正多边形与圆

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编

上海教育出版社

正 多 边 形 与 圓

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会編

上 海 教 育 出 版 社

一九五九年·上海

正多边形与圆

中国数学会上海分会
中学数学研究委員会編

上海教育出版社出版
(上海永福路123号)
上海市书刊出版业营业許可証出090号

上海市印刷四厂印刷　新华书店上海发行所总經售

开本：787×1092　1/32　印張：4 5/16　字数：99,000
1957年1月新知識出版社第1版第6次印刷(135,001—150,000本)
1959年5月新1版　1959年5月第1次印刷
印数：1—12,000本

統一书号：7150·522
定　价：(九)0.38元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教師積極提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关中学数学各科包括几何、代数、三角、算術教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同时也可供高初中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材內容。我們希望通过这套小册子的出版，能供数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流。

这本“正多边形与圓”的小册子，系根据中学数学教学大綱修訂草案“正多边形与圓的周長和面積”并参考吉西略夫高中平面几何編寫的。它对于正多边形作圖的可能与不可能問題作了比較詳細的討論，对正十七边形的作圖和正多边形的近似作圖在实际应用中的作用，对正多边形与圓周長、圓面積之关系都作了詳細的叙述，并通过一些例子來說明正多边形与各种圓弧圖形的周長和面積的計算，及其作圖和証明。本書并介紹了正星形的作圖和五角星的特性，对我國古代数学家在等分圓問題上的偉大成就，也作了比較詳細的介紹。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，經編輯組兩次討論，然后确定初步提綱，分別由張元書、賴云林兩同志提供材料，而由黃松年同志执筆寫成，再經楊榮祥同志校訂，最后由楊榮祥、黃松年兩同志作了修正。虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委員会　1958年9月

目 錄

正多边形的性質

什么是正多边形？我們說凡一个多边形它的边都相等而角也相等时則称之为正多边形，如以前見过的正三角形，正方形都是．顯然正多边形是多边形的一种特殊圖形．

在人們的生活中，無論在生產工具及机械制圖上，或者是房屋建筑及彫刻藝术上，我們都可以看到有許多等边又等角的正多边形的圖案，如机械另件的鏍釘、公園里的八角亭等都是．我們國旗上壯丽的紅五星圖形也是由正五边形而作出來的．因此研究正多边形是有它的实际用处．

同时以前我們只研究过一般直綫形的面積，今后通过正多边形的研究不僅可掌握正多边形的度量問題，且可解决圓的周長及其面積的度量問題．这些都是学習正多边形的主要目的．

在研究正多边形之先須討論一种正折綫的性質，所謂正折綫是一种特殊的折綫，它具有下列三个特性：

1．組成折綫的各綫段（即折綫的各边）相等．

2．每相鄰兩边所夹的角相等．

3．在每相連的三边中第一边和第三边在第二边的同側．

如圖 1，$ABCDEF$ 及 $GHLMN$ 都是正折綫，因为它們都

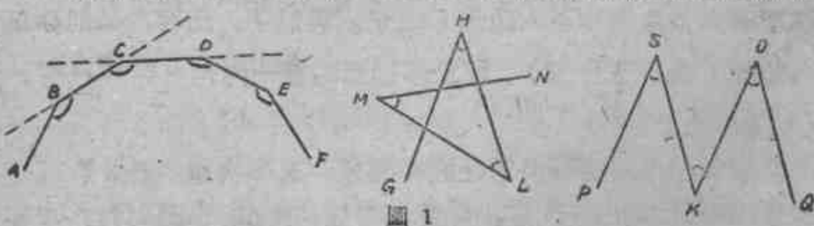

圖 1

符合于上面三个条件．但对于 $PSKOQ$ 來講，虽然 $PS=SK=KO=OQ$，$\angle S=\angle K=\angle O$，由于倘不符合于第三个条件，所以仍不能称 $PSKOQ$ 为正折綫．

当正折綫又符合于凸折綫的性質，我們就称这种正折綫为凸正折綫，如圖 1 中 $ABCDEF$ 就是凸正折綫，而 $GHLMN$ 就是非凸正折綫．所以对于正多边形來講我們又可以說，凡由凸正折綫所圍成的封閉圖形称为正多边形，如圖 2 中的正多边形 $ABCDE$．但由非凸正折綫所圍成的封閉圖形我們称为复雜的正多

