普 通 高 等 教 育“十 一 五” 规 划 教 材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

CAILIAO LIXUE JIAOCHENG

材料力学教程

刘杰民　主　编
侯祥林　副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育“十一五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

Mechanics of Materials

CAILIAO LIXUE JIAOCHENG

材料力学教程

主　编　刘杰民
副主编　侯祥林
编　写　孙雅珍　苑学众　洪　媛
主　审　邱棣华

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十一五”规划教材。全书共十一章，主要内容包括：材料力学的基本概念、基本理论和学习方法，杆件拉压、剪切、扭转和弯曲四种变形基本理论，应力应变状态分析的基本理论，关于材料失效的强度理论，压杆的稳定性计算以及能量法。每章均附有习题，书后附有参考答案。

全书注重基本概念的理解和应用，论述严密、文字精炼；指出理论可能的扩展空间以拓宽读者的视野，注重概念的统一性。

本书主要作为高等学校本科中、少学时材料力学课程的教材，也可供高职高专与成人高校师生及有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学教程/刘杰民主编．—北京：中国电力出版社，2009

普通高等教育“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5083-8171-8

Ⅰ．材…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．材料力学—高等学校—教材　Ⅳ．TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 002590 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号　100044　http://jc.cepp.com.cn）

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2009 年 7 月第一版　　2009 年 7 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米　16 开本　19.25 印张　468 千字

定价 **31.00** 元

前　言

为贯彻落实教育部《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》和《教育部关于以就业为导向深化高等职业教育改革的若干意见》的精神，加强教材建设，确保教材质量，中国电力教育协会组织制订了普通高等教育"十一五"教材规划。该规划强调适应不同层次、不同类型院校，满足学科发展和人才培养的需求，坚持专业基础课教材与教学急需的专业教材并重、新编与修订相结合。本书为新编教材。作者按照教育部提倡培养具有扎实基础和创新精神人才的指导思想，编写了这本材料力学教程。

第一章介绍了材料力学的基本概念、重要的原理和学习的基本方法，是整个材料力学内容的一个浓缩，后面的叙述都是本章的展开和延伸。这样处理的目的，有助于读者对材料力学的整体把握和了解，可以更有效地学习和掌握材料力学。第二至第七章是与杆件四种基本变形有关的基本理论。第二章为轴向载荷作用下构件的应力和变形的计算，本章还介绍了材料力学的基本力学性质及其测量。第三章为关于受扭圆轴的应力和变形的计算。第四章为关于平面图形的几何性质。第五、第六和第七章分别为横力作用下梁中的内力、应力和变形的计算。第八章介绍了应力应变状态分析的基本理论，该章是对受复杂荷载作用的构件进行强度和刚度计算的基础。第九章为关于材料失效的强度理论。第十章为关于压杆的稳定性计算问题。第十一章为能量法，能量法既是求解构件位移的有效方法，也是对复杂工程问题进行近似计算的理论基础。为了便于学习，每章均附有习题，习题涉及的章节也在题号中标出。没有在题号中标出章节的习题可能是因为涉及的章节较多。

本教材有如下几个特点：

①注重基本概念的理解和应用，力求论述严密，文字精练。重视培养学生的分析能力和已知理论的应用能力。比如关于加速运动的构件的应力计算，只要应用理论力学中的动静法即可，并不需要任何新的变形体理论。再比如，只要掌握了叠加法，各种各样的所谓组合变形问题的求解是显而易见的，基于重分析能力培养方面的考虑，没有把相关的内容单独成节或章。

②指出理论可能的扩展空间（如应力状态分析和强度理论），拓宽读者的视野，以便更深入地研究。

③注意材料力学概念的统一性。材料力学中的一些力学量（如：切应力和切应变的正负约定及其单元体表示方法），在各种材料力学教材以及在其他固体力学分支中的定义是不一致的。为了使读者在涉足其他版本的材料力学时不会产生迷茫，在容易混淆的地方均特别给予说明。

④深入分析了横截面上内力的含义，引入简单截面法直接求横截面上的内力。此举对深刻理解内力的含义和提高读者的计算能力是十分有益的。

第一、第四和第八章由刘杰民编著，第九和第十一章由侯祥林编著，第二和第三章由孙雅珍编著，第六和十章由苑学众编著，第五和七章由洪媛编著，全书由刘杰民统稿。

本书是适应创新教育的教材，疏漏甚至错误之处难免，恳请使用本教材的教师和读者指正，提出宝贵意见。编者在此预致谢意。

符　号　表

a，b，c，…	常数，距离，点的位置
A，B，C，…	点，截面的位置
A	面积（Area）
b	截面的宽度
C	形心（Centroid）
d_i	内径（in-diameter）
d_o	外径（out-diameter）
D	直径（Diameter）
e	偏心距（eccentricity）
E	弹性模量（Elasticity）
f	频率（frequency），函数（function）
F	集中力（Force）
F_S	剪力（Shearing Force）
F_N	轴力（Normal Force）
F_b	挤压力（bearing Force）
G	切变模量
h	高度（height）
i	惯性半径（inertia）
I	惯性矩（Inertia）
I_y，I_z	惯性矩（Inertia）
I_p	极惯性矩（polar）
I_{yz}，I_{zx}	惯性积
κ	弹簧常数
K	体积模量
l	长度（length），跨度
m	质量（mass）
M_e	外力偶矩（external，Moment）
M,M_z	弯矩（Moment）
n	法线方向（normal）
n，n_{st}	安全因数（stability）
p	压力（pressure）
P	功率（Power）

