曲線繩正法原理

黃 翮 飛 編 著

龍 門 聯 合 書 局 出 版

初版前言

曲線繩正法又名弦線正弧法，這個方法的測算，Allen 所著之鐵路曲線及土方一書中，早有說明，但撥距的求法，係利用前半移和後半移的加減關係，而不是用差數累計和前半移距相加的關係，所以略嫌陳舊；且原理說得太少，顯然不能滿足讀者的要求. 因繩正法工作簡便，在車次頻繁的路段也能順利進行，解決經緯儀測量的困難，所以對於經常養路撥道，很關重要. 東北鐵路久有撥道法一書的刊行，上海鐵路管理局復於去冬彙編印行，供養路員工參考，內容以繩正法爲主，對於實施測算方法，解釋甚詳，毋庸作者多費筆墨. 現所感到缺憾的，還是理論方面，有若干原理、公式未見闡述，或不夠詳明，致使初學的人感覺研讀困難，不易透澈瞭解；遇到疑難問題，又苦乏參考資料，無從解答. 本人針對這一缺憾，曾費了一些時間和精力，闡明這些理論公式的來源，並經陸續整理，編成是書，以充實學習園地提高理論技術和業務水準，以期有補於人民鐵道建設事業之推進.

本人感到目前所看到的一些討論繩正法的作品，取材片段的居多，解釋原理的較少，本書雖在本人主觀上想來彌補這個缺憾，盡力撰成一部比較有系統的全面的繩正法的理論參考書，但檢討起來，總還有遺漏；而且個人學驗有限，思慮難周，解釋錯誤和疏忽之處，容或不免，甚盼讀者隨時提供意見，以便再版時，改訂補充.

黃翩飛誌 1950 年 6 月 30 日於石門

自序

本書撰述的動機,已詳初版前言. 事實告訴我們,要掌握技術而又要嫺熟和準確,必須精通原理,糾正單憑公式記憶和狹隘實用主義的偏向. 本書就希望能適應這個要求,供人民鐵道養路員工同志們和普通職校乃至專科以上學校鐵路或土木系師生的學習參考. 目前鐵路職工鑽研學習的熱情日益增高,對於工作有關的技術業務,不以知其當然爲足,而想深入澈底研究,以求知其所以然. 由理論的正確認識糾正實踐中的偏差,指導實踐的進展;復從現場實踐中,引證理論,發現問題,批判得失,增進學驗,發展眞理;這是一個顚撲不破的道理. 本書初版問世,僅印了二百本,當時即銷售一空,而各方面需索仍紛至沓來,也正反映工作同志們對於學理研求的熱情. 這種學習的熱情,給我很大的鼓勵,決計修訂補充並商請龍門聯合書局再版刊行,以應許多養路員工的需要.

我國有些鐵路的單曲線或復曲線,原來半徑不夠大,兩端又尙未敷設緩和曲線,對於行車鋪道兩不相宜,現需插設緩和曲線,如照過去常用的偏角法,在行車路段施測,很成問題. 而切線支距法及引弦偏距法,又不及彎道量弦之準確便利. 所以用全面繩正法撥道插入緩和曲線,較能切合實用. 一般員工祇要對繩正法原理精通,自能運用自如,無往而不可. 根據東北某鐵路局一九五〇年養路工作的報導,全面繩正法撥道插入緩和曲線已在實行. 因爲由現場體驗到:撥正彎道在曲線始終點上是有問題的,用儀器校正也困難,必須經過大修,用繩正法

校正．經過了兩個月的學習，正式開始工作，已修好了千餘處彎道，除幾個半徑較大的曲線外，差不多已全加上緩和曲線． 這些無異說明學習理論和實際結合的重要． 倘理論欠瞭解，就不易掌握繩正法來撥正彎道、插設緩和曲線，和解決實踐中的困難問題．

最後須附述的是：本書在石家莊初版尚未校印完成，我即調京工作． 加以承印單位對於科技圖書的摹繪排版校刊工作，尙欠嫻熟，致印出後，發現不少錯誤． 雖後經改正銷行，仍不免疏忽遺漏，至今引爲歉憾． 現經審愼修正補充，內容較前充實，並改請龍門聯合書局出版，但仍希望閱者隨時指正，以便將來重印時，更求完善．

作 者 誌 1951 年 2 月於北京

目　錄

曲線繩正法原理

(一)曲線半徑及弦長和縱距的關係公式

甲、圓曲線弦正矢(中央縱距)的公式

設R=圓半徑,C=弦長,卽圖1之ab;

