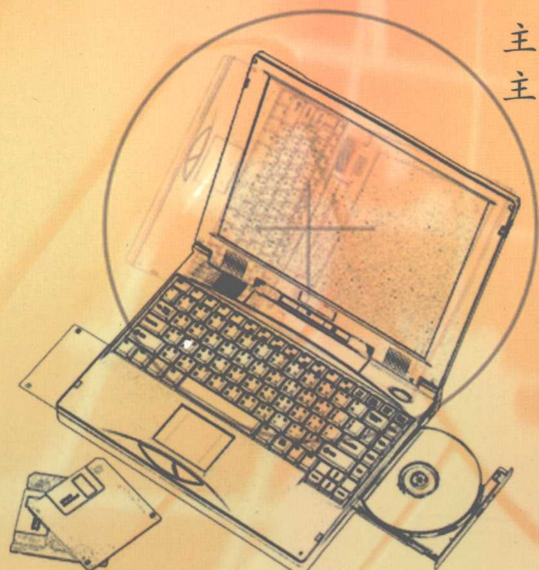
高职高专计算机专业通用教材

JISUANJI SHUXUE JICHU

计算机数学基础

主 编／程 伟
主 审／程正权



时代出版传媒股份有限公司
安徽科学技术出版社

高职高专计算机专业通用教材

JISUANJI SHUXUE JICHU

计算机数学基础

主　编　程　伟

副主编　赵　钰　孙　群　余久久

主　审　程正权

时代出版传媒股份有限公司

安徽科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/程伟主编. —合肥:安徽科学技术出版社,2009.9
高职高专计算机专业通用教材
ISBN 978-7-5337-4489-2

Ⅰ. 计… Ⅱ. 程… Ⅲ. 电子计算机-数学基础-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ. TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 134229 号

计算机数学基础 程 伟 主编

出 版 人:黄和平
责任编辑:期源萍
封面设计:朱 婧
出版发行:安徽科学技术出版社(合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场,邮编:230071)
电 话:(0551)3533330
网 址:www.ahstp.net
E - mail:yougoubu@sina.com
经 销:新华书店
排 版:安徽事达科技贸易有限公司
印 刷:安徽联众印刷有限公司
开 本:720×1000 1/16
印 张:13
字 数:280 千
版 次:2009 年 9 月第 1 版 2009 年 9 月第 1 次印刷
定 价:26.00 元

前　言

本书是为高职高专计算机类专业编写的一本数学教材，是高等数学，又是作为计算机专业基础的数学。在当前林林总总的教材中，切合高职高专计算机类专业需要的数学教材很难得，符合教改精神、好学好用的教材更难得，于是，我们在总结教学经验的基础上，作了这次探索，以期抛砖引玉。

我们遵照“够用、实用”的原则，考虑到计算机专业的特点和高职高专“高素质技能型专门人才”的培养目标及课程教学时数，确定了教材的编写内容。本教材将微积分、概率论和离散数学这几门学科的内容进行简化并整合在一起，做一个导引性的介绍。在微积分部分，只介绍一元微积分的基本内容，对于多元函数和多元微积分则没有介绍；在概率论部分，着重介绍基本的概率计算方法、随机变量及其数字特征；在离散数学部分，只介绍最基本的集合论和数理逻辑。

同时，介绍一些上述数学思想和方法在计算机科学领域中的应用，使学生对计算机科学和软件开发的数学基础与这些数学思想和方法的可能应用有一个总体的了解和把握。为了方便学生自学，书中例题的配置尽量做到由浅入深、循序渐进，并在每节后配置了课后习题，每章后配置了复习题。

全书共分 4 章。第一章：一元函数微分学，由安徽电子信息职业技术学院程伟编写并担任主编；第二章：一元函数积分学，由安徽电子信息职业技术学院赵钰编写并担任副主编；第三章：概率论基础，由安徽电子信息职业技术学院孙群编写并担任副主编；第四章：离散数学初步，由三联学院余久久编写并担任副主编。全书由程伟统稿，程正权主审。