q	线载荷集度
r	半径（radius）
R	半径
S_y，S_z	静矩（Static）
t	厚度（thickness），切向（tangent）
T	扭矩（Torque）
v_d	畸变能密度（distorsion）
v_v	体积应变能密度（volume）
V_ε	应变能
w	挠度
W	重量（Weigut）
W_p	抗扭截面系数
W_z	抗弯截面系数
W_e	外力虚功（Work，external force）
W_i	内力虚功（Work，internal force）
x，y，z	直角坐标
x_c，y_c，z_c	形心直角坐标（centroid）
α，β，γ	角
γ	比重，切应变
γ_x，γ_y，γ_z	切应变
ρ	密度，曲率半径
δ,Δ	变形，位移
σ	正应力
σ_s	屈服极限
σ_b	强度极限
$[\sigma]$	许用应力
τ	切应力
$[\tau]$	许用切应力
ε，ε_x，ε_y，ε_z	线（正）应变
θ	单位长度扭转角
φ	扭转角
μ	波松比
ω	角速度

目　　录

第一章 绪论

1.1 引言

1.1.1 构件和构件的变形

各种各样的工程机械或结构都由构件组成。根据几何形状的特征，构件可分为：

（1）**杆件**——一个方向的尺寸远大于其他两个方向尺寸的构件。一根杆件的形状与尺寸由**轴线**与**横截面**确定。轴线与杆的长度方向一致，垂直于轴线的截面称为横截面，横截面形心的连线定义为轴线（图 1.1－1）。

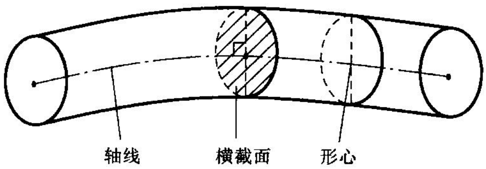

图 1.1－1 杆件的几何描述

根据轴线与横截面的特征，构件可分为直杆和曲杆，等截面杆和变截面杆（横截面的大小变化或形状发生变化）（图 1.1－2）。

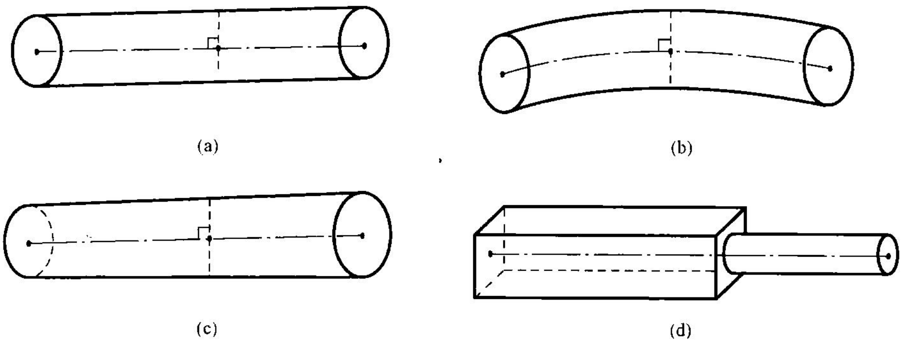

图 1.1－2 杆件的分类

（a）等截面直杆；（b）等截面曲杆；（c）匀变截面直杆；（d）组合直杆

（2）**板件**——一个方向的尺寸远小于其他两个方向尺寸的构件。板件的形状与尺寸由**中面**来确定。中面即平分板件厚度的几何面。中面为平面的板件称为**平板**，中面为曲面的板件称为壳（图 1.1－3）。

（3）**块体**——三个方向的尺寸相当的构件。块体在工程机械和结构中的实例多为连接体或基础，在计算精度要求不高的情况下，块体可近似作为杆件来处理。

材料力学主要研究单根杆件和几根杆件组成的简单杆系。

工作时受到外力作用的构件称为**承力构件**（简称为构件），任何承力构件在工作时，其尺寸和形状都会发生改变，构件尺寸与形状的改变称为**变形**。发生变形的构件称为**可变形构**