M=正矢,卽圖1之de,則

$$R^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2+(R-M)^2,$$

$$M=\frac{C^2}{4(2R-M)}\doteq\frac{C^2}{8R}\cdots\cdots\cdots(1)$$

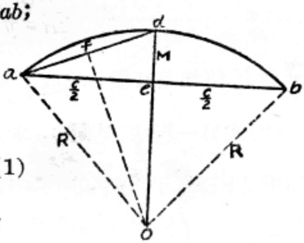

圖 1

因M較$2R$爲數甚小,故將$2R-M$中之M省略,以解出(1)式,當無明顯差誤.

(1)式又一證法: 作$of\perp ad$

則Δade與Δdfo相似

$$\therefore\quad de:df=ad:do \qquad \text{卽 } M:\frac{ad}{2}=ad:R$$

$$M=\frac{\overline{ad}^2}{2R}=\frac{\overline{ae}^2}{2R}=\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R}=\frac{C^2}{8R}$$

因ad與ae長度相差甚微,故上式取近似代入法.

乙、圓曲線弦上任一點的縱距公式

設de爲ab弦上任一點e之縱距,見圖2. 通過e,o兩點作fg,聯bg,af線.

命 $de=V$，　$hk=M$，　$fe=y$，則

$\angle eaf=\angle bge$ 因兩角同以 $\frac{1}{2}\widehat{bf}$ 度之.

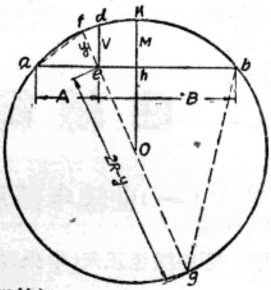

圖 2

同理，$\angle afe=\angle abg$，又 $\angle aef=\angle beg$，

故 $\triangle aef$ 與 $\triangle beg$ 相似，

$\therefore\ ae:eg=ef:eb$

即　　$A:2R-y=y:B$

$$y=\frac{AB}{2R-y}=\frac{AB}{2R}(\text{近似值}).$$

因 y 與 V 值相差甚微，故取 V 代 y 而得 $V=\dfrac{AB}{2R}$ ··········(2)

(2)式另一證法，見圖 3，求 ab 弦上任一點 e 的縱距 V.

由 g 作 $gd' \parallel ab$，交 de 之引長線於 d'，

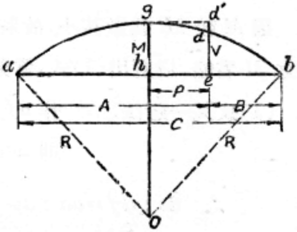

圖 3

則　$M=hg=\dfrac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R}$，$dd'=\dfrac{p^2}{2R}$(近似值)

$$V=de=M-dd'=\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R}-\frac{p^2}{2R},$$

$$=\frac{\left(\frac{C}{2}+p\right)\left(\frac{C}{2}-p\right)}{2R}=\frac{AB}{2R}(\text{近似值}).$$

如求弦上四分之一處的縱距 V，則

$$V=\frac{\frac{3}{4}C\times\frac{1}{4}C}{2R}=\frac{3C^2}{32R}$$

丙、複曲線弦正矢的公式

求複曲線 ab 弦上的正矢 M_c，見圖 4，以 o_1 爲圓心，R_1 爲半徑，自 d

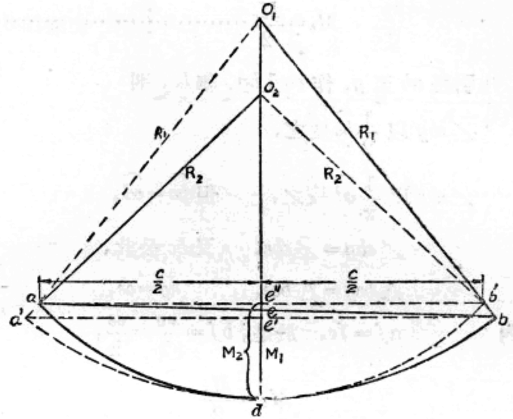

圖 4

作圓弧 da'；以 o_2 爲圓心，R_2 爲半徑，自 d 作圓弧 db'．聯 $a'b$ 及 ab'，交 o_1d 於 e' 及 e''．命 de' 爲 M_1，de'' 爲 M_2，de 爲 M_c，則

