

理論力學習題集
(下冊)

(機械化、機制、工程化、水
利、林機、木加工建二年用)

沈陽農學院

PDG

421.07

918

377473

6-11



蘇子知

好學

PDG

名：理論力學習題集（下冊）
編 著：東北農學院理論力學教研組
（沈陽農學院印刷）
印 刷：沈陽農學院印刷廠
出版日期：1961年8月
印 數：001~390

0.74

运动微分方程式

(1) 质点动力学的基本定理 $F = m \frac{d^2 y}{dt^2}$ ，在笛卡尔坐标及自然坐标系的两种投影形式为

$$\left. \begin{aligned} X &= m x'' \\ Y &= m y'' \\ Z &= m z'' \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F_x &= m a_x = m \frac{dv}{dt} \\ F_n &= m a_n = m \frac{v^2}{\rho} \\ F_b &= m a_b = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (I) \\ (II) \end{aligned}$$

(2) 运用运动微分方程式可以解决质点动力学的一类问题。已知质点的运动规律，求质点所受的未知力。（通常是求约束反力）在解题时，应根据问题的条件选取运用何种坐标系。

一般地说来若已知质点的运动轨迹则用公式(II)否则用公式(I)

在应用公式时必须正确地判断投影的正负号，并理解所得结果的正负号的实际意义。

(3) 在开始学习动力学时，就必须建立分析问题的正确方法，动力学的问题牵涉到力与运动的关系，因此必须仔细研究问题的两个方面：

a. 分析质点的受力情况，从力的基本概念出发，分析作用于质点的主动力与约束反力的数值是未知的，但它们的方向根据约束的性质来决定，然后画示力图。

b. 分析质点的运动状态，明确质点运动的几何性质，例如：运动的轨迹在某瞬时的速度与加速度，为此，必须熟悉一般的运动学的方法与结论。

(4) 解题的主要步骤：

(a) 审清题意画出已知量与未知量，并画示力图。

2

(b) 研究对象——选取含有已知量与未知量的物体为研究对象。

(c) 分析受力——分析作用在研究对象上的所有已知力与未知力并画出示力图。

(d) 分析运动

(e) 理论根据——已知运动求力，这种问题的解法可以归结为求质点的加速度，在这动为已知的情况下，应用运动学的方法求得它的加速速度，然后代入公式 (I) 或 (II) 即得所求之未知力。

(5) 选坐标系——若已知物体的运动轨迹，则选取自然坐标否则选取直角坐标。

例 题

220. 电梯重 45 公斤，以等加速度下降 2 秒钟内走过的距离为 5 米，试求绳中所受到的张力。

已知：电梯重 $P = 45$ 公斤； $t = 2$ 秒； $S = 5$ 米。

求：绳中所受到的张力

解：1) 研究对象——为了求绳中所受到的张力，建立已知量与未知量之间的联系，选取电梯为研究对象，并为研究方便起见，将电梯视为一质点 M 。

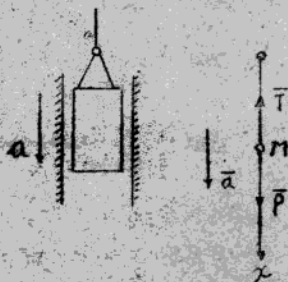


图 220

2) 分析受力——作用在电梯上的有重力 P 及张力 T

3) 分析运动——电梯作等加速直线运动。

4) 理论根据——已知运动求力用公式(1)解之

5) 选坐标系——以初始位置O为原点作Ox轴。方向铅垂向下。

6) 列方程式——据公式(1)的第一式 $mx'' = X$ 于是有

$$\frac{P}{g}a = P - T \quad \text{式中 } \frac{P}{g} \text{ 为电梯的质量} \quad (3)$$

据上式则

$$T = P - \frac{P}{g}a \quad (2)$$

(2) 式中 a 是未知的为此必须根据已知条件找出 a 之值因电梯以等加速下降且 S, t 均为已知, 故可得等加速运动的公式

$$S = \frac{1}{2}at^2, \quad \text{求出 } a \quad (3)$$

将 S, t 之值代入(3)式, 求得 $a = \frac{2 \times 5}{2^2} = 2.5 \text{ 米/秒}^2$

由此所求的张力 T 之大小为

$$T = 45 - \frac{45 \times 2.5}{9.8} = 33.5 \text{ 公斤}$$

若此电梯以等加速度 a 上升, 各项数据完全与题设相同, 则运动微分方程式为

$$-\frac{P}{g}a = -T + P$$

则

$$T = P + \frac{P}{g}a$$

将具体数字代入有

$$T = 45 + \frac{45 \times 2.5}{9.8} = 56.5 \text{ 公斤}$$

可见电梯上升时绳中所受到的张力要比下降时的大。

4

221. 重1公斤的重物 M ，系于30厘米长的线上，线的另一端系于固定点 O ，重物在水平面内作圆周运动，成一圆锥状且与铅垂线成 60° 的角，求重物的速度 v ，线的张力 T