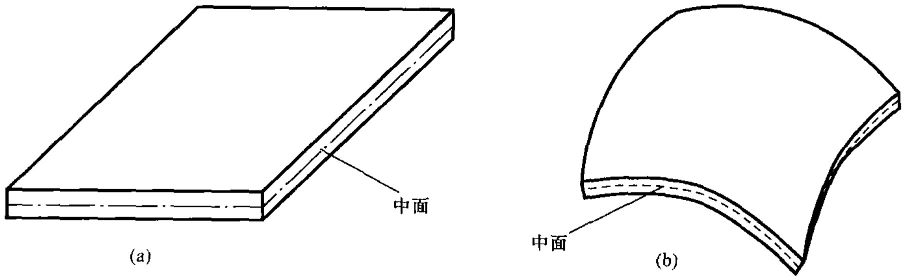

图 1.1-3　板件的几何描述
(a) 平板；(b) 壳

件，或统称为可变形固体。忽略变形的构件称为**刚体**。就变形量的大小而言，变形可分为**小变形**和**大变形**。所谓小变形，就是假设可变形构件的约束力和内力可用外力作用在对应的刚体上产生的约束力和内力来代替。在这种情形下，刚体力学的平衡方程可直接用来求内力和约束反力。用这种方法求构件的约束力和内力的方法称为**原始尺寸原理**。而对大变形构件，这种假设不成立。在图 1.1-4 所示的简支梁中，如在集中力 F 作用下梁端点 B 的水平位移 Δ_{Bx} 和 F 作用点的水平位移 Δ_{Cx} （$\neq\Delta_{Bx}$）可以忽略不计。换言之，轴线上各点只有很小的竖向位移而没有水平位移，则梁的变形认为是小变形，否则为大变形。对于大变形问题，仅凭静力学平衡理论，是无法求出梁的约束反力的。所以，小变形假设使得所研究的问题大为简化。而通常实际承力构件的变形确实是相当微小的。

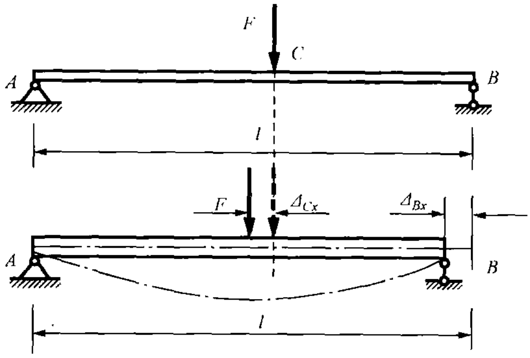

图 1.1-4　构件的变形

就构件的变形能否消失而言，变形可分为**弹性变形**和**弹塑性变形**。弹性变形当外力解除后可以完全恢复，而弹塑性变形当外力解除后只能恢复弹性变形的部分，仍有部分变形不能消除，这部分残留在构件内的变形称为**塑性变形**或**残余变形**。如果构件中的塑性变形在外力不再增加的情况下依旧在发生、增大，则称为**整体屈服**。通常认为弹塑性变形等于弹性变形与塑性变形之和。当弹性变形与外力成线形关系时，称为**线弹性变形**。实验表明，任何材料在外力不大时，都近似存在线弹性变形状态。本材料力学教程主要在线弹性的范围内研究材料的力学响应。

1.1.2　构件的强度、刚度和稳定性

承力构件要保证正常工作，显然不能发生断裂、显著塑性变形或整体屈服。对于许多构件，工作时变形过大也是不允许的。这就要求构件具有足够的**强度**（即抵抗破坏的能力）和

足够的**刚度**（即抵抗变形的能力）。

还有一种现象也十分重要，即受压构件当压力超过某一临界值时，突然从原来的小变形状态转变为大变形弯曲平衡状态。这种现象，称为**失稳**。通常失稳会造成较严重的经济损失，所以构件工作时发生失稳也是严禁的。因此承力构件还必须具有足够的**稳定性**（即保持原有平衡状态的能力）。

使构件具有足够的强度、刚度和稳定性是保证构件安全工作的基本要求，也是构件设计的基本要求。

另外，在保证构件安全工作的前提下，还应尽可能地节省材料，减轻重量，降低构件的制造成本，提高经济效益。显然，**安全**与**经济**是一对矛盾。因为为了构件安全，通常要选用优质的材料，增大截面尺寸，这样做的后果可能是浪费了材料，增加了重量，导致制造成本和耗能的提高。可见，如何合理地选择材料，恰当地确定构件形状和尺寸是构件设计的重要问题。

综上所述，材料力学的主要任务就是研究构件在外力作用下的变形、受力与失效（即构件强度不够、变形过大或失稳）的规律，为合理设计构件提供基本理论和分析方法。

1.2 材料力学的基本假设

制作构件的材料各种各样，随着材料科学的发展，新材料层出不穷。一种材料通常是由多种化学成分组成的，有些材料还是由多种组分形成的，如建筑上广泛使用的混凝土就是由沙、石、水泥加水混合而成的。因此从材料的微观结构出发研究构件的宏观行为，如强度、刚度和稳定性，是很困难的，而从材料的宏观行为出发却能提炼出材料的共性。为了便于对构件的强度、刚度和稳定性进行理论分析，需要对工程材料的主要宏观力学行为作出假设。材料力学的基本假设是：

