

大學叢書

微分幾何

周紹濂編譯



大學叢書

微分幾何

周紹濂編譯

商務印書館出版

目 錄

上 篇

第 一 章

具有撓率之曲線

節數	頁數
1. 切線	1
2. 主正線 曲率	2
3. 次正線, 撓率, 伏熱勒公式	4
4. 曲率心之軌跡	8
習題一	9
5. 球曲率	14
6. 球曲率心之軌跡	16
7. 定理, 曲線由其固有方程式確定之	19
8. 螺旋線	20
9. 球面圖象	22
10. 漸伸線	24
11. 漸屈線	26
12. 白爾倘曲線	28
習題二	31

第 二 章

包 面 可 展 面

13. 曲面 34
14. 切面, 正線 34

具 一 參 數 之 曲 面 族

15. 包面, 特性線 36
16. 脊線 38
17. 可展面 40

曲 線 之 連 帶 可 展 面

18. 密切可展面 42
19. 極線可展面 43
20. 從可展面 43

具 兩 參 數 之 曲 面 族

21. 包面, 特性點 45
- 習題三 47

第 三 章

曲 面 上 之 曲 紋 坐 標

基 本 量

22. 曲紋坐標 49
23. 一階基本量 51

24. 正線	53
25. 曲面上之諸方向	54
26. 二階基本量	57
27. n 之導微函數	60
28. 正截口之曲率	61
習題四	63

第 四 章

曲 面 上 之 曲 線

曲 率 線

29. 主方向	68
30. 第一及第二曲率	70
31. 尤拉定理	76
32. 杜班圖象	78
33. 曲面 $z=f(x, y)$	79
34. 旋轉面	81
習題五	83

共 軛 系

35. 共軛方向	85
36. 共軛系	88

漸 近 線

37. 漸近線	89
---------------	----

38. 曲率與撓率	91
-----------------	----

等 溫 線

39. 等溫參數	93
----------------	----

無 長 線

40. 無長線	95
---------------	----

習題六	96
-----------	----

第 五 章

高斯方程式與科達溪方程式

41. r_{11}, r_{12}, r_{22} 之高斯公式	99
--	----

42. 高斯特性方程式	103
-------------------	-----

43. 梅拉第科達溪關係	104
--------------------	-----

44. 替代法	105
---------------	-----

45. 角 ω 之導微函數	106
----------------------------	-----

習題七	107
-----------	-----

第 六 章

短程線與短程平行線

短 程 線

46. 短程線之特性	110
------------------	-----

47. 短程線之方程式	111
-------------------	-----

48. 旋轉曲面	113
----------------	-----

49. 短程線之撓率	115
------------------	-----

與短程線有關之曲線

50. 彭萊定理	117
51. 岳西門太爾定理	118
52. 向量曲率	120
53. 短程曲率	121
54. k_g 之其他公式	122
55. 例題, 彭萊 (Bonnet) 公式	125

短程平行線

56. 短程平行線, 短程距離	127
57. 短程極坐標	130
58. 短程三角形	131
59. 關於平行線之定理	133
60. 短程橢圓與雙曲線	134
61. 李烏菲爾曲面 (Liouville surface)	136
習題八	137

第 七 章

二次曲面 直紋面

二 次 曲 面

62. 有心二次曲面, 曲紋坐標	141
63. 基本量	143

64. 短程線	145
65. 其他特性	147
66. 拋物面	149
習題九	151

直 紋 面

67. 不可展直紋面	155
68. 相隣母線	156
69. 腰曲線	157
70. 基本量	158
71. 切面	160
72. 彭萊定理	163
73. 漸近線	164
習題十	165

下 篇

第 八 章

漸屈面或中心曲面 平行曲面

中 心 曲 面

74. 中心曲面	171
75. 基本量	174
76. 凡因格登 (Weingarten) 曲面	177

77. 曲率線	180
78. 降級漸屈面	181

平 行 曲 面

79. 平行曲面	182
80. 曲率	183
81. 曲面之漸伸面	184

反 曲 面

82. 反曲面	186
83. 曲率	188
習題十一	189

第 九 章

等角與球面表示法

極 小 曲 面

84. 等角表示法	192
85. 旋轉面	194
86. 球面	195

球 面 表 示 法

87. 球面影	197
88. 其他特性	199
89. 二階基本量	201
90. 切面坐標	202

極 小 曲 面

91. 通性	203
92. 球面影	204
93. 笛卡爾坐標	206
習題十二	208

第 十 章

線 彙

直 紋 線 彙

94. 直紋之線彙	212
95. 限點 主平面	213
96. 漢彌登(Hamilton)公式	217
97. 焦點 焦點平面	219
98. 腰參數	221
99. 中和直紋面	223
100. 正線彙	226
101. 馬魯(Malus)與杜班定理	227
102. 迷向線彙	228

