主编 • 樊明书

线性代数

Linear Algebra

四川大学出版社

线性代数

Linear Algebra

主　编　樊明书

副主编　符　伟

编　委　强静仁　张　莉

龙少华　夏安银

四川大学出版社

责任编辑:毕　潜
责任校对:傅　奕
封面设计:墨创文化
责任印制:李　平

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 樊明书主编. —成都：四川大学出版社，2009.8
ISBN 978-7-5614-4518-1

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 樊…　Ⅲ. 线性代数　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 143635 号

书名　线性代数

主　编	樊明书
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-4518-1
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	10
字　数	201 千字
版　次	2009 年 8 月第 1 版
印　次	2009 年 8 月第 1 次印刷
印　数	0 001～3 000 册
定　价	16.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　言

线性代数一直以来就是本科大学生的基础数学课程之一，也是考研数学的基本内容之一. 其理论和方法在工程技术、科学研究以及经济、管理中都有着广泛的应用. 例如，工程技术中的数值计算，信息科学线性规划中的编码信息等，都与线性代数有密切的联系.

本书根据教育部21世纪大学数学(理工类和经管类)线性代数课程的基本要求和全国研究生入学考试大纲，以作者多年来在西南科技大学、四川大学、四川大学锦城学院等各级本科院校为理工类和经济管理类大学本科生讲授线性代数课程的讲义为基础，修改整理而完成.

本书在编写时遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴进实际应用的原则，充分考虑了线性代数课程教学时数减少的趋势，并结合了学生的自身特点和对本课程的要求. 本书起点较低，读者容易入门，在编写上由浅入深，力求直观性和科学性相结合，在内容上包含了理工、经济、管理学科中的基本内容和研究生入学考试要求的内容.

本书是为理工类、经济管理类本科学生编写的教材，可供这些类别的大学生考研时参考，也可作为其他各级各类大学生的参考用书. 考虑到不同专业的需求有所差别，一些章节用“*”标出，供相关专业选择.

本书共六章，包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵以及二次型等内容，各章末配有习题，书后附有习题参考答案.

本书是多所院校老师合作的结晶，主编是四川大学锦城学院的樊明书，主要负责全书的编写与内容的安排，副主编是西南交通大学峨眉校区的符伟，他主要负责第六章的内容和全书的习题. 参加本书编写的还有四川师范大学文理学院的强静仁博士、四川师范大学的张莉、四川大学锦城学院的龙少华和西华大学的夏安银.

在这里要感谢四川大学数学学院的谢勉忠副教授，在初稿完成以后，他仔细地进行了审查，并提出了修改意见.

由于时间紧迫和作者的水平有限，书中难免有不足之处，恳请广大读者和同行指正.

编　者
2009年6月

目 录

第一章 行列式

在许多工程和经济模型中，我们常要遇到解方程组的问题，而线性方程组则是这些方程组中最简单和最常见的类型.在中学中，我们讨论了一元一次方程、二元一次方程组和三元一次方程组.在线性代数中，我们主要讨论一般的多元一次方程组，即线性方程组.而讨论线性方程组及其相关知识时，最重要的两个工具就是行列式和矩阵.在这一章中，我们将引入行列式的定义、性质，并介绍行列式的计算以及行列式在解线性方程组中的应用.

第一节 二、三阶行列式

给出线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

利用消元法，分别消去 x_1, x_2，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则方程组(1.1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.3}$$

观察式(1.1.3)可知，方程组(1.1.1)的解 x_1, x_2 具有相同的分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，它由 4 个数构成，而这 4 个数均来自于方程组(1.1.1)中 x_1, x_2 的系数，且形式为两对数的乘积相减.为此，我们引入二阶行列式的定义如下：

定义 1.1.1 设 2^2 个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 排成的正方形数表为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

则数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为对应于这个数表的二阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.1.4}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中，4个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式(1.1.4)的元素. 横排称为行，竖排称为列. 元素 a_{ij} 中第一个指标 i 和第二个指标 j 依次称为元素 a_{ij} 的行标和列标，分别表示元素 a_{ij} 在行列式(1.1.4)式中所处的行数和列数. 例如，元素 a_{12} 在行列式(1.1.4)中位于第一行第二列.