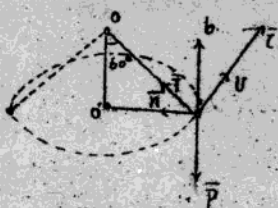


图 221

已知： $P = 1$ 公斤； $l = 30$ 厘米； $\alpha = 60^\circ$

求：重物的速度 v ，及绳的张力 T

解：1) 研究对象——选取原已知量与未知量的重物为对象。

2) 分析受力——作用在重物上的有重力 P 及绳子张力 T 。

3) 分析运动——重物在水平面内作圆周运动，其轨迹是圆。

4) 理论根据——已知运动轨迹求作用的未知力，应用公式(1)解之。

5) 选坐标系——如图所示，选自然坐标系 $Mcnb$

6) 列方程式——据公式(1)有

$$m \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = T \cos 30^\circ \quad (2)$$

$$0 = T \cos 60^\circ - P \quad (3)$$

由3式
$$T = \frac{P}{\cos 60^\circ} = 2P \quad (4)$$

将(4)式代入(2)式中

$$\frac{P}{9} \frac{v^2}{\rho} = 2P \cos 30^\circ \quad \text{而} \quad \rho = r = l \sin 60^\circ$$

因而 $v^2 = 2gl \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}$ 即 $v = \sqrt{\frac{3}{2}gl}$

将所得数值代入 T , 及 v 之表达式中得

$$T = 2P = 2 \text{ 公斤} \quad v = \sqrt{\frac{3}{2}gl} = 210 \text{ 厘米/秒}$$

小结: (a) 由 (1) (2) (3) 式可知第 1 式给出运动规律第 2 和第 3 式是反作用力, 通过本题可以看到公式 $F_b = ma_b = 0$, 之应用;

(b) 在解动力学问题时除了研究物体的运动之外, 还要研究作用于其上的力, 这是与运动学不同之处。

(c) 在动力学问题中, 作用于质点之诸力是不平衡的, 只有在特殊情况下, 质点的加速度才为零。

222. 汽车重 1500 公斤, 以 $v = 10$ 米/秒的速度驶过拱桥, 桥之中央之曲率半径为 $\rho = 110$ 米。求汽车经过桥中部时对桥之压力。

答: $N = 1190$ 公斤



图 222



图 223

223. 载货的小车重 700 公斤, 以 $v = 1.6$ 米/秒之速度沿缆车轨道而下降; 轨道的倾角 $\alpha = 15^\circ$, 运动之总阻力系数 $f = 0.015$, 求小车匀速下降时, 吊小车的缆绳的张力; 又设小车制动的时间为 $t = 4$ 秒, 求此时缆绳的张力。

6

答: $S_1 = 171$ 公斤; $S_2 = 200$ 公斤。

224. 列车以72公里/小时的速度转弯, 车厢内在弹簧称上衡量一重物, 其重为5公斤, 弹簧称的示数为5.1公斤。试求轨道的曲率半径。弹簧称的质量略去不计。

答: 202米。

225. 蒸汽机之活塞按 $x = r(\cos \omega t + \frac{r}{4L} \cos 2\omega t)$ 厘米之规律作水平简谐运动, 其中 r 为曲柄之长, L 为连杆之长, ω 为轴之角速度, 为一常数。为一定值。如活塞重为 Q , 试求作用于活塞之力的最大值。

答: $P = \frac{Q}{g} r \omega^2 \left(1 + \frac{r}{L}\right)$ 。

226. 龙门刨床的台面重 $Q_1 = 700$ 公斤, 其上工作物重 $Q_2 = 300$ 公斤。台面走动的速度为 $v = 0.5$ 米/秒, 驱动 (假设为等加速运动) 的时间为 $t = 0.5$ 秒。设驱动时摩擦系数 $f_1 = 0.14$, 而当台面匀速走动时摩擦系数 $f_2 = 0.07$, 试求驱动台面及此后使台面作匀速运动所需之力。