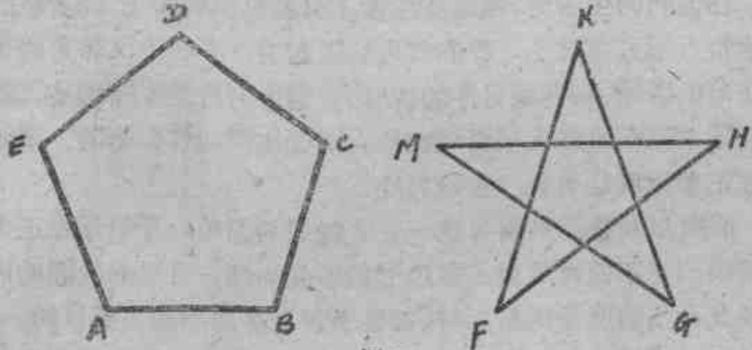

圖 2

边形，有时是一种星形，如圖 2 中的五角星 $FGHKM$ 就是屬于这种圖形的一种．

但在这里我們对于复雜的正多边形是不加研究的，它不屬于中學几何的范圍．

正多边形的名称係由它的边数或角頂数来确定，如这正多边形有六条边則称正六边形（或正六角形），如有八条則称正八边形（或正八角形）．而正多边形的每一內角 $=\dfrac{2d(n-2)}{n}$．（n 表示边数）

假如一个圓能够將它分成 n 等分，又順次連接各分点成一多边形的話，則由于同圓中等弧对等弦、等弧对等圓周角，可知

这多边形的边相等而角也相等，所以是一个正多边形.

正多边形具有下列一些特性：

1. 任何正多边形必有一个外接圓和一个內切圓，它的外接圓与內切圓是同心圓. 这同心圓的中心称为这正多边形的中心，外接圓的半徑称为这正多边形的半徑，而內切圓的半徑称为这正多边形的边心距.

2. 当n正多边形的边数为偶数时，則相对兩边中点的連綫及相对兩角頂点的連綫都是这n正多边形的对称軸，且这正多边形的中心也就是它的对称中心.

当n正多边形的边数为奇数时，則每边的垂直平分綫即为这边对角的角的平分綫，这些綫段也是这n正多边形的对称軸.

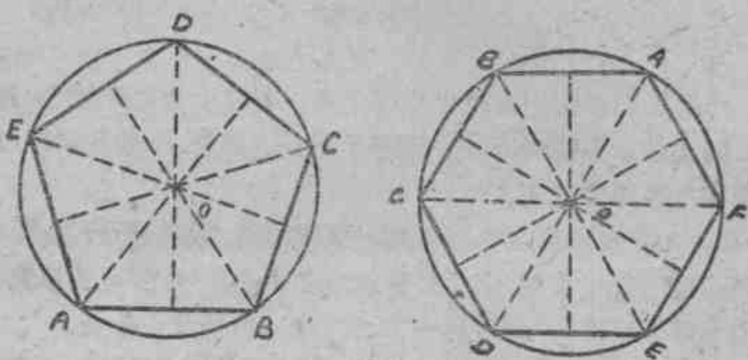

圖 3

3. 凡边数相同的正多边形是相似形.

因为正多边形的各边都相等，很容易得出这些边数相同的正多边形的边是成比例的，同时它每一內角$=\frac{2d(n-2)}{n}=2d-\frac{4d}{n}$=定值，所以它們的角也相等，顯然是相似形.

由于相似多边形对应綫段均成比例，所以边数相同的正多边形对应边之比，等于其內切圓或外接圓半徑之比，也等于其周

長之比.

4. 凡正多边形的面積等于其周長乘边心距的一半.

我們只要把正n边形分成n个有公共頂点（正多边形中心），并以各边为底的相等的等腰三角形（如圖4）

这样正多边形$AB\cdots\cdots E$的面積

$=n\cdot\triangle ABO$的面積$=n\cdot\dfrac{1}{2}AB\cdot ON$

$=\dfrac{1}{2}(n\cdot AB)ON.$

$\because\ n\cdot AB=$正多边形$ABC\cdots\cdots E$的周長.

$\therefore$ 正多边形$ABC\cdots\cdots E$的面積$=\dfrac{1}{2}$周長×边心距.

