大學叢書

微分幾何

周紹濂編譯

商務印書館

大學叢書

微分幾何

周紹濂編譯

商務印書館出版

目　　錄

上　篇

第　一　章

具有撓率之曲線

節數　　　　頁數

第 二 章

包面 可展面

第 三 章

曲面上之曲紋坐標

基 本 量

第　四　章

曲面上之曲線

曲　率　線

共　軛　系

漸　近　線

第 五 章

高斯方程式與科達溪方程式

第 六 章

短程線與短程平行線

與短程線有關之曲線

短程平行線

第　七　章

二次曲面　直紋面

二　次　曲　面

直 紋 面

下 篇

第 八 章

漸屈面或中心曲面 平行曲面

中 心 曲 面

平 行 曲 面

反 曲 面

第 九 章

等角與球面表示法

極 小 曲 面

球 面 表 示 法

極小曲面

第十章

線彙

直紋線彙

曲紋線彙

第 十 一 章

曲面之三重正交系

第 十 二 章

對一曲面之微分變不量

積分之變換

第十三章

圓紋線彙

附錄

微分幾何

上篇

第一章

具有撓率之曲線

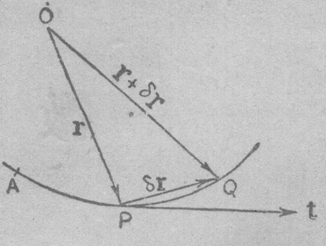
1. 切線. 曲線者爲對一定原點之位置向量* $\mathbf{r}$ 可表以單一參數之函數之點之軌跡也. 由此其直角坐標 x, y, z 亦皆爲同一參數之函數. 曲線不在一平面上者曰空間曲線. 本書僅論不具任何特異點 (Singularities) 之各類曲線.

曲線由一定點 A 至一動點之弧長 s 恆取爲數量參數. 如此則沿曲線諸點, s 之値在 A 點之一旁者爲正,在他旁者爲負. 曲線於任何點之正向爲依 s 之代數增值而定.

是以曲線上一點之位置向量 $\mathbf{r}$ 爲 s 之函數,其在所論之域內爲屬於正規,其對 s 之累次導微函數以 $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''$ 等表之. 設命 P, Q 爲曲線上之點,其位置向量爲 $\mathbf{r}, \mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$, 分別相應於參數之値 s 與 $s+\delta s$; 則 $\delta\mathbf{r}$ 爲向量 PQ. 商數 $\delta\mathbf{r}/\delta s$ 爲一向量,其方向與 $\delta\mathbf{r}$ 同; 當 δs 趨近於零時,此方向成爲在 P 點切線之方向. 又當 Q 移動與 P 重合時,弦 PQ 與

* 凡向量本書皆以英文黑體字母表之.

弧 PQ 長度之比趨近於 1. 故 $\delta\boldsymbol{r}/\delta s$ 之極限值為一單位向量,平行於曲線於 P 點之切線,且為正向. 玆以 $\boldsymbol{t}$ 表之,而名曰在 P 點之單位切線 (Unit tangent). 由是



(圖 1)

$$\boldsymbol{t}=\operatorname*{Lt}_{\delta s\to 0}\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta s}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{r}' \quad\cdots\cdots(1).$$

在 P 點切線之向量方程式立可以書出, 蓋在切線上動點之位置向量 $\boldsymbol{R}$ 為

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+u\boldsymbol{t},$$

其中 u 為一數量變數,可正可負,此卽切線之方程式也. 若 x, y, z 為 P 對通過同一原點之直角坐標,且 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 為在諸軸依正向之單位向量, 則

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

又

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}.$$

故切線之方向餘弦為 x', y', z', 經過點 P 且正交於切線之平面,曰 P 點之正面 (Normal plane). 故其方程式為

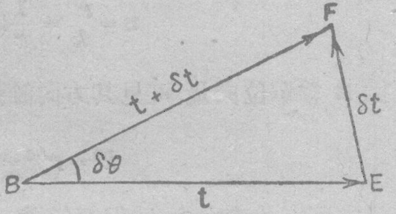
$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}=0.$$

在此平面內經過點 P 之各直線皆為曲線之正線.

2. 主正線,曲率. 曲線於任意一點之曲率 (Curvature) 為切線旋轉對弧長之變率(或稱切線旋轉之弧變率). 若 $\delta\theta$ 表 P 與 Q 兩點切線間之夾角,則 $\delta\theta/\delta s$ 為 PQ 弧之平均曲率;且當 δs 趨近於零時, 其極限為 P 點之曲率. 此值有時名曰第一曲率或圓曲率 (Circular curvature), 而以 k 表之. 由

$$k=\operatorname*{Lt}_{\delta s\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta s}=\frac{d\theta}{\delta s}=\theta'.$$

單位切線非爲一定向量,蓋其方向隨曲線之點而變也. 命 $\boldsymbol{t}$ 爲其對於 P 點之值, $\boldsymbol{t}+\delta\boldsymbol{t}$ 爲其對於 Q 點之值,若向量 BE 與 BF 依次與之相等,則 $\delta\boldsymbol{t}$ 爲向量 EF, 而 $\delta\theta$ 卽角 EBF. 商數 $\delta\boldsymbol{t}/\delta s$ 爲平行於 $\delta\boldsymbol{t}$ 之向量. 故當 δs 趨近於零,其極限之方向爲正交於 P 點之切線. 又因 BE 與 BF 之長爲單位,則 $\delta\boldsymbol{t}/\delta s$ 極限值之模數爲 $\delta\theta/\delta s$ 之極限值,卽 k. 故有下之關係式