1. 连续性假设

假设在构件的内部毫无空隙地充满了物质。从微观的角度看，该假设是不真实的，但从宏观的角度看，却是十分自然和合理的。基于此假设，构件中的力学量，如各质点的位移、应力和应变，可表达为质点的连续甚至是可微分的函数，给理论分析带来了极大的方便。

2. 均匀性假设

假设材料在外力作用下的力学性能与其在构件中的位置无关。基于此假设，由构件中的任何部位切取的**微体**的力学性质都可以代表构件的力学性质，显然由试件测得的力学性质同样适用于构件内的任何部位。需要注意的是，通过微体测量材料的力学性能时，微体大小的选择是十分重要的。比如对于微观上十分均匀的玻璃，微体可取得很小，而对于微观上不均匀的混凝土，微体就要取得相对大，应不小于组分中最大颗粒骨料（如石块）的最大尺寸的 3 倍。这样才能保证对微体进行测量的结果具有均匀化的统计意义，满足工程要求。

3. 各向同性假设

假设构件中的任何质点沿任何方向的力学性质都相同。沿各个方向力学性质相同的材料称为**各向同性**材料，沿不同方向具有不同力学性质的材料称为**各向异性**材料。

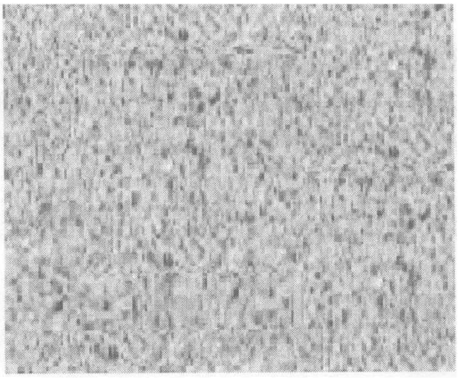

图 1.2-1　金属的微观结构示意图

玻璃是典型的各向同性体，金属材料从微观上看属于各向异性体，因为组成金属的微观结构晶体是各向异性的。但由于金属构件所含晶体极多（一立方毫米的钢材中就包含了数万甚至数十万个晶体），而晶体的排列又是随机的，因此金属材料的宏观表现可以认为是各向同性的（图 1.2-1）。而日益广泛使用的新型材料——纤维增强的复合材料（图 1.2-2），沿纤维方向的承载能力远大于垂直于纤维方向的承载能力。这说明纤维增强的复合材料在不同方向表现出显著不同的力学性质，因此是典型的各向异性材料。木材也是典型的各向异性材料（图 1.2-3）。本材料力学教程主要涉及各向同性材料。对于由各向异性材料制作的构件，研究方法是相同的，但超出了本教程的研究范围。

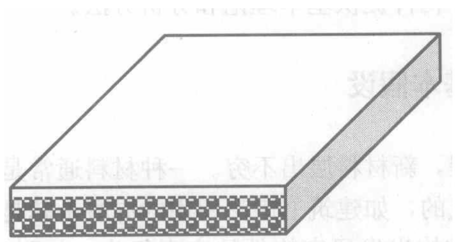

图 1.2-2　纤维增强层合板

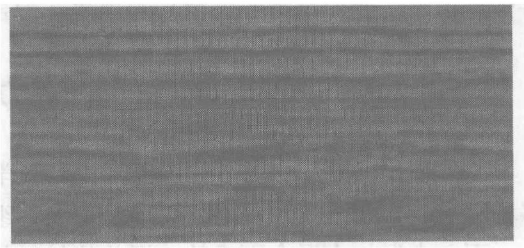

图 1.2-3　木质材料

实践证明，在连续、均匀和各向同性假设下建立的可变形固体力学理论能满足工程要求，在工程应用的层次上仍然是无可替代的正确理论。当然随着科学技术的进步，纳米材料已经被成功研制出来，微观机械将获得越来越多的应用。在可变形固体力学理论的基础上，建立更精确的适用于微观构件的力学理论具有十分重要的现实意义。

1.3　外力与内力

1.3.1　外力

承力构件所受的外力包括主动力——**荷载**和被动力——**约束反力**。

按照构件所受外力作用区域的不同，外力可分为**表面力**和**体积力**。

顾名思义，表面力作用于构件的表面。如果表面力连续作用在一块表面上，则称为**分布力**，单位面积上所受的表面力称为**面力的集度**。如果表面力的作用长度比宽度大很多，则把这样的表面力抽象为线作用力，称为**线荷载**。如果表面力的作用面积比构件的表面积小很多，则把这样的表面力抽象为点作用力，称为**集中力**。比如，屋顶上所受的雪荷载（图1.3-1），作用于压力容器内壁的气体压力，均为分布力的实例。而支撑屋顶的立柱所受来自于屋顶的压力可简化为集中力。图 1.3-2 所示铣床工作台进给油缸的缸体受均匀分布的油压作用，是典型的分布力，而活塞杆 AB 两端所受荷载，可简化为集中力。