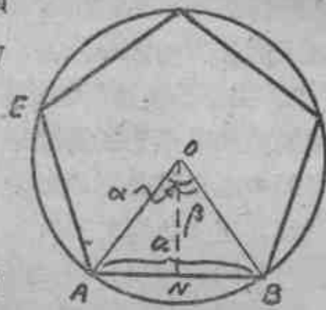

圖 4

根据相似多边形面積之比等于对应綫段平方之比的性質，**可知同边数正多边形面積之比等于边長、周長、內切圓半徑、或外接圓半徑平方之比.**

5 凡正多边形之中心与其一边兩端点之連綫所夾之角称为正多边形之中心角，由于**正多边形之中心角**$=\dfrac{4d}{n}$，**所以它的中心角等于其外角，同时每一中心角与一內角互为补角.**

上述各点都是正多边形所具有的特性，但我們从凡正多边形都有一个外接圓的性質中可以看出正多边形的作圖問題就是等分圓的問題. 如果我們將一个定圓分成n等分連接每相鄰的兩个分点的各弦，則可以組成一个正多边形，这个正多边形又称为圓的內接正多边形. 如果过各个分点的切綫每相鄰的兩条相交組成的正多边形，或者引平行圓的內接正多边形各边的直綫并使諸直綫分別与該圓相切則必組成一个正多边形，均称为圓的外切正多边形. 如圖5中$ABCDEF$为O圓的內接正多边形，

而 $SMNPQR$ 为 O 圓的外切正多边形.

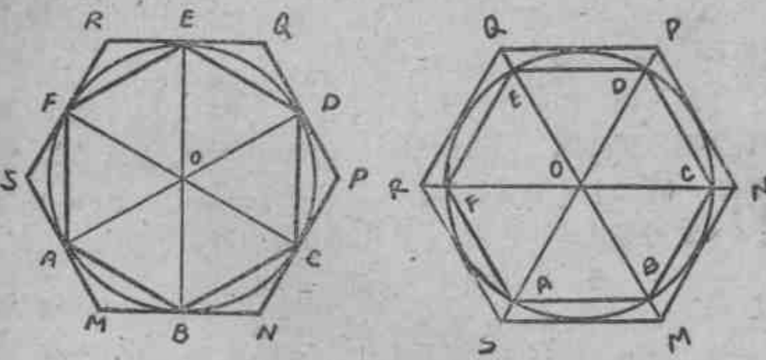

圖 5

我們能够將圓周分成多少等分，則相应的可作出这圓的內接或外切多少边的正多边形.但是否一个圓可以任意等分呢?讓我們來討論这个問題.

1. 作圓的內接或外切正方形.

因为正方形的对角綫分原形为四个全等的等腰直角三角形，所以我們只要在 O 圓內作互相垂直的兩条直徑 AC 和 BD，連接 AB、BC、CD，及 DA，則 $ABCD$ 是所求作的內接正方形.

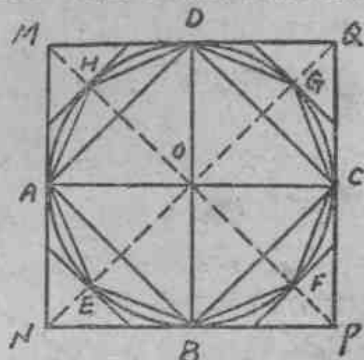

圖 6

如果我們过 A、B、C 及 D 分別作 O 圓之切綫，則得 O 圓之外切正方形 $MNPQ$.

如果我們將这內接正方形各边所对的弧平分（只要將各边的边心距引長交于圓周即得所对弧的二等分点），順序連接圓周上的各分点，則可得圓的內接正八边形.如果过这些分点引这

圖的切綫，則可得这圓的外切正八边形.

同样如果再取这內接正八边形每边所对弧的中点，我們又可得这圓的內接正十六边形.

顯然不僅这圓的外切正十六边形是可作出，同时我們若繼續仿上面步驟作圖，則可作出这圓的內接和外切正三十二、六十四、一百二十八等多边形. 从这里可得一規律：凡符合于$n=4\times 2^k$的形式均可作圖，（k可为0及自然数）即

当 $k=0$ 时， 則 $n=4$

$k=1$ 时， 則 $n=8$

$k=2$ 时， 則 $n=16$

……………………等等.

2. 作圓的內接或外切正六边形.