答: $P_1 = 242$ 公斤; $P_2 = 70$ 公斤。

227. 电车之车架连同载荷共重 $Q_1 = 10$ 吨, 车架与车轮共重 $Q_2 = 1$ 吨。如车架在弹簧上按 $x = 2 \sin 10 t$ 厘米之规律作铅垂简谐运动, 求电车对水平直线轨道之最大与最小压力。

答: $N_1 = 13.04$ 吨; $N_2 = 8.96$ 吨。

228. 飞机作铅垂俯冲, 达到了1000公里/小时的速度。其后驾驶员将飞机自低头拉起, 在铅垂平面内飞绕半径 $R = 600$ 米的大圆弧。驾驶员体重80公斤, 问驾驶员对座位的最大压力多少?

答: 1130 公斤。

229. 列车不连机车重2000吨, 以等加速度沿水平轨道行

状，由开始经60秒后，它得到了54公里/小时的速度。设摩擦力等于车重的0.005倍，求机车与列车间的拉力。

答：6.1吨。

质点运动微分方程式 的积分

(1) 质点运动微分方程式的极形式形为

$$\left. \begin{aligned} mx'' &= X(t, x, y, z, x', y', z') \\ my'' &= Y(t, x, y, z, x', y', z') \\ mz'' &= Z(t, x, y, z, x', y', z') \end{aligned} \right\} \text{--- (1)}$$

这是一组二阶的微分方程式。

(2) 运用质点运动微分方程式(1)可以解决质点动力学的第二类问题求质点在已知力作用下的运动规律。

这个问题可以归结为求质点运动微分方程式(1)的积分，对微分方程式(1)（在平面的情况下对两个微分方程式；而在直线的情况下只对一个微分方程式）逐次积分两次即得质点的运动规律：

$$x = \int_1(t), \quad y = \int_2(t), \quad z = \int_3(t)$$

（在平面的情况下有两个运动方程式；在直线的情况下则只有

一个)

求微分方程式的积分时, 将出现的任意常数这些常数要由质点运动的起始条件, 即该点的初位置和初速度来决定。

(3) 质点运动微分方程式 (1) 是二阶微分方程式, 在一般情况下, 尚无一个普遍的方法来求它的解, 而往往只能求得它的近似解。

但在具体问题中, 常力是常数, 是位置, 速度和时间函数的函数因而可用通常的积分法求出所要求的结果, 在积分时要灵活运用两种分离变量的积分法。

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{或} \quad a = v \frac{dv}{ds}$$

(4) 应用质点运动微分方程式 (2) 解题的主要步骤。

(a) 研究对象——选取含有已知量与未知量的物体。

(b) 分析受力——仔细的研究质点在任意瞬时 (或任意位置) 的受力情况确定作用在质点上的所有的力。

(c) 分析运动——分析质点在任意瞬时 (或位置) 的运动状态。

(d) 选坐标原——选取^的坐标原和投影的表达式尽可能的简单。

(e) 列方程式——根据质点在任意瞬时 (或位置) 的受力情况建立质点运动微分方程式 (1)

(f) 对微分方程式进行积分。

在此对同学们的一美希望: 为了更好的学习动力学, 于先复习数学教程中可分离变量的微分方程式和常系数二阶线性微分方程式及积分部分。

例 题

230. 质点的质量为2个工程单位在起始的瞬间质点在坐标原点0, 且具有初速度 $U_0 = 10$ 米/秒 在该质点上沿速度的方向作用一每秒增加 a 公斤的力, 若已知起始时的力 $P_0 = 4$ 公斤, 及当速度等于105米/秒时, 质点位于距离坐标原点480米处试求其 a 的大小。

已知: $m = 2$ 个工程单位; $U_0 = 10$ 米/秒; 质点上作用有每秒增加 a 公斤的力; $P_0 = 4$ 公斤; $U = 105$ 米/秒。

求: a 的大小

解: 1) 研究对象——选取含有已知量与未知量的质点为研究对象。

2) 分析受力——在质点上作用有力 P_0 及每秒增加 a 公斤的力即 $Q = at$ 。

3) 分析运动——质点在 P_0 及变力 Q 的作用下, 作等加速直线运动在质点处 $U_0 = 10$ 米/秒, 在距质点450米处 $U = 105$ 米/秒。