$$M_1=\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R_1}=\frac{C^2}{8R_1},\quad M_2=\frac{\left(\frac{C}{2}\right)^2}{2R_2}=\frac{C^2}{8R_2},$$

$$M_c=\frac{1}{2}(M_1+M_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{C^2}{8R_1}+\frac{C^2}{8R_2}\right)$$

$$=\frac{C^2}{16}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

（二）圓曲線始終點的正矢及相鄰點的縱距率

甲、測點正在圓曲線始終點時，求其正矢

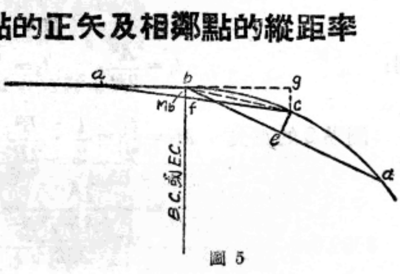

圖 5

如圖 5，測點 b 正在圓曲線的始點或終點，則測點 b 的正矢

$$M_b=\frac{M_c}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

證明：　引長 ab 至 g，作 $cg\perp bg$，聯 bc，則

$\angle cbg$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{bc}$ 度之，

$\angle cbe$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{cd}$ 度之，　但 $\widehat{bc}=\widehat{cd}$，

故　$\angle cbg=\angle cbe$．　又 bc 公共，

所以　$\triangle bcg=\triangle bce$，　$cg=ce$，

在 $\triangle acg$ 內　$af=fc$，於是，$bf=\frac{cg}{2}=\frac{ce}{2}$，

卽　$M_b=\frac{M_c}{2}$

乙、測點不在圓曲線始終點時，求始終點前後相鄰測點的縱距率

如圖 6，設 C 點爲 $B.C.$ 或 $E.C.$，自 C 引長切線至 d，作 $d3\perp cd$．命 $d3$ 爲 t_2．自 c 向後引圓弧 ce 交 M_1 於 e．命 $e2$ 爲 t_1，聯 $e4$ 線，命 M 爲圓曲線的正常正矢．

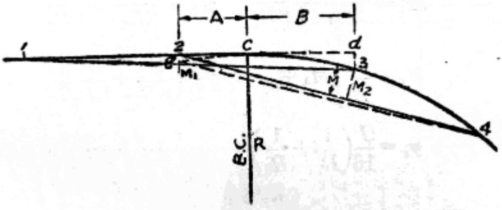

圖 6

則　$t_1=\frac{A^2}{2R}$，　$t_2=\frac{B^2}{2R}$．

測點 2 的正矢　$M_1=\frac{t_2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{2R}$

$$=\frac{B^2}{4\cdot\frac{(A+B)^2}{2M}}=\frac{M\cdot B^2}{2(A+B)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

測點 3 的正矢 $M_2=M-\frac{t_1}{2}=M-\frac{1}{2}\cdot\frac{A^2}{2R}$

$$=M-\frac{A^2}{4\cdot\frac{(A+B)^2}{2M}}=M-\frac{M\cdot A^2}{2(A+B)^2}$$

$$=M\left[1-\frac{A^2}{2(A+B)^2}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

第(6)式可另證如圖 7,在 $\triangle 2e4$ 內

$$y_1+M_2=\frac{y_2}{2},\text{ 故 }M_2=\frac{y_2}{2}-y_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{(A+2B)^2}{2R}-\frac{B^2}{2R}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(A+2B)^2}{2\cdot\frac{(A+B)^2}{2M}}-\frac{B^2}{2\cdot\frac{(A+B)^2}{2M}}$$

$$=M\cdot\frac{A^2+4AB+2B^2}{2(A+B)^2}=M\left[1-\frac{A^2}{2(A+B)^2}\right]$$

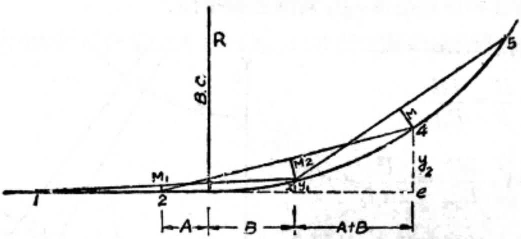

圖 7

設 $B.C.$ 距測點 2 爲 3.5 公尺,距測點 3 爲 6.5 公尺,則

A 之距離比率 $=\frac{3.5}{10}=0.35$, B 之距離比率 $=\frac{6.5}{10}=0.65$

A 端測點 2 之縱距率 $=\frac{B^2}{2(A+B)^2}=\frac{\overline{0.65}^2}{2(0.35+0.65)^2}=0.2113$