根据在同圓中相等的中心角必对等弧的性質，可知圓內接正六边形的中心角$=60°$. 但由于正多边形之中心与它一边兩端点之連綫組成一个等腰三角形，而正六边形的中心角为$60°$，所以正六边形的中心与任一边兩端点連綫組成的等腰三角形是等边三角形. 也即正六边形的边長就等于它外接圓的半徑，因此我們只要用O圓之半徑R，从圓周上某一点起順次截取，就可得六个等分点A、B、C、D、E、F，連接这些分点所圍成的多边形即为所求作之內接正六边形.

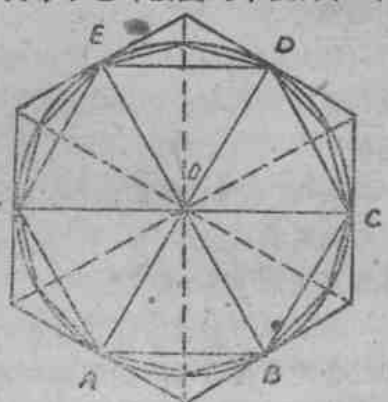

圖 7

如果我們过这內接正六边形的每一个頂点引这圓的切綫，則又可得这圓的外切正六边形.

如果我們从已得的圓的內接正六边形的各頂点，順次間隔一点連接，則可得这圓的內接正三角形。同样若过各分点引这圓的切綫可得这圓的外切正三角形。

如果从已得圓的內接正六边形各边所对的弧上取其中点，再順次与該圓內接正六边形各点連接起來，又过各分点和圓內接正六边形各頂点作这圓的切綫，我們又可得这圓的內接和外切正12边形來。

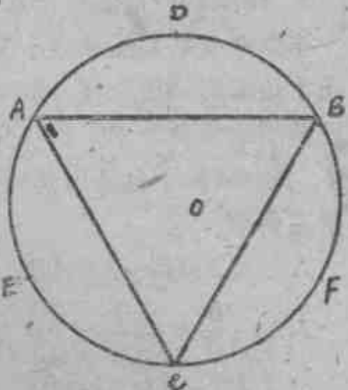

圖 8

顯然如按上面步驟依次作下去，我們尙可以作出这圓的內接或外切正 24，48，96……等多边形來。从这里可作这类正多边形的規律的关系式：$n=3\times 2^k$。（n 表示边数，k 表示零及自然数。）

当 $k=0$ 时，　则 $3\times 2^k=3$；

$k=1$ 时，　则 $3\times 2^k=6$；

$k=2$ 时，　则 $3\times 2^k=12$；

……………………等等。

我們对于內接正三角形的作圖又可用另一种方法，先在定圓 O 內作任意直徑 AD，再过 OD 的中点 M 作弦 $BC\perp OD$，連接 AC、AB，則 $\triangle ABC$ 为正三角形。

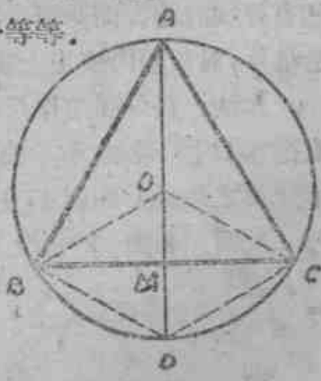

圖 9

因为 $OD\perp BC$，$\therefore BM=MC$，又 $OM=MD$，故四边形 $OBDC$ 是菱形，

$\therefore BD=DC=CO=OB=R$(R为半徑)

可知 BC 为正三角形的一边.

3. **作圓的內接或外切正十边形.**

本問題就是將圓分成十等分的問題. 假定 AB是 O圓的內接正十边形的一边之長,則AB兩端点与中心O連接所組成的等腰三角形的頂角为 36°, 底角为 72°. 如作 $\angle A$ 的平分角綫 AM, 則$\triangle AMB$ 也是頂角为 36° 的等腰三角形.

$\therefore \quad \triangle AMB \sim \triangle OAB$,

$\therefore \quad \dfrac{OB}{AB}=\dfrac{AB}{MB}$,

$\because \quad AB=AM=OM$,

$\therefore \quad \dfrac{OB}{OM}=\dfrac{OM}{MB}$.