曲 紋 線 彙

103. 曲線之線彙	230
104. 線彙之曲面	231
105. 正線彙	233

習題十三	235
------------	-----

第 十 一 章

曲面之三重正交系

106. 三重正交系	240
107. 正線	241
108. 基本量	242
109. 杜班定理	245
110. r 之第二級導微函數	247
111. 拉美 (Lamé) 之諸關係式	249
112. 達爾布定理	251
習題十四	253

第 十 二 章

對一曲面之微分變不量

113. 點函數	256
114. 數量函數之梯度	256
115. 應用	260
116. 向量之散度	261
117. 等溫參數	263
118. 向量之旋度	265
119. 向量函數(續)	267
120. 展開公式	268

121. 短程曲率	270
習題十五	273

積 分 之 變 換

122. 散度之定理	277
123. 其他諸定理	279
124. 環流定理	282
習題十六	283

第 十 三 章

圓 紋 線 彙

125. 圓紋線彙之方程式. 基本量	287
126. 圓上四焦點	290
127. 相隣圓之相交	291
128. 兩相隣圓各定二焦點之線彙	293
129. 上述線彙之方程式	296
130. 達爾布定理	297
131. 焦點軌跡	299
132. 相隣兩圓間之距離	300
133. 圓紋系	301
習題十七	304

附 錄

一. 曲面之曲率	305
二. 向量符號與公式	307

微 分 幾 何

上 篇

第 一 章

具有撓率之曲線

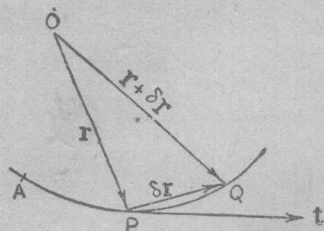
1. 切線. 曲線者爲對一定原點之位置向量* $\mathbf{r}$ 可表以單一參數之函數之點之軌跡也. 由此其直角坐標 x, y, z 亦皆爲同一參數之函數. 曲線不在一平面上者曰空間曲線. 本書僅論不具任何特異點 (Singularities) 之各類曲線.

曲線由一定點 A 至一動點之弧長 s 恆取爲數量參數. 如此則沿曲線諸點, s 之值在 A 點之一旁者爲正, 在他旁者爲負. 曲線於任何點之正向爲依 s 之代數增值而定.

是以曲線上一點之位置向量 $\mathbf{r}$ 爲 s 之函數, 其在所論之域內爲屬於正規, 其對 s 之累次導微函數以 $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''$ 等表之. 設命 P, Q 爲曲線上之點, 其位置向量爲 $\mathbf{r}, \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$, 分別相應於參數之值 s 與 $s + \delta s$; 則 $\delta\mathbf{r}$ 爲向量 PQ . 商數 $\delta\mathbf{r}/\delta s$ 爲一向量, 其方向與 $\delta\mathbf{r}$ 同; 當 δs 趨近於零時, 此方向成爲在 P 點切線之方向. 又當 Q 移動與 P 重合時, 弦 PQ 與

* 凡向量本書皆以英文黑體字母表之.

弧 PQ 長度之比趨近於 1. 故 $\delta \mathbf{r} / \delta s$ 之極限值爲一單位向量, 平行於曲線於 P 點之切線, 且爲正向. 茲以 $\mathbf{t}$ 表之, 而名曰在 P 點之單位切線 (Unit tangent). 由是



(圖 1)

$$\mathbf{t} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}' \dots \dots \dots (1).$$

在 P 點切線之向量方程式立可以書出, 蓋在切線上動點之位置向量 $\mathbf{R}$ 爲

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + u\mathbf{t},$$

其中 u 爲一數量變數, 可正可負, 此即切線之方程式也. 若 x, y, z 爲 P 對通過同一原點之直角坐標, 且 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 爲在諸軸依正向之單位向量, 則

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

又

$$\mathbf{t} = \mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

故切線之方向餘弦爲 x', y', z' , 經過點 P 且正交於切線之平面, 曰 P 點之正面 (Normal plane). 故其方程式爲

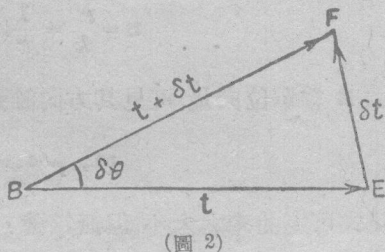
$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0.$$

在此平面內經過點 P 之各直線皆爲曲線之正線。

2. 主正線, 曲率. 曲線於任意一點之曲率 (Curvature) 爲切線旋轉對弧長之變率(或稱切線旋轉之弧變率). 若 $\delta\theta$ 表 P 與 Q 兩點切線間之夾角, 則 $\delta\theta/\delta s$ 爲 PQ 弧之平均曲率; 且當 δs 趨近於零時, 其極限爲 P 點之曲率. 此值有時名曰第一曲率或圓曲率 (Circular curvature), 而以 k 表之. 由

$$k = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \theta}{\delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \theta'.$$