二阶行列式(1.1.4)的运算可以用对角线法则来表示：行列式的主对角线(从左上角到右下角的实连线)上两元素 a_{11}, a_{22} 的乘积，减去行列式副对角线(从右上角到左下角的虚连线)上两元素 a_{12}, a_{21} 的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.1.5}$$

现在，方程组(1.1.1)的解可用行列式来表示，设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

若系数行列式 $D \neq 0$，则方程组(1.1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

注意到 D 就是方程组(1.1.1)的系数所构成的行列式，因此，我们称 D 为方程组(1.1.1)的系数行列式，而 D_1, D_2 分别是用方程组(1.1.1)右端的常数列来代替 D 中的第一列和第二列而形成的.

例 1.1.1

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2.$$

例 1.1.2 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 = 9. \end{cases}$$

解:由于

$$D=\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=5-4=1,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}4&2\\9&5\end{vmatrix}=20-18=2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&4\\2&9\end{vmatrix}=9-8=1,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1.$$

类似的,在用消元法来解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}\tag{1.1.7}$$

时,可引入三阶行列式的定义:3^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 排成三行三列,称

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\tag{1.1.8}$$

为三阶行列式.

同样,三阶行列式的计算也可用如图 1－1 所示的对角线法则来表示. 其中,实连线所在的三项三元素乘积符号为正,虚连线所在的三项三元素乘积符号为负,三阶行列式(1.1.8) 为这六项的代数和.

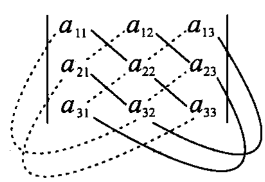

图 1－1

另外,三阶行列式(1.1.8) 的对角线法则还可以用如图 1－2 所示的形式来记忆.

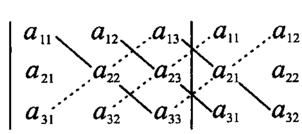

图 1－2

同样,若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则当$D \neq 0$时，方程组(1.1.7)有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}, \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

例 1.1.3

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4\times2\times6+0\times3\times(-1)+5\times0\times1-5\times2\times(-1)-0\times1\times6-4\times3\times0$$
$$=48+10$$
$$=58.$$

例 1.1.4 解关于 x 的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

解:由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=2(1-x),$$

因此，原方程等价于 $2(1-x)=0$,

解之可得 $x=1$.

从以上的讨论中，自然产生一个问题：对四元及以上的线性方程组是否也具有类似

于(1.1.6)和(1.1.9)的结果呢?我们将在本章最后一节给出肯定的答复.不过值得一提的是,四阶及以上行列式将不再具有对角线法则.我们将在本章第二节中根据二、三阶行列式的规律给出一般行列式(n 阶)的定义.

第二节　n 阶行列式

在上一节中,我们给出了二、三阶行列式的定义.这一节中,我们将根据二、三阶行列式的计算规律给出 n 阶行列式的定义.首先,我们需要引入排列和逆序的概念.

一、排列与逆序

由 n 个不同数码 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个n 级排列.$1,2,\cdots,n$ 的所有不同排列的数共 $n!$ 个,称为 $1,2,\cdots,n$ 的全排列数.

例如,1342 为元素 1,2,3,4 的一个排列,1,2,3,4 的全排列数为 $4!=24$.

在 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中,$123\cdots n$ 是按从小到大的顺序排列的,我们称其为 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个自然排列.

定义 1.2.1　在一个 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在了较小的数 $i_l(i_t>i_l)$ 的前面,则称 i_t 与 i_l 构成了一个逆序.一个 n 级排列中逆序的总数,称为该排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

若排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数是奇数,则称为奇排列;反之,则称为偶排列.

一般来说,一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 逆序数的算法可用该排列中每一个元素 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中每个数前边比它大的数的个数之和来表示,亦可用每个数后边比它小的数的个数之和表示.

例如,排列 31254 中,1 前比 1 大的数有 1 个,2 前比 2 大的数有 1 个,5 前比 5 大的数为 0 个,4 前比 4 大的数有 1 个,所以 $\tau(31254)=1+1+0+1=3$,为奇排列.

自然排列 $123\cdots n$ 的逆序数为 0,是偶排列.

