



数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

# 数学—— 直觉与逻辑的交响乐

Mathematics—Symphony of Intuition and Logic



周建勋 陈华 徐沥泉 著

大连理工大学出版社 | DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

# 数学—— 直觉与逻辑的交响乐

Mathematics—Symphony of Intuition and Logic



周建勋 陈华 徐沥泉 著

大连理工大学出版社 DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

## 图书在版编目(CIP)数据

数学:直觉与逻辑的交响乐/周建勋,陈华,徐沥泉  
著. —大连:大连理工大学出版社,2009.8  
(数学方法论应用传播丛书)  
ISBN 978-7-5611-4990-4

I. 数… II. ①周… ②陈… ③徐… III. 数学方法—方法  
论 IV. O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130409 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dulp@dulp. cn URL: <http://www. dulp. cn>

大连美跃彩色印刷有限公司印刷

大连理工大学出版社发行

---

|                  |           |                   |
|------------------|-----------|-------------------|
| 幅面尺寸:147mm×210mm | 印张:11.375 | 字数:221 千字         |
| 2009 年 8 月第 1 版  |           | 2009 年 8 月第 1 次印刷 |

---

责任编辑:王 伟

责任校对:骁 杰

封面设计:孙宝福

---

ISBN 978-7-5611-4990-4

定价:28.00 元



数学方法论应用传播丛书

## 编写委员会

丛书顾问(按姓氏笔画排序)

王梓坤 刘绍学 周春荔 林夏水

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

执行主编 唐志华

委员(按姓氏笔画排序)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 于世章 | 王民珠 | 王光明 | 朱恒杰 |
| 何万生 | 吴勤文 | 杨世明 | 杨冠夏 |
| 陈安宁 | 陈远刚 | 周公贤 | 周家禧 |
| 徐献卿 | 袁 渊 | 郭 璋 | 顾晓华 |
| 储东花 | 谢 祥 | 裴光亚 |     |

“数学方法论应用传播丛书”题词

# 推广数学方法论二十年

徐利治

2009年8月于大连

# 总 序

“太湖烟波碧沉沉 渤海嗒淋<sup>①</sup>沁人心。”

由大连理工大学出版社出版的“数学方法论应用传播丛书”，与读者见面了。这是我国数学科学与数学教育文库百花园中的一簇奇葩。

先让我们扼要地回顾一下这套丛书的由来。

1987年8月，无锡市的数学老师应邀出席了由大连理工大学应用数学研究所主办的“全国数学方法论和数学史学术研讨会”。在此期间，一连六天，我国著名数学家徐利治教授作了关于“数学方法论和G·波利亚数学教育思想”的系列讲座。尔后，无锡市的老师又出席了由周春荔先生、杨世明先生在首都师范大学主持召开的“全国首届波利亚数学教育思想学术研讨会”。

返锡后，他们在时任无锡市教育局局长周稽裘先生的亲自部署和直接领导下，在无锡市原教研室主任、特级教师李永灿先生的支持与指导下，成立了无锡市MM(Mathematical Methodology)课

---

① “大连”原本是满语中“嗒淋”的译音，本意是“海滨”之意。

题组. 教育行政部门组织和协调市教育科学研究所、市教研室和江南大学·教育学院等各方面的研究力量,“强强联合”协作攻关,设计出“贯彻数学方法论的教育方式,全面提高学生素质”的数学教育实验(简称 MM 实验)课题. 从此,在中国无锡市正式拉开了把数学方法论和波利亚数学教育思想直接应用于数学教育教学实践的序幕.

此后,在时任江苏省教委主任袁相碗教授、副主任周稽裘先生的关心支持下,在无锡市教委主任林建坤先生的直接参与和领导下,MM 课题先后列入江苏省教育科研“八五、九五”重点项目和国家教委“八五规划”项目.

经过 5 年实验,证明 MM 教育方式不仅减轻了师生的负担,而且提高了老师的数学水平和教学水平,从而提高了教学质量. 因此,它于 1994 年通过了受江苏省教委委托,由王梓坤院士、徐利治教授组成的专家组的鉴定,并获得高度好评.