本教材在编写过程中得到了安徽电子信息职业技术学院领导和老师，特别是软件学院苏传芳院长、计算机系王韦伟主任和基础部王传庆主任的大力支持和帮助，在此一并表示感谢。

由于水平有限，书中难免出现疏漏与错误，请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　一元函数微分学

自从牛顿和莱布尼兹创立了微积分以来，微积分作为一个基本的处理连续数学的工具，不仅自身的理论得到迅猛的发展，而且被广泛地应用于自然科学、工程技术和经济管理等领域，即使是以处理离散对象为主的计算机科学，也离不开微积分这个经典的数学工具. 对于这点，学习计算机专业的学生经常会有疑惑，下面来看一个问题.

问题　在计算机上怎样近似计算无理数 π?

因为从根本上说，计算机只会做四则运算. 因此问题归结为怎样通过有限次加、减、乘、除运算求出 π 的近似值. 微积分中无穷级数的理论（参见本章第 4 节）有这样一个结论：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

在应用上，我们可以只计算到其前 n 项，从而得到$\frac{\pi}{4}$的近似值，n 取得越大，近似程度越好。例如，我们可以计算到最后一项的绝对值小于是 10^{-6} 为止，得出对应的 C 语言程序如下：

```
#include <math.h>
  main()
  {
    int s;
    float n,t,pi;
    t=1;pi=0;n=1.0;s=1;
    while((fabs(t))>1e-6)
      {pi=pi+t;
      n=n+2;
      s=-s;
      t=s/n;
       }
      pi=pi*4;
      printf("pi=%10.6f\n",pi);
  }
```

运行结果为：pi=3.141594.

以上例子说明，无穷级数的知识对于计算机科学而言是十分重要的，而要掌握有关无穷级数的知识，就必须学习极限、收敛性、函数的导数等知识，这些正是微积分的基本

内容.

极限和连续是微积分学的最基本概念,也是研究微积分学所必备的工具.下面通过简要复习函数的基本知识,学习极限与连续的概念和运算,为进一步学习微积分知识打下基础.

第一节 极限与连续

一、函数

我们在中学里已经学过有关函数的基本知识,但为了以后更好地学习计算机数学,我们把有关的内容简要地复习一下.

(一)函数

定义 设 D 是一个给定的数集,若对于 D 中每一个数 x,按照一定的对应法则 f,总有确定的数值 y 与之对应,则称 y 是定义数集 D 上的 x 的函数,记作:$y=f(x)$. 数集 D 称为这个函数的**定义域**,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

对于定义域 D 内的某个确定的值 x_0,其所对应之因变量的值或函数 $y=f(x)$ 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$. 数集 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

$G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

对于在同一问题中的不同函数关系,为了区别清楚起见,要用不同的函数记号来表示这些函数,如 $F(x)$,$G(x)$,$g(x)$,…,等等.

若 y 值唯一,称之为单值函数.有时会遇到给定 x 值,对应的 y 值有多个的情形,为了叙述方便称之为多值函数.对于多值的情形,我们可以限制 y 的值域使之成为单值再进行研究.

应当指出,在实际应用中有些函数在定义域的不同范围内用不同的解析式表示,例如函数

$$f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ 2x-1 & 1\leqslant x<10. \\ 3x-11 & x\geqslant 10 \end{cases}$$

这样的函数称为**分段函数**.对分段函数求函数值时,应把自变量的值代入相应范围的表达式中去计算.例如,$4\in[1,10)$,所以 $f(4)=2\times 4-1=7$;$20\in[10,+\infty)$,所以 $f(20)=3\times 20-11=49$.

(二)函数的两个要素

由函数的定义可以知道,当函数的定义域和函数的对应关系确定以后,这个函数就完全确定了.因此,常把函数的定义域和函数的对应关系叫做确定函数的两个要素.两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时,这两个函数才认为是完全相同的.