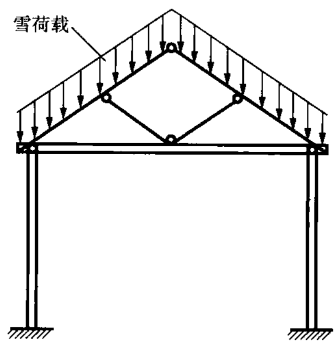

图 1.3-1 房屋雪荷载

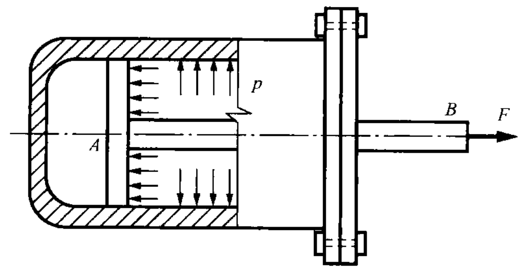

图 1.3-2 铣床工作台进给油缸

体积力是连续分布于构件内部的力，如自重和由于运动而产生的惯性力等。

按随时间变化的情况，荷载又可分为**静荷载**和**动荷载**。静荷载是缓慢施加达到某一数值后保持恒定或变化很小的荷载，其特征是在加载的过程中，构件的加速度很小，以至于可忽略不计。动荷载是随时间明显变化的荷载。比如图 1.3-2 所示的活塞杆 AB 所受轴向荷载和缸内油压就属于动荷载。

1.3.2 内力集度和内力

承力构件在外力的作用下发生变形，构体的整体变形是组成构件的微体发生变形的积累。图 1.3-3 所示拉杆的伸长是许多微段的微小伸长的积累。微体发生变形的直接原因是微体与微体之间的相互作用力。这种相互作用力不是构件中微观粒子间固有的短程相互作用力，而是由于外力作用才产生的一种“附加”内力，简称为**内力**。由连续性假设可知，内力是连续分布的。单位面积上的内力称为**内力集度**，或称为**全应力**。内力集度是矢量，与点的位置和微面的方向有关［图 1.3-4 (a)］。内力集度的分布规律即应力场的确定，是可变形固体力学研究的重点内容之一。

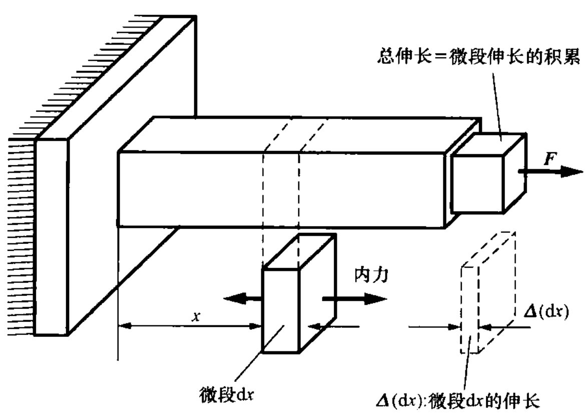

图 1.3-3 横截面上的内力及变形示意图

材料力学中确定构件内力分布规律的基本方法是：先求出横截面上的内力集度关于截面形心的**主矢**和**主矩**与作用在杆件上的外力的关系，再根据变形的特点找出内力的集度与内力的主矢或主矩的显式关系。

1.3.3 求内力的截面法

内力集度关于截面形心的主矢和主矩与作用在杆件上的外力的关系可由截面法确定。下面，以图 1.3-4（a）所示处于平衡状态的构件为例说明**截面法**。假如要分析 m-m 横截面上的内力，就假想地沿截面把杆件切分为两部分。沿 m-m 横截面截开之后，就暴露出两个截面，不妨称为左段右截面和右段左截面，在这两个横截面上有等值反向的内力集度。假设左段右截面上任意点的内力集度为 p［图 1.3-4（b）］，右段左截面上对应点的内力集度为 p'［图 13-4（c）］。把内力集度向横截面上特殊点——**形心** C 简化，可得到左段右截面上内力的主失 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 和主矩 $\boldsymbol{M}$［图 1.3-4（d）］，右段左截面上内力的主矢 $\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$ 和主矩 $\boldsymbol{M}'$［13-4（e）］。根据内力等值反向的性质，有

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=-\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}},\quad \boldsymbol{M}=-\boldsymbol{M}' \tag{1.3-1}$$