B 端測點 3 之縱距率 $=1-\frac{A^2}{2(A+B)^2}=1-\frac{\overline{0.35}^2}{2(0.35+0.65)^2}=0.9388$

上兩數和查表所得相符(參閱本書末所附撥道法第一表)。

倘圓曲線正矢 $M=100$mm，則

測點 2 的正矢 $=100\times0.2113=21.13\text{mm}\doteqdot 21\text{mm}$

測點 3 的正矢 $=100\times0.9388=93.88\text{mm}\doteqdot 94\text{mm}$

(三)螺旋形緩和曲線有關原理的說明

螺旋形緩和曲線的超高 e 自緩和曲線始點 $T.S.$ 始，隨曲線長 l 之漸增而遞增，故 e 和 l 成正比，即 $e\propto l$，或

$\frac{e}{l}=K$(常數). 但 $e=\frac{gV^2}{GR}$,其中g爲軌距,G爲重力所生之加速度,

故 $\frac{e}{l}=\frac{gV^2}{GRl}=K$，或 $Rl=\frac{gV^2}{GK}$.　因 g,V,G,K 均係常數，

$$\therefore\quad Rl=C(\text{常數})\quad 於是，\quad Rl=R_cl_c \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

其中 l_c 爲緩和曲線全長，R_c 爲圓曲線半徑.

參看圖 8，$Rds=dl$，

$$ds=\frac{dl}{R}=\frac{ldl}{R_cl_c}$$

$$\therefore\ s=\int_o^l\frac{ldl}{R_cl_c}=\frac{l^2}{2R_cl_c}\cdots(8)$$

因 S 角值通常很小，故可命

$\sin s=s$.

於是　$dy=sdl=\frac{l^2dl}{2R_cl_c}$,

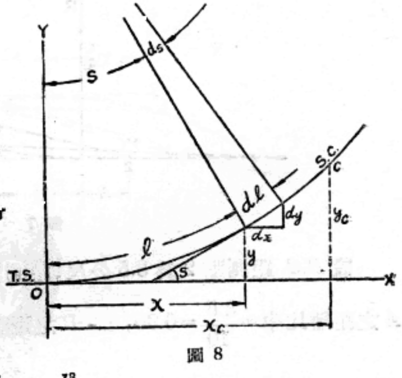

圖 8

$$\therefore\ y=\int_o^l\frac{l^2dl}{2R_cl_c}=\frac{l^3}{6R_cl_c}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

(9)式叫做三次螺旋線公式，連同(7)式，對於解釋緩和曲線繩正法的原理，很有關係，故須先予引證。

設 m＝超高度遞減率，則 $l_c=me$

(7)式變爲 $$C=R_cl_c=R_cme \quad \cdots\cdots(7a)$$

(9)式變爲 $$y=\frac{l^3}{6C}=\frac{l^3}{6meR_c} \quad \cdots\cdots(9a)$$

(四)求緩和曲線的正矢原理

甲、測點正在緩和曲線的始終點時,求始終點的正矢

見圖 9，設 M_0 爲 $T.S.$ 的正矢，M_1 爲緩和曲線上測點 1 的正矢，y_1 爲該點至切線 AX 的支距，等於 $E1$；l_1 爲緩和曲線等分長度．則

$$l_c=nl_1, \qquad R_1=nR_c,$$

$$R_cl_c=\frac{R_1}{n}\cdot nl_1=R_1l_1,$$ 用公式(7)亦可直接寫出．

用公式(9) $$y_1=\frac{l_1{}^3}{6R_1l_1}=\frac{l_1{}^2}{6R_1}$$

因緩和曲線內任何點之左右短距，比同度之圓曲線變動甚微，故正

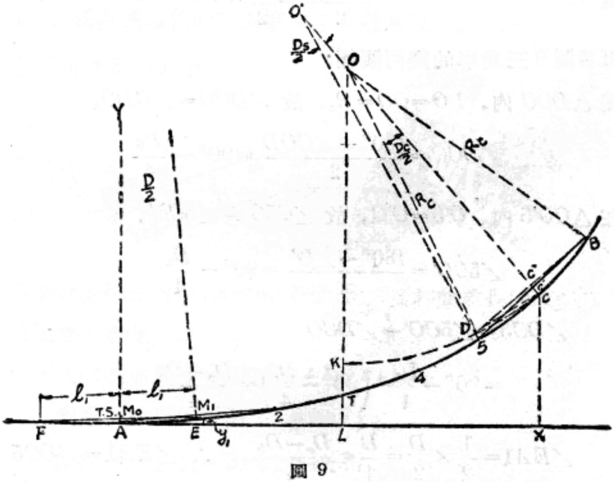

圖 9

矢之計算，仍利用圓曲線公式，當無甚明顯差誤.