【例 1】 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 与函数 $g(x)=x+2$ 是否相同,为什么?

解　$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=x+2\ (x\neq2)$,其定义域为 $x\neq2$;$g(x)=x+2$ 的定义域是实数集 R.

因为它们的定义域不相同,所以这两个函数是不同的函数.

(三)函数定义域的求法

函数的定义域是确定函数的要素之一,在研究函数时,只有在函数定义域内进行研究才是有意义的.

在实际问题中,函数的定义域是根据所研究问题的实际意义来确定的.对于数学式子表示的函数,若不考虑问题的实际意义,则函数的定义域就是指能使这个式子有意义的自变量取值的集合.

【例 2】　求函数 $f(x)=\frac{\ln(4-2x)}{x+1}$的定义域.

解　要使函数有意义,必须$\begin{cases}4-2x>0\\x+1\neq0\end{cases}$,解得 $x<2$ 且 $x\neq-1$,用区间表示其定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(四)函数的简单性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$在数集 D 上有定义,若存在正数 M,使对一切 $x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 D 上有界.如果这样的 M 不存在,就称 $f(x)$在 D 上无界,即对任给的正数 M,总存在 $x_1\in D$,使$|f(x_1)|>M$.

函数的有界性与数集 D 有关.例如 $f(x)=\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上有界,因为存在 $M=1$,使对一切 $x\in[1,+\infty)$有$\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant1$.但它在$(0,1)$内却是无界的,因为对任给的正数 $M>1$,总存在 $x_1=\frac{1}{2M}\in(0,1)$,使$|f(x_1)|=\left|\frac{1}{x_1}\right|=2M>M$.

一个函数如果在其定义域上有界,就称它为**有界函数**.有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.例如,$y=\sin x$ 是有界函数,因为在它的定义域$(-\infty,+\infty)$内,$|\sin x|\leqslant1$.

2. 单调性

设函数 $f(x)$在数集 D 上有定义,如果对 D 中任意两个数 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$.则称 $f(x)$在数集 D 上单调增加(或单调减少),简称单增(或单减).

单增和单减的函数统称为**单调函数**.

例如,函数 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单增的,因为对任意 $x_1,x_2\in$ R,有

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2).$$

当 $x_1<x_2$ 时,由于 $x_1-x_2<0$,而

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0,$$

故总有 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

又如，函数 $g(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单减，在区间 $[0,+\infty)$ 上单增，但在整个区间内却不是单调的. 这说明函数的单调性亦与数集 D 有关.

3. 奇偶性

设 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 D 关于原点对称，即当 $x\in D$ 时有 $-x\in D$. 如果对任意 $x\in D$，总有

$$f(-x)=-f(x)\text{或}f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**(或**偶函数**).

例如，$f(x)=x^3$ 是奇函数，$g(x)=x^2$ 是偶函数，因为对任意 $x\in\mathrm{R}$，总有

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x),$$
$$g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x).$$

又如，三角函数中正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数，余弦函数 $y=\cos x$ 是偶函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

在坐标平面上，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 若存在常数 $l\neq0$，使对任意 $x\in D$，总有

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的一个**周期**. 显然，若 l 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $kl(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也都是它的周期，所以一个周期函数一定有无穷多个周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，三角函数中 $\sin x$ 和 $\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，$\tan x$ 和 $\cot x$ 是周期为 π 的周期函数. 但并非任何周期函数都有最小正周期. 例如，常量函数 $f(x)=C$ 是周期函数，任何实数都是它的周期，因而不存在最小正周期.