單位切線非為一定向量，蓋其方向隨曲線之點而變也。命 t 為其對於 P 點之值， $t + \delta t$ 為其對於 Q 點之值，若向量 BE 與 BF 依次與之相等，則 δt 為向量 EF ，而 $\delta \theta$ 即角 EBF 。商數 $\delta t / \delta s$ 為平行於 δt 之向量。故當 δs 趨近於零，其極限之方向為正交於 P 點之切線。又因 BE 與 BF 之長為單位，則 $\delta t / \delta s$ 極限值之模數為 $\delta \theta / \delta s$ 之極限值，即 k 。故有下之關係式



$$\frac{dt}{ds} = \lim_{\delta s} \frac{\delta t}{\delta s} = kn \dots\dots\dots (2),$$

其中 n 為正交於 t 之單位向量，且在 P 點及其鄰點之二切線之平面內。此平面含有相鄰二切線，故於 P 點含有三相鄰點，名曰 P 點之曲率平面 (Plane of curvature) 或密切平面 (Osculating plane)。若 R 為此平面內之任一點，則 $R - r$, t 與 n 三向量為共面，故有關係式

$$[R - r, t, n] = 0.$$

此乃密切平面之方程式也；又可以下式為之；

$$[R - r, r', r''] = 0.$$

單位向量 t 與 n 為彼此正交，且其平面為曲率平面。經過 P 點平行於 n 之直線名曰 P 點之主正線 (Principal normal)。其方程式易知為

$$R = r + un.$$

式中 R 為此線上之任意一點。向量 n 名曰單位主正線 (Unit principal

normal). 其方向可由主正線上相反二向之任意一向以定之. 若由 P 點取向曲線凹側之向, 則由 (2) k 必須爲正, 蓋 t' 亦此方向也. 然有時 n 宜取直向曲線之凸側爲便, 在此情形 k 爲負數, 蓋 t' 與 n 之方向此時爲相反也.*

書 (2) 如下形

$$n = \frac{r''}{k} = \frac{1}{k}(x''i + y''j + z''k),$$

因 n 爲單位向量, 可見其方向餘弦爲 $\frac{x''}{k}, \frac{y''}{k}, \frac{z''}{k}$. 又平方 (2), 則

$$k^2 = r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

此式可定曲率之大小, 但無符號.

P 點之曲率圓 (Circle of curvature) 爲經過曲線上與 P 吻合之三點之圓也. 其半徑 ρ 曰圓曲率半徑 (Radius of circular curvature), 其心 C 曰曲率心 (Center of curvature). 此圓顯然在 P 點之密切平面上, 而其曲率與曲線於 P 點之曲率同; 蓋此圓相隣之二切線與曲線爲公有也. 如是,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = k,$$

是以曲率半徑爲曲率之倒數, 且必須視爲與曲率同號, 曲率心 C 在主正線上, 而向量 PC 等於 ρn 或 n/k . 以上所求得之 n 之方向餘弦, 現可書爲 $\rho x'', \rho y'', \rho z''$, 而方程式 (2) 可書爲

$$n = Ct' = Cr''.$$

3. 次正線, 撓率. 曲線於 P 點之諸正線中其正交密切平面者曰

* 但與普通 k 爲正數之實用相反.

次正線 (Binormal), 因此線垂直於 t 與 n , 故平行於 $t \times n$, 以 b 表此單位向量, 則互為垂直之三單位向量 t, n, b 成一右手系, 故有下之關係

$$t \cdot n - n \cdot b = b \cdot t = 0;$$

又 $t \times n = b, n \times b = t, b \times t = n,$

在向量乘積中, 保留輪換次序, b 可名為單位次正線 (Unit binormal). 取 b 之正向為次正線上之正向, 其情形恰與取 n 之正向為主正線上之正向相同, 次正線之方程式為

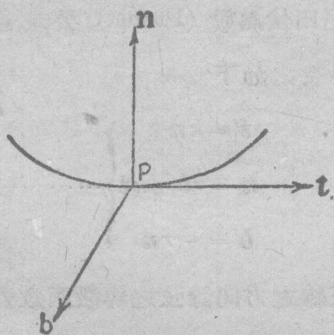
$$R = r + ub.$$

因 $b = t \times n = \rho r' \times r''$, 上式又可書為

$$R = r + v r' \times r''.$$

次正線之方向餘弦, 即 b 之分量, 亦為 $\rho r' \times r''$ 之分量, 故為

$$\rho(y'z'' - z'y''), \quad \rho(z'x'' - x'z''), \quad \rho(x'y'' - y'x'').$$



(圖 3)

因 b 為定長之向量, 故 b' 垂直於 b . 又求關係式 $t \cdot b = 0$ 對 s 之導微函數, 則

$$k n \cdot b + t \cdot b' = 0.$$