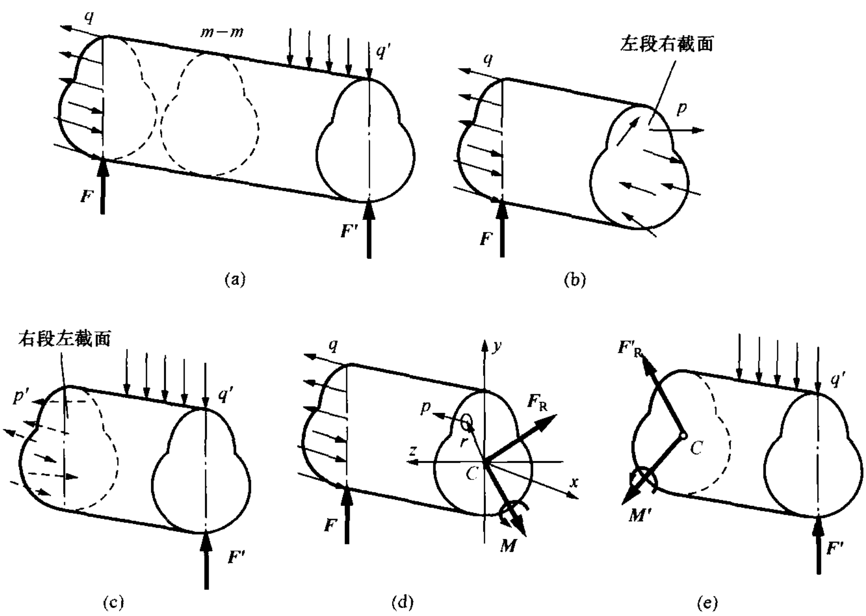

图 1.3-4 横截面上的内力

左段右截面上 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 等于该截面上内力集度的矢量和，$\boldsymbol{M}$ 等于该截面上内力集度关于形心的力矩的矢量和，如式（1.3-2）所示。

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\int_A \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}A,\quad \boldsymbol{M}=\int_A \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}A) \tag{1.3-2}$$

根据力系简化原理，把左段上所有外力 $\boldsymbol{F}_i$ 向形心 C 简化，得到外力的主矢 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$ 和主矩 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}$。

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}=\sum\boldsymbol{F}_i,\quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}=\sum\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.3-3}$$

根据静力学理论，左段右截面上内力的主矢 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 和主矩 $\boldsymbol{M}$ 应满足静力学平衡方程，有

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}=0,\quad \boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}=0 \tag{1.3-4}$$

把式（1.1-3）代入（1.1-4），有

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=-\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}=-\sum\boldsymbol{F}_i,\quad \boldsymbol{M}=-\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}=-\sum\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.3-5}$$

为了把内力和变形更好地联系起来，把内力的主矢和主矩向互相垂直的三个方向分解（图 1.3-5）。内力主矢沿轴向 $-x$ 的分量称为**轴力**，用 F_N 表示；在横截面内的两个分量分称为**剪力**，分别用 F_{Sy} 和 F_{Sz} 表示；内力主矩绕 x 轴的分量称为**扭矩**，用 T 表示；绕 y 和 z 轴的分量称为**弯矩**，分别用 M_y 和 M_z 表示。则矢量式（1.3-5）的投影方程可表为

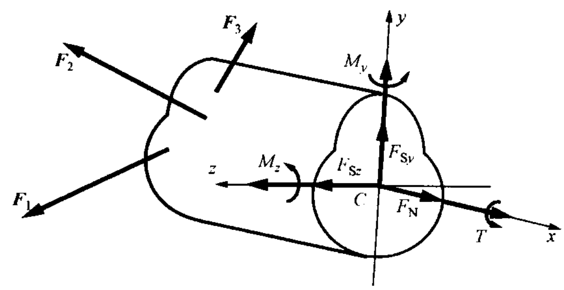

图 1.3-5　横截面上的内力分量

$$
\left.\begin{aligned}
&F_N + \sum F_{i,x} = 0, \quad T + \sum M_x(F_i) = 0 \\
&F_{Sy} + \sum F_{i,y} = 0, \quad M_y + \sum M_y(F_i) = 0 \\
&F_{Sz} + \sum F_{i,z} = 0, \quad M_z + \sum M_z(F_i) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1.3-6}
$$

在构件受分布外力的情况下，式（1.3-6）中的求和将用积分来替代。求解方程（1.3-6），可求出任意截面的内力分量。

【例 1.3-1】 图 1.3-6（a）所示直径为 d 的圆截面直杆在右端受水平集中力 F_1 和竖直集中力 F_2 作用。F_2 的作用点在圆截面的外边缘。试求距右端为 l 的 m-m 横截面上的内力分量。

解　(1) 从 m-m 截面把杆一分为二，取右段为研究对象，在原来作用有外力处添上相应的外力，在横截面添上可能发生的内力分量轴力 F_N、y 方向剪力 F_{Sy} 和扭矩 T（如果判断不清，就宁多勿少），右段受力图如图 1.3-6（b）所示。平衡方程为

$$
\begin{aligned}
&F_N + F_1 = 0, \quad F_{Sy} - F_2 = 0 \\
&T - F_2 \cdot \frac{d}{2} = 0, \quad M + F_2 \cdot l = 0
\end{aligned} \tag{a}
$$

由式（a）解得

$$
\begin{aligned}
&F_N = -F_1, \quad F_{Sy} = F_2 \\
&T = F_2 \cdot \frac{d}{2}, \quad M = -F_2 \cdot l
\end{aligned} \tag{b}
$$