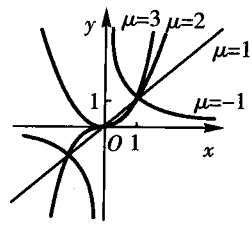
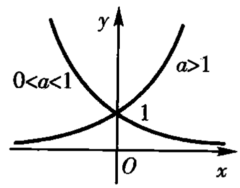
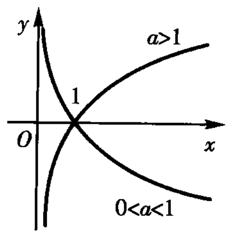
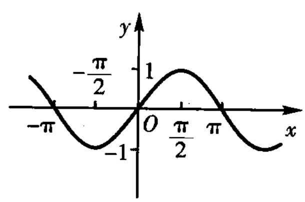
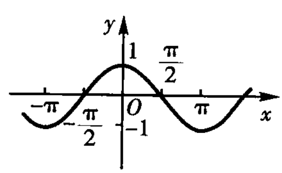
周期函数的图形在每个区间 $[x+kl,x+(k+1)l]$ 上都是一样的，其中 k 为任意整数，x 为 x 轴上任意一点.

(五)基本初等函数

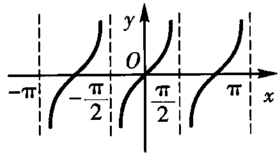
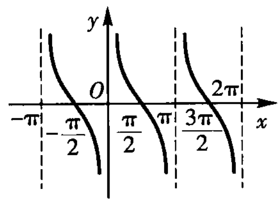
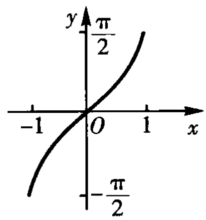
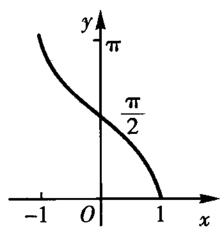
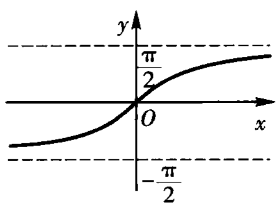
我们学过的幂函数 $y=x^\mu$(μ 为实数)；指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$；对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

表 1－1 中是一些常用的基本初等函数的性质及图形.

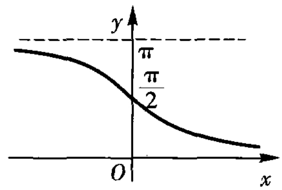
表 1-1　常用基本初等函数的性质和图形

函数	表达式	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y=x^{\mu}$	定义域与值域随 μ 的不同而不同，但不论 μ 取什么值，函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义		若 $\mu>0$，x^{μ} 在 $[0,+\infty)$ 单调增加；若 $\mu<0$，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 单调减少
指数函数	$y=a^{x}$ $a>0,a\neq1$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		若 $a>1$，a^{x} 单调增加；若 $0<a<1$，a^{x} 单调减少
对数函数	$y=\log_{a}x$ $a>0,a\neq1$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		若 $a>1$，$\log_{a}x$ 单调增加；若 $0<a<1$，$\log_{a}x$ 单调减少
正弦函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少
余弦函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,+1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加

续表

函数	表达式	定义域与值域	图像	特性
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in Z)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,+1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
反余弦函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,+1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
反正切函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界

续表

函数	表达式	定义域与值域	图像	特性
反余切函数	$y=\operatorname{arccot}x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

(六)复合函数

定义 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 M,且 $M\subset D_1$.若对于 D 内任意一点 x,有确定的值 $u=\varphi(x)$ 与之对应,由于 $u=\varphi(x)\in M\subset D_1$,又有确定的值 y 与之对应,这样就确定了一个新函数,此函数称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**,记为 $y=f[\varphi(x)]$.

例如,设函数 $y=\sin^2 u, u=x^2$,则复合而成的函数 $y=\sin^2 x^2$ 的定义区间为 $(-\infty,+\infty)$.由函数 $y=\sqrt{u}, u=1-x^2$ 复合而成的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义区间为 $[-1,1]$.而函数 $y=\sqrt{1-u^2}, u=x^2+2$ 是无法复合的,因为对应于任何 x 的值,u 的值都在函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义区间以外.

