75 \text{ 1/秒}$$

$$\text{工程频率 } f = \frac{\omega}{2\pi} = 25.03 \text{ 1/秒}$$

补-12 作图示结构的弯矩图 (只考虑弯曲变形的影响)



〔解〕 (1) 结构对两个轴对称, 荷载分解为正反对称两组,

分别取 $\frac{1}{4}$ 部分计算。

(2) 正对称荷载 (对两轴正对称) 时由位移法 $\varphi, \tau, \dots$

$R_p = 0$ 中 $R_p = 0$ 可知 $\varphi_1 = 0, \therefore M_{\text{正}} = 0$

(3) 反对称荷载 (对两轴反对称) 时此时为静定结构 (A 处加竖向象征链杆)

补 充 题

$$\Sigma Y = 0$$

$$\frac{p}{2} \sin \alpha - R = 0$$

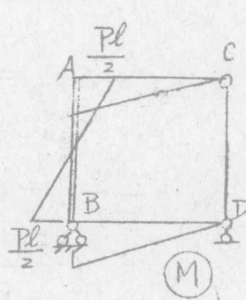
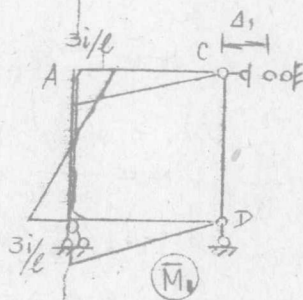
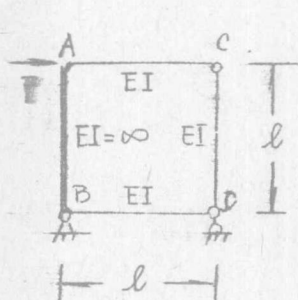
$$\text{而 } \sin \alpha = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore R = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{p}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10} p$$

$$M_{BC} = -Rl = -\frac{\sqrt{5}}{10} pl$$

$$\text{各角处弯矩为 } \frac{\sqrt{5}}{10} pl$$

图 12(b)



【解】 (一) 用位移法求解

当 C 点不能移动时, A、B 点不能转动, 故只有一个未知线位移 $\Delta_A = \Delta_B = \Delta$

$$\text{而移动 } \Delta, \text{ 后 } \varphi_A = \varphi_B = \frac{\Delta}{l}$$

$\Sigma M, \Delta, + R, p = 0$ 作 $\bar{M}$, 图时注意 $\Delta, = 1$ 时 $\varphi_A = \varphi_B$

补 充 题

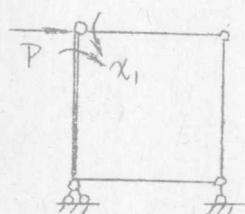
$$= \frac{1}{\ell}, \text{ 在 AC, BD 杆上产生弯矩.}$$

而 AB 杆上弯矩由结点平衡可知。

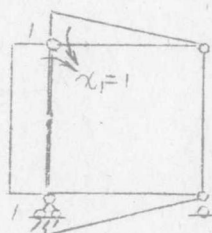
$$r_{11} = \frac{3i/\ell + 3i/\ell}{\ell} = \frac{6i}{\ell} \quad R_1 p = -p$$

$$\text{解出 } \Delta_1 = -\frac{R_1 p}{r_{11}} = \frac{p\ell^2}{6i} \quad \text{作 } \bar{M} = \bar{M}_1 \Delta_1, \text{ 如图所绘}$$

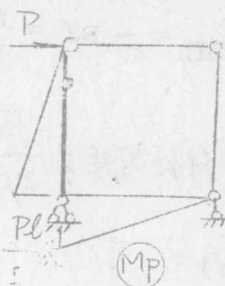
(二) 用力法求解



基本结构



($\bar{M}_1$)



(M_p)

$$x_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0 \quad \text{作 } \bar{M}_1, M_p$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \ell \times \frac{2}{3} \right] + 0 = \frac{2\ell}{3EI}$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \left[\frac{p\ell}{2} \times \ell \times \frac{2}{3} \right] + 0 = \frac{p\ell^2}{3EI}$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{p\ell}{2}, \text{ 作 } M = \bar{M}_1 x_1 + M_p$$

如同位移法结果。