MM 实验从设计到确立为一种教育方式(MM 教育方式),并且推广到全国十几个省、市、自治区,迄今已经整整 20 年. 这其中倾注了设计者、实验者、推广者的大量心血. 当年参加实验和推广的老师已经陆续退休了,而且随着年龄的增长,他们将无法到全国各地亲自指导和推广 MM 实验. 这就提出一个问题:如何使 MM 实验继续推广下去,使 MM 教育方式世代相传,并且随着时代的发展而不断发展?

当然,作为实验,已经出版过两本教材:杨世明、周春荔、徐沥泉等著《MM 教育方式:理论与实践》(2002 年)和徐沥泉著的《教学·研究·发现——MM 方式演绎》(2003 年). 不过,MM 实

验需要具备一定的条件,这就使得它的传播带有一定的局限性.特别是对于不具备实验条件,又希望在数学教学中贯彻 MM 教育方式的一些重要教育思想和教学方法的老师来说,则需要一部能概括 MM 实验、MM 教育方式的普及书.因此,我在 2006 年于新疆召开的数学科学方法论研究交流中心理事会上提议:撰写一部“MM 教育方式”雅俗共赏的书籍.

现在,我国各地 MM 实验点一线教师,以及热心于数学方法论的理论传播和应用研究的大、中、小学数学教师 and 教学研究人员集思广益,共同努力,分工协作撰写的“数学方法论应用传播丛书”,终于正式出版了.她比我原先设想的 MM 教育方式普及性书籍能更全面地传播数学科学,传播数学方法论,传播数学文化,传播数学的精髓.是一套让人走进数学,理解数学,鉴赏数学,品味数学,直到热爱数学和应用数学,宣传数学思想方法的高级科普读物.

丛书作者的知识结构、年龄结构合理,在丛书写作方面具有最佳的主体结构.作者的年龄跨度从 33 岁至 89 岁,这是少见的,也是十分可喜的.我国一批著名数学家、科学家都十分关心和支持数学方法论的研究与普及工作,关心数学科普作品的撰写与出版.王梓坤教授的《科学发现纵横谈》一书,就给我们如何撰写科普著作做出了榜样.该书对从事理科和文科工作的同志都起到了很好的教育作用.本套丛书的作者也认真学习和尝试了这种风韵.

值此 MM 课题实施 20 周年之际,王梓坤院士和刘绍学教授等又为 MM 实验纪念活动,为本套丛书的出版发来了热情洋溢的贺词与贺信.年届 90 的徐利治教授亲自撰写有关 MM 教育方式

的论文和《MM 教育方式：理论与实践》一书的序言。“天下士非一方之士，人伦师乃万世之师。”他们为本套丛书留下了珍贵的作品和墨宝，他们的思想在这套丛书中得以充分体现，以飨读者。作为一名数学哲学工作者，看到这些著名数学家和科学家为数学科普工作付出的辛劳，我感到由衷的欣慰。

丛书共有八本专著和一本编著。《源于教学·高于教学——MM 方式演绎》一书，是《教学·研究·发现——MM 方式演绎》（科学出版社，2003 年 3 月）的姊妹篇，其中收录了全国各实验点 70 余位老师的专题论文、研究报告、教学设计和教学实录。他们之中有著名学者，大学教授、副教授、讲师和初出茅庐的博士、硕士；有中、小学的特级教师、高级教师；有享受国家和地方政府特殊津贴的专家，全国模范教师、先进教师和科技拔尖人才。

《合情推理趣引》、《数学——直觉与逻辑的交响乐》、《数学和谐美》等著作，揭示和展现了数学发现和发明过程中直觉思维、形象思维和逻辑思维交融的旋律。数学和文学、数学和艺术都是相通的。