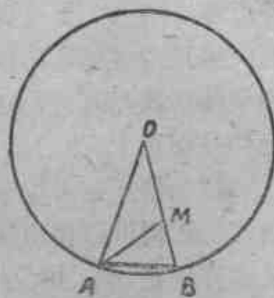

圖 10

所以正十边形一边之長, 就等于它的外接圓的半徑按黃金分割較長的部分, 因此我們只要拿这个長度在已知圓周上依次截取則必將这圓十等分,因而可作出这圓的內接正十边形.

关于將一綫段黃金分割的作圖, 在几何作圖的代数解法中已有詳細討論, 而前面討論黃金分割也正是为正十边形作圖創造条件,对于圓內接正十边形的作圖法如下.

作法: 在O圓內作互相垂直之兩直徑 AF及 CH,以 OC 为直徑作 O'圓,連接 AO' 交 O' 圓于N, 則 AN 即为O圓內接正十边形之边長(如圖 11).

証明: 如圖 12 中若 AO 与 BO 为O圓之半徑, 而$\dfrac{AO}{OM}=\dfrac{OM}{MA}$, $AB=OM$,

則 $$\frac{AO}{AB}=\frac{AB}{MA},$$

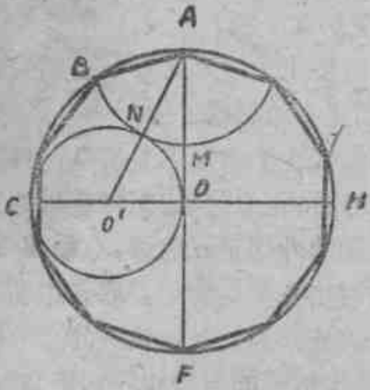

圖 11

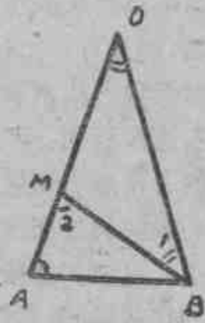

圖 12

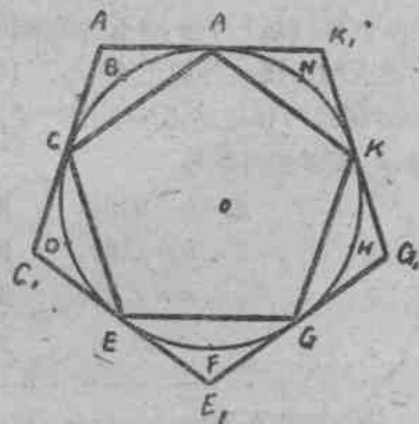

圖 13

∵ $\angle A$是$\triangle AOB$与$\triangle ABM$之公共角，

∴ $\triangle AOB \sim \triangle ABM$.

∴ $\triangle ABM$亦为等腰三角形，

即 $AB = MB = OM$.

∴ $\angle 1 = \angle O$,

$\angle A = \angle 2$.

∵ $\angle 2 = \angle 1 + \angle O = 2\angle O$,

∴ $\angle A = \angle B = 2\angle O$.

∵ $\angle A + \angle B + \angle O = 180°$,

即 $5\angle O = 180°$.

∴ $$\angle O = 36° = \frac{360°}{10}.$$

∴ $$\overset{\frown}{AB} = 36° = \frac{360°}{10}.$$

$\therefore$ AB 为圓的內接正十边形之一边.

如果我們从所求作之圓的內接正十边形的各个頂点引这圓的切綫,則又可作出这圓的外切正十边形來.

如果我們从所求作之圓的內接正十边形之各頂点，每隔一点順次連接起來,則可得这圓的內接正五边形;同样若过这正五边形的各頂点引切綫則又得这圓的外切正五边形.(如圖 13)

如果我們从所求作之圓的內接正十边形上，取各边所对弧的中点，幷依次連接这圓周上的各分点，及过这些分点分別引这圓的切綫,顯然我們又可以作出这圓的內接和外切正 20 边形來.

如果按这样的步驟不断的將圓弧二等分下去，我們可以作出这圓的內接或外切正 40, 80, 160 ……等多边形來.从这里我們又得出可作这类正多边形的关系式: $n=5\times2^k$. 这里 n 表边数,k 表零或自然数.

当 $k=0$ 时, 則 $n=5$;

$k=1$ 时, 則 $n=10$;

$k=2$ 时; 則 $n=20$;

$k=3$ 时, 則 $n=40$;

……………………等等.