其余内力分量为零。

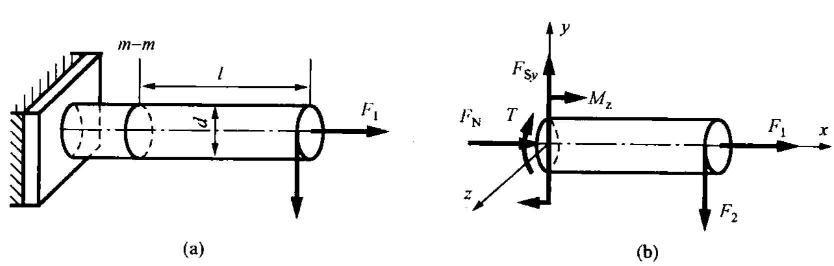

图 1.3-6

式（b）中的“负号”说明相应的内力分量与图示方向相反。

从上面的分析可见，用截面法求内力需要把构件假想地一分为二，由所考虑部分的平衡方程式求出内力分量。截面法是求内力的基本方法。不过需要指出的是，虽然截面法求内力的步骤很清楚，但是当大量截面的内力需要求得时，要画大量的受力图，列大量的平衡方程，是颇费工夫的。下面给出求内力的**简单截面法**。

前面研究截面左段的平衡，得到矢量式（1.3-5），同样道理，如以右段为研究对象，应有

$$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}=-\boldsymbol{F}'_{\mathrm{e}}=-\sum\boldsymbol{F}'_{i},\quad \boldsymbol{M}'=-\boldsymbol{M}'_{\mathrm{e}}=-\sum\boldsymbol{M}_{C}(\boldsymbol{F}'_{i})\tag{1.3-7}$$

上面诸式中，$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}$、$\boldsymbol{M}'$与$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{e}}$、$\boldsymbol{M}'_{\mathrm{e}}$分别是右段左截面上内力集度和右段上所有外力关于形心的主矢和主矩。

注意到左段右截面上的内力主矢和主矩与右段左截面上的内力主矢和主矩等值反向，即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=-\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}},\quad \boldsymbol{M}=-\boldsymbol{M}'\tag{1.3-8}$$

比较式（1.3-7）和式（1.3-8），发现

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}=\sum\boldsymbol{F}'_{i},\quad \boldsymbol{M}=\sum\boldsymbol{M}_{C}(\boldsymbol{F}'_{i})\tag{1.3-9a}$$

$$\boldsymbol{F}'_{\mathrm{R}}=\sum\boldsymbol{F}_{i},\quad \boldsymbol{M}'=\sum\boldsymbol{M}_{C}(\boldsymbol{F}_{i})\tag{1.3-9b}$$

式（1.3-9a）表明，左段右截面上内力集度关于形心的主矢和主矩，分别等于右段构件上所有外力关于同一点的主矢和主矩的矢量和；式（1.3-9b）表明，右段左截面上内力集度关于形心的主矢和主矩，分别等于左段构件上所有外力关于同一点的主矢和主矩的矢量和。

注意式（1.3-1）～式（1.3-4）和式（1.3-7）～式（1.3-9）皆为矢量方程。在理论力学中约定矢量用黑体表示，以示强调，但是在材料力学中，为简洁起见，约定力和力矩都不用黑体表示。

式（1.3-9）的投影式为

$$\left.\begin{aligned}F_{\mathrm{N}}&=\sum F'_{i,x},\quad T=\sum M_{x}(F'_{i})\\F_{\mathrm{S}y}&=\sum F'_{i,y},\quad M_{y}=\sum M_{y}(F'_{i})\\F_{\mathrm{S}z}&=\sum F'_{i,z},\quad M_{z}=\sum M_{z}(F'_{i})\end{aligned}\right\}\tag{1.3-10a}$$

$$\left.\begin{aligned}F'_{\mathrm{N}}&=\sum F_{i,x},\quad T'=\sum M_{x}(F_{i})\\F'_{\mathrm{S}y}&=\sum F_{i,y},\quad M'_{y}=\sum M_{y}(F_{i})\\F'_{\mathrm{S}z}&=\sum F_{i,z},\quad M'_{z}=\sum M_{z}(F_{i})\end{aligned}\right\}\tag{1.3-10b}$$

式（1.3-10a）表明：左段右截面上的轴力等于右段构件上所有外力在轴线方向上投影的代数和；剪力分别等于右段构件上所有外力在垂直轴线方向上投影的代数和；扭矩等于右段构件上所有外力关于轴线的力矩的代数和；弯矩M_y等于右段构件上所有外力关于过形心且垂直于轴线的坐标轴y的力矩的代数和，弯矩M_z等于右段构件上所有外力关于z轴的力矩的代数和。

同理，式（1.3-10b）表明，右段左截面上的轴力、剪力、扭矩和弯矩，分别等于左段构件上所有外力在轴线方向上投影的代数和、在垂直轴线方向上投影的代数和、关于轴线的力矩的代数和及关于垂直于轴线的坐标轴力矩的代数和。