数学是研究抽象事物的，它的抽象性保证了其应用的广泛性。如何教育学生从具体事物中抽象出数学问题？《学会抽象与建模》一书的许多数学模型都是从日常生活中以及我们身边的例子提炼（抽象）出来的，有一部分是中学数学课堂教学的实例，还有一部分是由中学生从自己周围的具体事例中抽象概括出来的数学模型和他们的获奖作品，颇具特色，也有一定的应用价值。学会抽象与建模应该成为学习数学的一种技能。

数学教育是人类的一件大事。古往今来，许许多多数学家、教

育家、教师和数学教育工作者，一直在“摸着石头过河”。怎样摸得更好？怎样避免陷入泥潭？记得一位伟人说过：“人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。”那么，《数学·教学·哲学》和《世纪婚约——哲学与数学教育联姻的实践与思考》这两部著作将给我们带来深刻的启迪与思考。它将帮助我们回答数学的本质是什么，数学教育和数学教学的本质又是什么，在数学教学中怎样提高学生的一般科学素养，增进社会文化修养，形成和发展数学品质，从而全面提高学生的素质。

一个好的数学教师，他的任务是帮助学生了解数学文化、喜爱数学文化、陶醉于数学文化，进而让学生学会用数学家的思维方式思考问题、解决问题。正如波利亚所说，让处于性格极易改变的青少年时期的学生，养成善思的好习惯，从而改变他们一生的命运。《从喜欢到入迷——学好数学的秘密》一书的作者将以自己的亲身经历说明如何用以上思想来教育学生，让学生从害怕数学、讨厌数学的困境中解脱出来，从而热爱数学，迷恋数学。从一二十分到全年级前三名，一些看来是神话般的例子，确实是现实的，关键是要真正地了解数学及其教学方法。

《数学思想赏析》一书内容丰富、内涵深刻，作者居高临下，又深入浅出。可供非数学专业的读者领略和赏析数学美，学到一定的数学常识、数学知识、典型的数学思想与方法；也可供爱好数学和数学专业的读者在茶余饭后分享与品味作者精心设计与制作的数学实例。它会引起具有较好数学基础和具备较高数学素养的读者的共鸣。

总之，本套丛书是具有数学科学方法论特色、兼具鉴赏性和教

材性的数学专题科普著作。同时,她又沟通了文理科学,内容丰富,事例翔实,起点有高有低,读者可各取所需,适合于广大数学爱好者阅读。

“数学方法论应用传播丛书”的宗旨是:走进数学,理解数学,养成数学思维,欣赏数学的美;品味数学,启迪心智,增强数学修养,弘扬数学文化。我们要提倡、鼓励和采取有效机制让学习和从事文科的人们读一点自然科学的科普读物;学习和从事理科(含数学)的人们阅读和鉴赏一些文学、艺术名著。开阔思路,从事跨学科的研究工作,把各自的思维活动发挥得淋漓尽致,不断地实现科学研究中的发明和发现。

林夏水

2009年2月15日

# 从一首(幅)名诗(画)谈起

## (代前言)

先欣赏一首名诗：

题都城南庄

崔 护

去年今日此门中，人面桃花相映红。

人面不知何处去，桃花依旧笑春风。

我们先把它直译如下：

去年的今天，诗人在郊外一座桃花盛开的庄园里，看见一位美丽的姑娘。少女的面庞和盛开的桃花相互映衬，都更加美丽。时隔一年的今天，他又来到此地，那位含羞的姑娘不知去向了，只有那桃花依旧在轻拂人面的春风中盛开着。

出处 据孟棻《本事诗》记载：

唐朝诗人崔护，某年应试不中，心里不爽。清明节到郊外春游。在一个小村庄里，见到一个美貌的姑娘倚在桃树旁，显得十分娇艳

可爱.当时,崔护因酒后口渴,便向她讨些水喝.姑娘给了他一杯水,崔护喝完后,很想与姑娘再说些什么,却因萍水相逢不敢唐突,只好怅然离去.

第二年清明,崔护兴致勃勃地又来到这里,但只见双门紧闭,而不见那姑娘.崔护久等不见姑娘露面,便在门上题诗一首:

“去年今日此门中,人面桃花相映红;人面不知何处去,桃花依旧笑春风.”