为了研究方便,往往把一个比较复杂的函数分解成几个比较简单的函数的复合.要把复合函数分解好,必须记住基本初等函数的形式.

【例 3】 指出下列复合函数的复合过程:

(1)$y=\tan(2-x^2)$; (2)$y=\ln\sin\dfrac{1}{x}$; (3)$y=e^{\sqrt{\arcsin(x+1)}}$.

解 (1)函数 $y=\tan(2-x^2)$ 是由 $y=\tan u, u=2-x^2$ 复合而成,其中 u 为中间变量;

(2)函数 $y=\ln\sin\dfrac{1}{x}$ 是由 $y=\ln u, u=\sin v, v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成,其中 u 和 v 为中间变量;

(3)函数 $y=e^{\sqrt{\arcsin(x+1)}}$ 是由 $y=e^u, u=\sqrt{v}, v=\arcsin w, w=x+1$ 复合而成.

(七)初等函数

定义 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算及有限次的复合而构成的,并且只用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如:函数 $y=\sin^2(3x+1), y=\sqrt{x^3}, y=\dfrac{\lg x+2\tan x}{10^x-1}$ 都是初等函数.

并非所有函数皆为初等函数,分段函数一般就不是初等函数.应当注意,函数 $y=\begin{cases}-x & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$ 初看起来虽由两个式子表示,但是它也可用一个解析式 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 表示,所以它也是初等函数.

(八)递归函数与递归程序设计

对于自然数 n 为自变量的函数 $f(n)$，有一种称之为递归的定义方法，即①给出 n 的最初几个值所对应的函数值 $f(0),f(1),\cdots,f(k-1)$；②当 $n\geqslant k$ 时，$f(n)$ 的计算，归结为对 $f(n-1),f(n-2),\cdots,f(n-k)$ 的计算. 于是，对任一 $f(n)$ 的计算，可逐步减小自变量往前推算，最终归结为已知的 $f(0),f(1),\cdots f(k-1)$，从而完全确定. 这样定义的函数，称为**递归函数**。例如

$$S(n)=\begin{cases}1 & 当\ n=1\\ S(n-1)+n\times n & 当\ n>1\end{cases},$$

就是一个递归函数，按照其定义计算 $S(5)$ 的过程如下：

$$\begin{aligned}S(5)&=S(4)+5^2=S(3)+4^2+5^2\\&=S(2)+3^2+4^2+5^2\\&=S(1)+2^2+3^2+4^2+5^2\\&=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\\&=55\end{aligned}$$

递归定义的函数表面上看来简洁，实际上过程迂回. 当递归的层次较深时，手工计算的繁度是难以忍受的. 递归计算的过程实际上类似于循环，是多次重复同一模式的操作，简单而单调，用高速而不知疲倦的计算机来担当此任，则是最恰当不过的，因此，大多数计算机高级语言都支持递归算法。

【例 4】 斐波那契问题. 有一雌一雄一对兔子，假定过两个月便可繁殖雌雄各一的一对兔子. 问过 n 个月后，共有多少对兔子？

解 显然，问题的解与 n 密切相关，可以看成是 n 的函数. 然而，要直接写出该函数的表达式是困难的. 但是，根据假设条件可以容易地写出递归关系，从而获得递归函数的表达形式.