於是 $M_1=\frac{l_1^2}{2R_1}$. 在 $\triangle FE1$ 內，$M_0=\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{l_1^2}{6R_1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{l_1^2}{2R_1}$

$$=\frac{1}{6}M_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

任何三次螺旋線的曲度 D，從 $T.S.$ 起隨長度 l 均勻增大，即 $\frac{D}{D_c}=\frac{l}{l_c}$，如圖 9，當 $A1=C5$ 時，測點 1 之曲度必等於測點 5 之圓曲線和螺旋線的曲度之差. 具體說來，設 ATC 螺旋線爲 6 等分，每等分弦長 l 等於 10 公尺，則 $A1$ 所夾中心角爲 $\frac{D}{2}$，$C5$ 所夾中心角爲 $\frac{D_5}{2}$.

$$\frac{D/2}{D_c/2}=\frac{l}{l_c},\text{即}\ \frac{D}{D_c}=\frac{l}{6l}=\frac{1}{6} \qquad D_c=6D \cdots\cdots\cdots (a)$$

$$\frac{D_5/2}{D_c/2}=\frac{l_5}{l_c},\text{即}\ \frac{D_5}{D_c}=\frac{5l}{6l}=\frac{5}{6} \qquad D_5=\frac{5}{6}D_c \cdots\cdots (b)$$

從 $(a)(b)$ 兩式得 $D_5=5D$, $\therefore D_c-D_5=6D-5D=D$,

或寫爲

$$\frac{D_c-D_5}{2}=\frac{D}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

再看圖 9 三角形的幾何關係：

在 $\triangle DOC$ 內，$DO=CO=R_c$，故 $\angle DCO=\angle CDO$，

$$\angle DCO=\frac{180^\circ-\angle COD}{2}=90^\circ-\frac{D_c}{4}$$

在 $\triangle CO'5$ 內，$O'5=O'C$，故 $\angle C5O'=\angle 5CO'$，

$$\angle 5CO'=\frac{180^\circ-\angle O'}{2}=90^\circ-\frac{D_5}{4}$$

於是 $\angle DC5=\angle 5CO'-\angle DCO$

$$=90^\circ-\frac{D_5}{4}-\left(90^\circ-\frac{D_c}{4}\right)=\frac{D_c-D_5}{4}$$

又 $\angle EA1=\frac{1}{2}\times\frac{D}{2}=\frac{D}{4}=\frac{D_c-D_5}{4}$, $\therefore \angle EA1=\angle DC5$

在 $\triangle AE1$ 及 $DC5$ 內，$E1=A1\sin EA1$，$D5=C5\sin DC5$

今 $A1=C5$，$\angle EA1=\angle DC5$，故 $E1=D5$.

換言之，無論自切線 AL 或曲線 CK，在定距內螺旋線度數的偏差相同，故離 O 一定距之螺旋線支距，必與離 A 一定距之支距相等. 因無論自切線或曲線距離相當各點度數之變化永同.

又圖 9，DCB 爲圓曲線，CC'' 爲圓曲線的正矢 $=M_c$，則 CC' 爲緩和曲線與圓曲線交點的正矢，卽等於

$$CC''-C'C''=M_c-\frac{D5}{2}=M_c-\frac{E1}{2}$$

$E1$ 卽圖 9 中之 y_1，$\quad y_1=\frac{l_1^2}{6R_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{l_1^2}{2R_1}=\frac{1}{3}M_1$，

所以 $$CC'=M_c-\frac{E1}{2}=M_c-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M_1=M_c-\frac{1}{6}M_1 \cdots\cdots (12)$$

由(10)，(12)兩公式得一定理：測點正在緩和曲線的始終點時，緩和曲線與直線交點處的正矢，爲遞加尺寸的 $\frac{1}{6}$；緩和曲線與圓曲線交點處的正矢，爲由圓曲線的正矢減去 $\frac{1}{6}$ 之遞加尺寸.