又过了几日,他再去登门拜访,才知那姑娘因想念他竟绝食而死.崔护悲恸不已,在尸体旁大声呼叫:“崔护在此!崔护在此!”姑娘竟被感动了,又复活过来,于是二人结为伉俪.

思维解析 如果我们用思维的观点审视这幅美丽的诗画,则可以毫不夸张地说,这是直觉与逻辑的交相辉映.直觉与逻辑交织在一起,真可谓如诗如画,美不胜收.然而,不论离开直觉或逻辑的哪一个侧面,都不会再呈现出这样如诗如画美妙的情景,也就不可能有这一段美丽的佳话.

我们先来看一下如果仅有逻辑的连接,那就是画面:

A:诗人应试不中⇒借酒消愁⇒到郊外散心来到桃花庭园⇒遇见美丽的未婚女子心生爱慕之情⇒但不知姑娘是否也爱他⇒不便多留只能快快离去⇒第二次又去未遇留情诗试探⇒第三次来访证实姑娘也相恋于他⇒终于结为夫妻.

美丽的未婚女子依倚在桃花树旁⇒碰到诗人来求她取水解渴⇒她对诗人心生爱慕⇒但不知诗人是否也爱他⇒在自家门上看到诗人爱她的情诗⇒证实诗人也相恋于她,然而相思成疾而亡⇒最

后在诗人爱情的感召下起死回生，终于结为夫妻。

这就显得有些干巴巴的了。

如果我们进一步把它们抽象一下，设诗人为甲，姑娘为乙，桃园为丙，那就可以简化为如下画面：

B：甲来到丙处 $\Rightarrow$ 与正在丙处的乙相逢 $\Rightarrow$ 甲乙两人在丙处相互产生了爱情 $\Rightarrow$ 但甲乙双方由于没有及时向对方倾诉出现了一些波折 $\Rightarrow$ 甲乙双方都经过了一番努力最终在丙处相逢结为夫妻。

当然还可以进一步抽象为画面：

C：甲 $\overset{\text{丙}}{\rightleftharpoons}$ 乙

等等。这样就毫无趣味了。

但如果仅有形象思维，没有逻辑推理，尽管你把姑娘描绘得多娇多美，桃花写得多艳多红，诗与画就都不成体统了。读者可以自己设想一下。

我们别的不说，分析一下诗中第二句“人面桃花相映红”就可看出，直觉与逻辑是怎样相互交织在一起的。

一个“相”字，是相互的“相”。阳春三月，姹紫嫣红的桃花与姑娘那娇羞妩媚的脸庞相互映衬着。它是人面和桃花之间的逻辑连接词，没有“相”字也就没有更美的画面。这种更美的画面，诗人用一个耀眼的“红”字直接反映出来，强烈地渲染出这种相映生色的景象和气氛，它是形象思维的集中体现。春风中的“桃花”被姑娘“人面”映得分外红艳；本来已经很美的人面，在红艳艳的桃花映照之下更显得青春美貌，风韵袭人。

面对着这一幅色彩浓丽、青春焕发、两相辉映的人面桃花画

面,我们还可以作这样的推理和想象.不用说姑娘的神采美貌如在眼前,这正是诗人当时和以后的心事,而这位美貌姑娘面对着一位儒雅风流的翩翩少年,也早已“情窦欲开先自窒,心里已净弗须锄”(宋·郭印《次韵正纪见贻之计》)了.他们彼此藏在心中的爱恋和兴奋,都是可想而知的了.

可见文学和诗歌也不仅是形象思维的科学,应该有逻辑推理.我们平常所言,文学是靠形象思维,数学是靠逻辑思维.这都不全面.当然,数学自然要凭借逻辑推理,但是数学也少不了形象思维.如果数学中缺少形象思维,它就会像我们刚才所看到的画面 B 那样,只剩下骨架,没有血肉,无人会去主动问津,更不会有多少人再钟情于她了.