(圖 2)

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\operatorname{Lt}\frac{\delta\boldsymbol{t}}{\delta s}=k\boldsymbol{n}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 爲正交於 $\boldsymbol{t}$ 之單位向量,且在 P 點及其鄰點之二切線之平面內. 此平面含有相鄰二切線,故於 P 點含有三相鄰點,名曰 P 點之曲率平面 (Plane of curvature) 或密切平面 (Osculating plane). 若 $\boldsymbol{R}$ 爲此平面內之任一點,則 $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{t}$ 與 $\boldsymbol{n}$ 三向量爲共面,故有關係式

$$[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{n}]=0.$$

此乃密切平面之方程式也;又可以下式爲之;

$$[\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'']=0.$$

單位向量 $\boldsymbol{t}$ 與 $\boldsymbol{n}$ 爲彼此正交,且其平面爲曲率平面. 經過 P 點平行於 $\boldsymbol{n}$ 之直線名曰 P 點之主正線 (Principal normal). 其方程式易知爲

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+u\boldsymbol{n}.$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 爲此線上之任意一點. 向量 $\boldsymbol{n}$ 名曰單位主正線 (Unit principal normal). 其方向可由主正線上相反二向之任意一向以定之. 若由 P 點取向曲線凹側之向,則由 (2) k 必須爲正, 蓋 $\boldsymbol{t}'$ 亦此方向也. 然有時 $\boldsymbol{n}$ 宜取直向曲線之凸側爲便,在此情形 k 爲負數,蓋 $\boldsymbol{t}$ 與 $\boldsymbol{n}$ 之方向此時爲相反也.*

書 (2) 如下形

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}''}{k}=\frac{1}{k}(x''\boldsymbol{i}+y''\boldsymbol{j}+z''\boldsymbol{k}),$$

因 $\boldsymbol{n}$ 爲單位向量,可見其方向餘弦爲 $\frac{x''}{k}$, $\frac{y''}{k}$, $\frac{z''}{k}$. 又平方 (2), 則

$$k^2=\boldsymbol{r}''^2=x''^2+y''^2+z''^2,$$

此式可定曲率之大小,但無符號.

P 點之曲率圓 (Circle of curvature) 爲經過曲線上與 P 吻合之三點之圓也.其半徑 ρ 曰圓曲率半徑 (Radius of circular curvature), 其心 C 曰曲率心 (Center of curvature). 此圓顯然在 P 點之密切平面上, 而其曲率與曲線於 P 點之曲率同;蓋此圓相隣之二切線與曲線爲公有也.如是,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds}=k,$$

是以曲率半徑爲曲率之倒數,且必須視爲與曲率同號,曲率心 C 在主正線上,而向量 PC 等於 $\rho\boldsymbol{n}$ 或 $\boldsymbol{n}/k$. 以上所求得之 $\boldsymbol{n}$ 之方向餘弦,現可書爲 $\rho x''$, $\rho y''$ $\rho z''$, 而方程式 (2) 可書爲

$$\boldsymbol{n}=C\boldsymbol{t}'=C\boldsymbol{r}''.$$

3. 次正線,撓率. 曲線於 P 點之諸正線中其正交密切平面者曰

* 但與普通 k 爲正數之實用相反.

次正線 (Binormal), 因此線垂直於 $\boldsymbol{t}$ 與 $\boldsymbol{n}$, 故平行於 $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$, 以 $\boldsymbol{b}$ 表此單位向量,則互為垂直之三單位向量 $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ 成一右手系,故有下之關係

$$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{t}=0;$$

又
$$\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t},\quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n},$$

在向量乘積中,保留輪換次序, $\boldsymbol{b}$ 可名為單位次正線 (Unit binormal). 取 $\boldsymbol{b}$ 之正向為次正線上之正向,其情形恰與取 $\boldsymbol{n}$ 之正向為主正線上之正向相同.次正線之方程式為

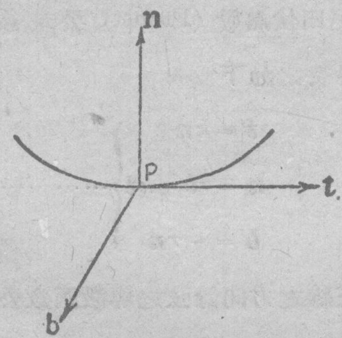
$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+u\boldsymbol{b}.$$

因 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\rho\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$, 上式又可書為

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+v\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''.$$

次正線之方向餘弦,即 $\boldsymbol{b}$ 之分量,亦為 $\rho\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''$ 之分量,故為

$$\rho(y'z''-z'y''),\quad \rho(z'x''-x'z''),\quad \rho(x'y''-y'x'').$$



(圖 3)

因 $\boldsymbol{b}$ 為定長之向量,故 $\boldsymbol{b}'$ 垂直於 $\boldsymbol{b}$. 又求關係式 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 對 s 之導微函數,則

$$\kappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{b}'=0.$$