4) 理论根据——为求 a , 必须知道运动规律, 因此问题的本质是已知力求运动, 于是据公式(1), 建立其的直线运动的运动微分方程式, 然后对它进行积分。

5) 选坐标系——以起始位置为质点作 Ox 轴, 其正何与速度的方向一致。

6) 列方程式——已知质点的质速 $m = 2$ ，而在此质点上所受到的力为一段时间的函数即 $F = 4 + at$ ，故质点的运动微分方程式为

$$2x' = 4 + at$$

或
$$2 \frac{dv}{dt} = 4 + at \quad (1)$$

将微分方程式 (1) 进行积分，则有

$$2v = 4t + \frac{at^2}{2} + C_1 \quad (2)$$

据初始条件，当 $t = 0$ 时， $v = v_0$ ，代入 (2) 式中

于是 $2v_0 = C_1 \quad \therefore C_1 = 20$

因此
$$2v = 4t + \frac{at^2}{2} + 20$$

或
$$2 \frac{dx}{dt} = 4t + \frac{at^2}{2} + 20 \quad (3)$$

将 (3) 式再积分一次，求得：

$$2x = 2t^2 + \frac{at^3}{6} + 20t + C_2 \quad (4)$$

据初始条件：当 $t = 0$ 时， $x_0 = 0$ （因为质点在坐标原点），代入 (4) 式确定 $C_2 = 0$ 故有

$$2x = 2t^2 + \frac{at^3}{6} + 20t \quad (5)$$

(5) 式即是质点的运动微分方程式

据题意，质点在某一瞬时 t 的速度 $v = 105$ 米/秒，和其所处的距离 $x = 450$ 米，为了求出 a 及 t ，可将这些已知条

件代入(3)，(5)两式内，即得如下的关系式：

$$\begin{cases} 420 = 8t - at^2 + 40 & (6) \\ 5400 = 12t^2 + at^3 + 120t & (7) \end{cases}$$

将(6)(7)两式联立解之，消去 at^3 ，即得方程式

$$t^2 + 125t - 1320 = 0 \quad (8)$$

解(7)式求得 $t = 10$ 秒，代入(6)式中便有

$$100a = 300$$

故所以所求之 a 为

$$a = 3$$

231. 物体重9公斤，从某一高度落下，无初速度受到空气的阻力为 $R = \mu v^2$ 其中 μ 为阻力系数而 v 为物体的速度，试求出物体的速度：1) 表为时间的函数；2) 表为距离 S 的函数。

已知：物重 $P = 9$ 公斤， $v_0 = 0$ ， $R = \mu v^2$

求：物体的速度：1) 表为时间的函数；2) 表为距离^的函数。



解：1) 研究对象——选取含有已知量与未知量的物体为对象。

2) 分析受力——作用在物体上的有重力 P ，空气阻力 R 。

3) 分析运动——物体作变加速直线运动，在开始时 $v_0 = 0$ 。

图 231

4) 理论根据——已知力求运动, 因此据公式(1)建立物体直线运动的微分方程式, 然后再进行积分, 即将 $v = f(t)$ 或 $v = f(s)$ 。

5) 选坐标系——从起始位置为原点作 Ox 轴, 其方向铅垂向下。

6) 列方程式——据公式(1)则有

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= p - \mu v^2 = p \left(1 + \frac{\mu v^2}{p} \right) \\ &= mg \left(1 - \frac{\mu v^2}{p} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

设以 c 表示当空气阻力与物体重量相当时的物体的速度, 则有

$$p = \mu c^2 \quad \text{由此} \quad \frac{\mu}{p} = \frac{1}{c^2} \quad (2)$$

将(2)代入(1)式中可得

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{1}{c^2} v^2 \right) = \frac{g}{c^2} (c^2 - v^2) \quad (3)$$

上式是一个具有可分离变量的一阶方程式, 分离变量, 即将

$$\frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2} dt \quad (4)$$

将(4)式积分

$$\int_0^v \frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2} \int_0^t dt$$

$$\text{即} \quad \ln \frac{c-v}{c+v} \Big|_0^v = \frac{g}{c^2} t \quad \text{或} \quad \ln \frac{c-v}{c+v} = \frac{2gt}{c} \quad (5)$$

将(5)变换之, $\frac{c-v}{c+v} = e^{-\frac{2gt}{c}}$ 由此求得物体的速度 v 为:

$$v = \frac{e^{\frac{2gt}{c}} - 1}{e^{\frac{2gt}{c}} + 1} c \quad (6)$$

为了使表达式更简单整齐起见，我们对(6)式右边分式中的分子、分母同乘以 $e^{-\frac{2gt}{c}}$ 则

$$v = \frac{\left(e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{gt}{c}}\right)c}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{gt}{c}}} = c \operatorname{th}\left(\frac{gt}{c}\right)$$