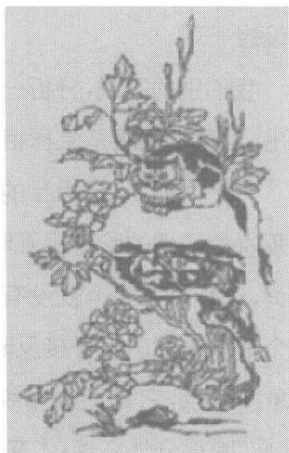
再观看一幅名画:

#### 正午牡丹

原文:

欧阳公尝得一古画牡丹丛,其下有一猫,未知其精粗.丞相正肃吴公与欧公姻家,一见,曰:“此正午牡丹也”.何以明之?其花披哆而色燥,此日中时花也.猫眼黑睛如线,此正午猫眼也.有带露花,则房敛而色泽.猫眼早暮则睛圆,日高渐狭长,正午则如一线耳.此亦善求古人笔意也.

意译:



正午牡丹

宋朝文学家欧阳修得到一幅画，画的是一丛牡丹花。牡丹花下面有只猫。他想挂在客厅里，但不知这幅画的品位与真假，正拿不定主意。

“吴丞相来了！”家人前来通报。吴丞相即吴正肃，他是欧阳修的亲家，欧阳修连忙迎上去。

吴正肃进来，看见桌上的画，说：“好画，画的是正午牡丹，作者功力不浅啊！”

“你怎么知道画的是正午牡丹呢？”欧阳修惊异了。

“亲家，你过来看看。”丞相指着画上的牡丹，说：“花是张开的，中午阳光强烈，花的颜色有些发干。”接着他又指着牡丹下的猫说：“再看猫眼吧，瞳孔眯成一条缝，正是猫正午的瞳孔。如果画的是早上的景色，那么花上带有露水，色泽就滋润，猫眼的瞳孔也会是圆的了。”“好画，真是好画。”欧阳修直点头说：“画家观察入微，笔法细腻，画出了正午牡丹和猫的特点。他一定是位严肃的画家。”欧阳修说完，连忙叫人把画挂在客厅里，早晚欣赏。

解析：

故事中丞相吴正肃对于古画的解释，充斥着逻辑推理过程。我们不妨用三段论的传统逻辑来表述。先看牡丹：

如果花瓣分披，色泽浓艳而干燥，那就是正午的牡丹；

这里画的牡丹花瓣分披，色泽浓艳而干燥；

所以，这是正午的牡丹。

再来看猫：

猫的眼睛细长如线是中午猫眼的形象；

这里画的是细长如线的猫眼；

所以，这里画的是中午的猫眼。

经过这样的推理论证就更有说服力了。然而，如果吴正肃没有见过牡丹，或者虽然见过但没有仔细观察过中午的牡丹，他的脑海中也并没有中午猫眼的直观形象，那么上述推论也就无从谈起。这说明了他进行上述抽象思维和逻辑推理的过程是与他的形象思维活动同时进行的。由此可见，抽象的思考与形象的想象就是这样紧密地统一在人脑的思维过程中，难分难解<sup>[1]</sup>。

从事文学艺术工作也要学习逻辑。在传统逻辑中，三段论是在其中一个命题(结论)必然从另外两个命题(叫做前提)中得出的一种推论。这个定义是传统的，可以从亚里士多德的前分析篇中推出来。希腊语“sullogismos”的意思是“演绎”。对传统意义上三段论的详细描述请参见直言三段论。三段论由三个部分组成：大前提、小前提和结论，它在逻辑上从大前提和小前提得出来的。大前提是一般性的原则，小前提是一个特殊陈述。在逻辑上，结论是从应用大前提于小前提之上得到的。

这种三段论论证的推理方法，也正是具有公理化特征的数学科学必须使用的方法。所以说，抽象思维与形象思维是人类具有的两种主要思维形式，而不论是对文学还是数学。但在人们实际的思维过程中，这两类思维往往又是相互交织、互为作用的组合。抽象地思考问题总是以形象直觉思维为基础，进行形象思维又常常联系着抽象思维，同<sup>[1]</sup>。

在本书中我们力图把数学这门科学中的直觉与逻辑这两个侧