玆引實例說明如下：

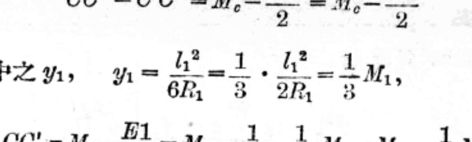

圖 10

設圓曲線的正矢 $=100$mm(見圖 10)，緩和曲線長(b至g)爲 5 (指 5 個單位距離)，於是

正矢的遞加尺寸 $=100\text{mm}\div 5=20\text{mm}$，

測點 c 的正矢 $=20\times 1=20$mm，

測點 d 的正矢 $=20\times 2=40$mm，

測點 e 的正矢 $=20\times3=60$mm,

測點 f 的正矢 $=20\times4=80$mm,

測點 b 的正矢 $=20\times\dfrac{1}{6}=3$mm(用第 10 公式),

測點 g 的正矢 $=100-20\times\dfrac{1}{6}=97$mm (用第 12 公式).

由上述知 b,g 亦即 $T.S.$ 和 $S.C.$ 的正矢求法, 採用 $\dfrac{1}{6}$ 之數値, 乃係有理論的根據的.

乙、測點不在緩和曲線的始終點時, 求始終點前後相鄰測點正矢的縱距率

先舉例說明,見圖 11.

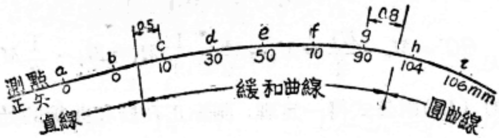

圖 11

設圓曲線的正矢爲 106mm,緩和曲線的遞加尺寸爲 $\dfrac{106}{5.3}=20$mm.

測點 d 的正矢 $=20\times1.5=30$mm,

測點 e 的正矢 $=20\times2.5=50$mm,

測點 f 的正矢 $=20\times3.5=70$mm.

次求緩和曲線始點前後測點 b, c 的正矢, 距離比率已知爲 0.5, 查表(本書末所附撥道法第二表)得

A 端 b 的縱距率 $=0.0208$,

測點 b 的正矢 $=20\times0.0208=0.416$mm $\fallingdotseq0$.

B 端 c 的縱距率 $=0.5208$,

測點 c 的正矢 $=20\times0.5208=10.416$mm $\fallingdotseq10$mm.

再求緩和曲線終點前後的測點 g, h 的正矢, 距離比率 0.8, 0.2.

查表得

C 端 g 的縱距率$=0.8013$,

測點 g 的正矢$=106-(20\times0.8013)=90$mm.

D 端 h 的縱距率$=0.0853$,

測點 h 的正矢$=106-(20\times0.853)=104$mm.

究竟上述 A,B,C,D 各端點的縱距率如何算出,待演下列公式證明.

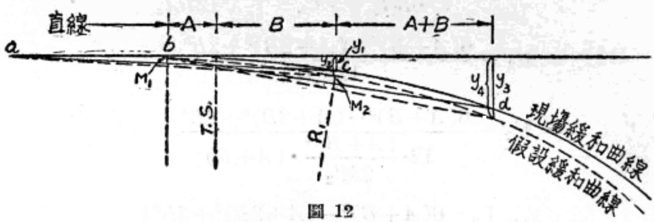

圖 12

見圖 12,設 M_1 為測點 b 的現場正矢,M_2 為測點 c 的現場正矢,y_1 為現場緩和曲線上測點 c 的支距,y_2 為假設自測點 b 始的緩和曲線上測點 c 的支距,

則 $$M_1=\frac{y_1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{B^3}{6R_cl_c}=\frac{B^3}{12R_cl_c}\text{(用公式 9)}.$$

假設緩和曲線自測點 b 始,則測點 b 的正矢變為 M_1',測點 C' 的正矢變為 M_2'.

$$M_1'=\frac{y_2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(A+B)^3}{6R_cl_c}=\frac{(A+B)^3}{12R_cl_c}$$

於是 $$M_1:M_1'=\frac{B^3}{12R_cl_c}:\frac{(A+B)^3}{12R_cl_c}=B^3:(A+B)^3$$

$$\therefore\ M_1=\frac{M_1'\cdot B^3}{(A+B)^3}=\frac{M_2'\cdot B^3}{6(A+B)^3}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (13)$$

設 y_3 為現場緩和曲線上測點 d 的支距,y_4 為假設自測點 b 始的緩和曲線上測點 d 的支距;則測點 c 的現場正矢增加量為