设第 n 个月时，有兔子 $f(n)$ 对，其中新生兔子 $N(n)$ 对. 第 $(n-1)$ 个月时，兔子对数为 $f(n-1)$，所以 $f(n)=f(n-1)+N(n)$. 而根据题设，$N(n)$ 是由第 $(n-2)$ 个月时的兔子产生的，即 $N(n)=f(n-2)$，因此，$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$. 另外，刚开始及第 1 个月时，只有一对兔子，尚未有新兔子产生，故 $f(0)=f(1)=1$，于是

$$f(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 1 & n=1.\\ f(n-1)+f(n-2) & n\geqslant 2\end{cases}$$

这样，就将斐波那契问题的解表示成了 n 的递归函数. 于是

$$\begin{aligned}f(5)&=f(4)+f(3)\\&=f(3)+2f(2)+f(1)\\&=f(2)+3f(1)+2f(0)+f(1)\\&=5f(1)+3f(0)\\&=5+3=8\end{aligned}$$

利用该递归函数，可以很容易地在计算机上编程，计算出 n 取正整数时的斐波那契问题的解. 习惯上，将对应于 $n=1,2,3,\cdots$ 的问题的解所组成的数的系列称作斐波那契数列.

在深入学习了离散数学的知识（不在本书范围之内）之后，就会知道斐波那契问题的解也可以写成直接表达的形式

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

对比两种表达方式，可以看到，后者不仅计算复杂，而且还需要计算无理数，因此，如果直接应用后者进行编程计算，只能获得近似的结果；而采用递归函数的方式，不仅计算简单，而且可以获得准确的结果. 这点对于从事计算机软件开发的人员来讲是十分重要的，由此可见递归函数方法的优越性.

用递归方法编程求解斐波那契数列，并输出前 20 项的 C 语言程序如下：

```
int fit(int n)
{
  int y;
  if((n==0)||(n==1))
    y=1;
  else
    y=fit(n-1)+fit(n-2);
  return y;
  }
#include <stdio.h>
main()
{
int i,a;
  for(i=0;i<20;i++)
    {a=fit(i);
    printf("%d\t",a);
    }
}
```

运行结果为：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，1597，2584，4181，6765.

二、函数的极限

（一）数列极限的定义

我们已经学过数列的概念，现在我们将进一步考查当自变量 n 无限增大时，数列

$a_n=f(n)$的变化趋势.先看下列两个数列:

(1) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

(2) $2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

我们可以看出,当 n 无限增大时,数列 $a_n=\frac{1}{2^n}$ 的值无限接近于 0(图 1-1);数列 $a_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的值无限接近于 1(图 1-2).

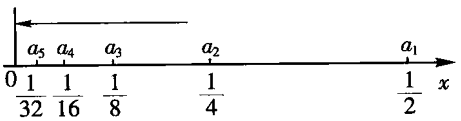


图 1-1

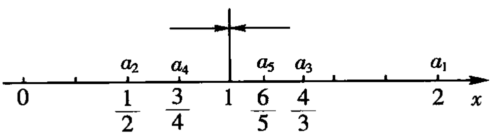


图 1-2

归纳这两个数列的变化趋势,可知当 n 无限增大时,数列 a_n 都分别无限接近于一个确定的常数.一般的,我们给出下面的定义:

定义 如果当 n 无限增大时,数列 a_n 无限接近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫做数列 a_n 的**极限**或说数列 a_n **收敛于** A.记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \qquad 或者 \qquad a_n\to A \quad (n\to\infty).$$

因此,数列(1)的极限是 0,可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$;数列(2)的极限是 1,可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.根据数列极限的定义可知:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2$,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}(-3)=-3$.由此可以推得下列的结论:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0$($a>0$ 的常数);(2)$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$($|q|<1$);(3)$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$($C$ 为常数).

最后,还需注意,并不是任何数列都是有极限的.

例如,数列 $a_n=3^n$,当 n 无限增大时,a_n 也无限增大,不能无限接近于一个确定的常数,所以这个数列没有极限.对于上述没有极限的数列,也说数列的极限不存在.数列极限不存在又称数列**发散**.

(二)函数的极限

当函数的自变量 x 连续变化时,讨论数列的极限也就是讨论函数 $y=f(x)$ 当自变量 x 取正整数而无限增大的函数极限.在这一节中,我们主要研究以下两种情形:①当自变量 x 的绝对值无限增大时,函数的极限;②当自变量趋于有限值 x_0 时,函数的极限.