注意到虽然左段右截面上的内力分量和右段左截面上的内力分量具有等值反向的特性，然而它们在包含横截面的微段上引起的变形却是一致的（图1.3-6）。因此左段右截面上的内力和右段左截面上的内力分量应具有相同的符号或正负。内力的符号规定如下：

（1）轴力F_{N}　离开截面的轴力为正，指向截面的轴力为负［图1.3-6（a）］。这等价于规定使微段$\mathrm{d}x$被拉伸的轴力为正，使微段$\mathrm{d}x$压缩的轴力为负。

（2）剪力$F_{\mathrm{S}y}$　使微段$\mathrm{d}x$沿y方向发生左上右下错动的剪力$F_{\mathrm{S}y}$为正，使微段$\mathrm{d}x$发生右上左下错动的剪力为负［图1.3-6（b）］。这等价于规定剪力$F_{\mathrm{S}y}$关于微段$\mathrm{d}x$的内部任意点的矩为顺时针时为正，反之为负。

（3）扭矩T　扭矩矢离开截面的扭矩为正，反之为负［图1.3-6（c）］。

（4）弯矩 M_y　引起微段下凸的弯矩 M_z 为正，引起微段上凸的 M_z 为负［图 1.3-6（d）］（M_z 简记为 M）。

根据这种规定，图 1.3-7（a）～（d）所示的内力分量都是正的。请读者自行判别例 1.3-1 中截面 m-m 各内力分量的正负。

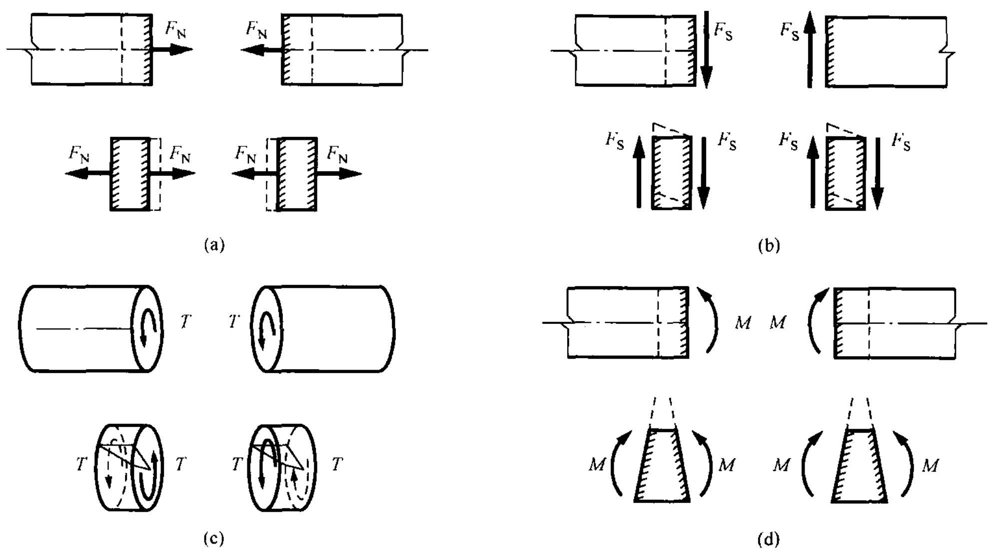

图 1.3-7　微段在内力作用下的变形和内力分量的符号规定

【例 1.3-2】　用简单截面法重解例 1.3-1。

解　（1）左段右截面的轴力等于右段所有外力在 x 方向投影的代数和，显然右段上只有 F_1 沿轴线方向，离开左段右截面，所以为正，即

$$F_N = F_1$$

（2）左段右截面沿 y 方向的剪力等于右段所有外力在 y 方向投影的代数和，显然右段上只有 F_2 沿 y 方向，对左段右截面内侧之矩为顺时针，所以为正，即

$$F_{Sy} = F_2$$

（3）左段右截面的弯矩 M_z 等于右段上所有外力对过截面形心关于 z 轴力矩的代数和，显然右段上只有 F_2 对左段右截面形心关于 z 轴有顺时针之力矩，该力矩使左段右截面附近的微段上凸，故为负，即

$$M_z = -F_2 l$$

（4）左段右截面的扭矩等于右段上所有外力关于 x 轴力矩的代数和，显然右段上只有 F_2 对 x 轴有顺时针之力矩，该力矩矢离开左段右截面，故为正，即

$$T = \frac{F_2 d}{2}$$

利用简单截面法求内力的优势在于直接写出内力的表达式，非常简洁，其要点在于正确判断外力在截面上所贡献的内力的正负。关于用式（1.3-10）求内力分量的应用，在有关章节中还要进一步说明。

构件的强度、刚度和稳定性与内力分量的大小及其在构件内的分布密切相关。对于杆件而言，内力的集度与内力分量之间，变形与内力分量之间具有较简单的显式关系。这些关系