其中 $\frac{gt}{c}$ 为双曲角。

现在为要求出物体的速度 v 为它所经过的距离 s 的函数必须从微分方程中消去 t 为此将导数 $\frac{dv}{dt}$ 表为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

于是得到下列具有可分离变量的微分方程式

$$v \frac{dv}{ds} = \frac{g}{c^2} (c^2 - v^2) \quad (7)$$

在这里将变量分离，并求对应极限内的定积分，得到

$$\int_0^v \frac{v dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2} \int_0^s ds$$

$$\text{或} \quad -\frac{1}{2} \left| \ln(c^2 - v^2) \right|_0^v = \frac{g}{c^2} s \quad (8)$$

化简后，便有

$$\ln \frac{c^2 - v^2}{c^2} = -\frac{2g}{c^2} s \therefore \frac{c^2 - v^2}{c^2} = e^{-\frac{2g}{c^2} s} \quad (9)$$

解方程(9)，求取速度 V 为

$$V = \sqrt{1 - e^{-\frac{2g}{c^2} s}}$$

小结：已知力求运动的问题可归结为求运动微分方程式的积分，在积分过程中出现的积分常数，由质点运动的起始条件即质点的初位置和初速度来决定。

232. 车厢以36千米/小时的速度在水平轨道上行驶。设在制动时所发生之运动所受的阻力对于每吨车重为300公斤，问车厢由于制动在多少时间内、并经过多少距离而停止？

答：3.4秒；16.9米。

233. 质量为 m 的质点带有电荷 e ，在一均匀的电场中，电场强度 $E = A \sin kt$ (A, k 均为常数)。如已知在电场中，质点所受的力 $F = eE$ ，其方向与 E 相同，求质点的运动。质点时初速等于零，且其起始位置取为坐标原点。重力的影响略去不计。

答： $x = \frac{eA}{mk} \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right)$

234. 没有前进速度的潜水艇受到不大的泥力 p 而向水底下沉。在泥力不大时，水的阻力可以视为与下沉速度的一次方成正比并等于 Ks_v ，其中 K 为比例常数， S 为潜水艇的水平投影面积， v 为下沉速度。如当 $t=0$ 时， $v=0$ ，求下沉速度。

答： $v = \frac{p}{KS} \left(1 - e^{-\frac{KS}{M} t} \right)$

235. 在前题条件下, 求在时间 T 内潜水艇下沉的路程 S 。

答:
$$S = \frac{p}{KS} \left[T - \frac{M}{KS} \left(1 - e^{-\frac{KS}{M}T} \right) \right]$$

236. 伞兵带降落伞从高空无初速度下落, 伞兵体重 75 公斤, 所受空气阻力 $F = \frac{1}{2} c \rho S v^2$, 其中 c 为无因次阻力系数, S 为与运动方向垂直的最大截面积, 对完全展开的球面降落伞而言, $c = 0.96$, $S = 50$ 米; ρ 为空气密度, 在标准状态下 $\rho = \frac{1}{8}$ [公斤/秒³/米³]。求伞兵下落的极限速度, 及到达此极限速度所需的时间。

答: $v_n = 5$ 米/秒 $t = 1.9$ 秒。

237. 列车到达 90 千米/小时^{0.7} 速度后, 司机关上气门。问列车通过多少路程后降到 36 千米/小时之速度? 为了计算阻力可用经验公式 $F = 2.5 + 0.5v^2$, F (公斤) 为每吨列车重量所受之阻力, 其中 v 为列车速度以千米/小时计。取 $g = 10$ 米/秒²。

答: $S = 180$ 米。

238. 一艘船排水量为 10000 吨, 以 16 米/秒的速度航行。水的阻力与轮船速度之平方成正比, 在速度为 1 米/秒时等于 30 吨。问当船速降为 4 米/秒时, 轮船航行了多少路程? 又需时间多少?

答: $S = 47.1$ 米; $T = 6.38$ 秒。

239. 重 $P = 10$ 公斤、半径 $r = 8$ 厘米的球自空中落下, 设空气的阻力等于 $R = K\sigma v^2$, 其中 v 为球落下的速度, σ 为球在垂直于其运动方向之平面上的投影面积, K 为常数 (与若