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

我们用 $x\to\infty$ 来表示 x 的绝对值无限增大.先看下面的例子:$f(x)=\frac{1}{x}$

可以看出，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 无限接近于 0（图 1 - 3），和数列极限一样，称常数 0 为函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

对于这种当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，给出下列定义：

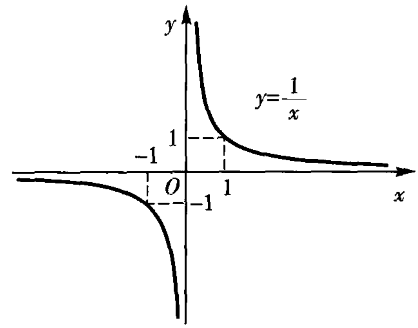


图 1 - 3

定义　如果当 x 的绝对值无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**. 记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或者 \quad f(x)\to A \quad (x\to\infty).$$

在以上的函数极限定义中，自变量 x 的绝对值无限增大指的是：x 既可以取正值，也可以取负值，但其绝对值无限增大.

定义　如果当 x 仅取正值（或仅取负值）而绝对值无限增大，即 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的**极限**，记为

$$\lim_{n\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A,$$

或者

$$f(x)\to A \quad (x\to+\infty)(或\ x\to-\infty).$$

$\boxed{\text{注意}}$　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 包含两种情形：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$；反之，只有当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，才可记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

【例 5】　讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 的极限.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\arctan x$ 不是无限接近于一个确定的常数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

考查函数 $f(x)=\frac{x^2-4}{3(x-2)}$ 当 x 趋于 2 时的变化趋势.

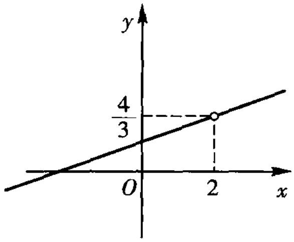


图 1 - 4

从图 1 - 4 不难看出，虽然 $f(x)$ 在 $x=2$ 时无定义，但当 x 无论从 2 的左侧无限接近于 2 时，还是从 2 的右侧无限接近于 2 时，对应的函数值 $f(x)=\frac{1}{3}(x+2)$ 都能无限地接近于定数 $\frac{4}{3}$. 由此可知，当 $x\neq2$ 而 $x\to2$ 时，函数 $f(x)=\frac{x^2-4}{3(x-2)}$ 的值无限接近于 $\frac{4}{3}$.

对于这种当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，给出下面的定义：

定义 如果当 x 无限接近于定值 x_0，即当 $x\to x_0$ 时（在 x_0 处可以无定义），函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**. 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或者 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

可得：$\lim\limits_{x\to x_0} C=C$（$C$ 为常数），$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

（三）当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的左极限与右极限

我们前面讨论的当 $x\to x_0$ 时函数的极限中，x 既从 x_0 的左侧无限接近于 x_0（记为 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0-0$），也从 x_0 的右侧无限接近于 x_0（记为 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0+0$）. 下面给出当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时函数极限的定义：

定义 如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**. 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A.$$

如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**. 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

根据左、右极限的定义可知：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$；

反之，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

【例 6】 设 $f(x)=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$（通常称 $\mathrm{sgn}x$ 为符号函数），画图讨论 $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{sgn}x$，$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{sgn}x$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{sgn}x$ 是否存在.

解 作出这个分段函数的图形（如图 1－5），由定义，函数 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时的左极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1;$$

右极限为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1.$$

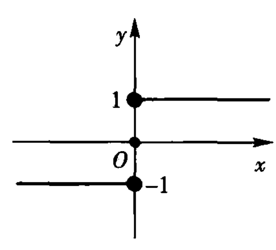


图 1－5

因为右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 和左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 不相等，所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.