4. 作圓的內接或外切正 15 边形

由于圓內接正三角形与正五边形可以作圖，則圓內接正十五边形亦可作圖的,这是什么緣故呢?因为3、5是兩个質数,根据代数学上的定理,知道必定有兩个整数m, n 存在,而使 $3m+5n=1$, 即 $\frac{m}{5}+\frac{n}{3}=\frac{1}{15}$,这由不定方程解法可求出其中一組根为: $m=2$, $n=-1$.

$\therefore$ 得 $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$,

即將圓三等分于 A、B、C，再將其五等分于A、P、Q、R、S，

则 $\overset{\frown}{AQ}=\frac{2}{5}$圓周，

$\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{3}$圓周，

$\therefore\ \overset{\frown}{BQ}=\frac{2}{5}$圓周$-\frac{1}{3}$ 圓周

$=\frac{1}{15}$圓周，

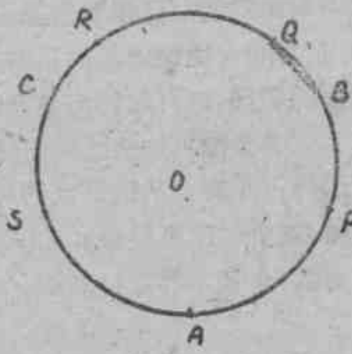

圖 14

$\therefore$ BQ是这圓的內接正十五边形之边長（如圖14）．

此外我們还可从圓的內接正十五边形的中心角$=\frac{360°}{15}=24°=60°-36°$ 的关系式中推導出作圖的方法來．因为60°及36° 的中心角分别为圓的內接正六边形及正十边形的中心角，因此在圓的內接正六边形及正十边形的作圖基礎上，就可以進行圓的內接正十五边形的作圖．这个作圖如果用上面理論來講也是一样的．因为$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$，因此我們只要先將圓六等分，設其一条弧为$\overset{\frown}{AB}$，再將其十等分設其一条弧为$\overset{\frown}{AC}$，則$\overset{\frown}{CB}$为圓周的$\frac{1}{15}$，也就是 CB 为內接正15边形之边長．我們只要以这 CB 之長依次在这圓周上截取，就可以作出这圓的內接正15边形來（如圖 15）．

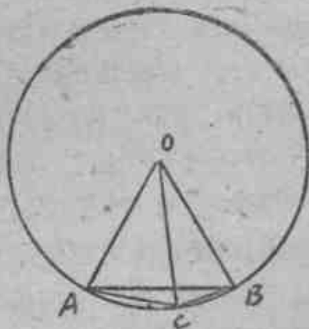

圖 15

如果我們从已得的圓內接正十五边形各頂点依次引O圓之切綫，則又可得这圓的外切正15边形．

如果我們从已得的內接正十五边形各边所对的弧上分别取中点，并順次連接这圓周上的各点，同时过这圓周上各点分别引这圓的切綫，則可以作出这圓的內接和外切正 30 边形來。

依次类推可知这圓的內接和外切正 60，120，240……等多边形均可作圖，从这里我們可以得出这类正多边形可以作圖的規律。这个規律可以用 $n=3\cdot5\cdot2^k$ 的关系式來表示。在这里 n 表示边数，k 表示零或自然数。

当 $k=0$ 时， 則 $n=15$，

$k=1$ 时， 則 $n=30$，

$k=2$ 时， 則 $n=60$，

$k=3$ 时， 則 $n=120$，

……………………………等等。

在上面我們討論了許多种正多边形的作圖，但是我們到底能够作出多少种正多边形的圖形來呢？由于几何作圖只限于圓規和直尺，因此我們运用圓規和直尺來等分圓能够分割的方法是有限的。有許多种的等分我們不能作圖，例如將一个圓七等分或九等分就不可能了。在数学發展史上，許多前輩們曾付出了多少辛勤的劳动从事研究。在 17 世紀德國数学家高斯曾經提出过檢驗圓內接正多边形作圖可能的一个理論，不过这个理論是根据高等数学的原理而推導的，因此在这里我們不能將他所提的原理來談，只能將高斯檢驗的方法提出介紹。

高斯認为凡正多边形屬于下述情況之一者是可以作圖。

1 当边数 n 为質数时，而形狀为 $n=2^{2^k}+1$ 者（在这里 k 可为零及自然数）。

当 $k=0$ 时， 則 $n=3$.

$k=1$ 时， 則 $n=5$.

$k=2$ 时， 則 $n=17$.