例 1.2.1　写出 1,2,3 的所有排列,求它们的逆序数,并指出排列的奇偶性.

解:1,2,3 的所有排列有 $3!=6$(个),见表 1－1.

表 1－1

排列	逆序数	排列的奇偶性
1 2 3	0	偶排列
1 3 2	1	奇排列
2 3 1	2	偶排列
2 1 3	1	奇排列
3 1 2	2	偶排列
3 2 1	3	奇排列

在一个排列 $i_1,\cdots,i_t,\cdots,i_l,\cdots,i_n$ 中，如果仅交换 i_t 与 i_l 的位置，其他元素位置不变，得到另外一个排列 $i_1,\cdots,i_l,\cdots,i_t,\cdots,i_n$，这样的变换称为一个对换.

下面，我们不加证明地给出排列的两个性质：

性质 1 任何一个排列经过对换后，其奇偶性改变.

性质 2 $1,2,\cdots,n$ 的所有 $n!$ 个排列中，奇偶排列各半.

现在，我们观察三阶行列式的定义(1.1.8)的右边，发现其六项代数和中每一项元素的行标都是 1,2,3 的自然排列，而列标则为 1,2,3 的 6 个全排列，且符号为正的列标排列为偶排列，符号为负的列标排列为奇排列. 二阶行列式也具有相同的规律.

根据以上规律，我们得出 n 阶行列式的定义.

二、n 阶行列式

定义 1.2.2 设 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

所对应的运算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(n!)} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}, \tag{1.2.1}$$

(其中 $\sum$ 是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 共 $n!$ 项求和) 称为 n 阶行列式. 其中横排称为行，竖排称为列，从左上角 a_{11} 到右下角 a_{nn} 的连线称为行列式(1.2.1)的对角线.

特别的，当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$.

同理，如果在(1.1.8)中，将列标排成自然排列 123，则行标为 1,2,3 的全排列，其符号也具有类似于行标排成自然排列 123 时的类似规律(留给读者验证). 因此，行列式中行和列具有同等的地位和相似的性质，故 n 阶行列式也可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(n!)} (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{q_11} a_{q_22} \cdots a_{q_nn}, \tag{1.2.2}$$

其中 $\sum$ 是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 共 $n!$ 项求和.

从式(1.2.1)和式(1.2.2)可以发现，在 $n!$ 项的代数和中，每一项由 n 个元素构成，

且这 n 个元素均来自于不同行和不同列.

例 1.2.2　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值,其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解:由定义 1.2.1 知,行列式的一般式为

$$(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{np_n}.$$

D 中第一行只有a_{11} 非零,其余项全为0,故含$a_{1p_1}(p_1=1,2,\cdots,n)$的项中,只需保留含$a_{11}$ 的即可,其余的均为零. a_{11} 确定以后,根据行列式中每一项元素均处于不同列,可知与 a_{11} 相乘的元素中,不能再包含第一列的元素,故在第二行中我们只有选取 a_{22},得到含 $a_{1p_1}a_{2p_2}$ 的非零项只有 $a_{11}a_{22}$. 依此类推,D 中所有的非零项只有一项,即

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中符号为

$$(-1)^{\tau(12\cdots n)}=1.$$

故

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

我们称上面形式的行列式为下三角行列式.

同理,利用定义 1.2.2 可得上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中,$a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

特别的,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\quad(\text{其中 } a_{ii}\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$$

称为对角行列式.

因此,三角行列式和对角行列式的值均等于对角线各元素的乘积.这一结论在以后行列式的计算中可直接应用.

第三节 行列式的性质

在上一节,我们引入了 n 阶行列式的定义,并利用定义简单计算了一些特殊行列式(如三角行列式).然而,对于一般的 n 阶行列式,当 n 较大或元素较复杂时,计算量就非常大.为了减少计算量,我们在这一节中将引入行列式的性质.

在引入行列式的性质之前,我们首先引入转置行列式这一定义.

定义 1.3.1 将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3.1}$$

的行和列依次互换所得到的新的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3.2}$$

称为行列式 D 的转置行列式.

转置行列式和原行列式之间具有下面的性质.

性质 1 行列式(1.3.1)与其转置行列式(1.3.2)相等,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}.$$

证明:记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n).$$

故按行列式定义 1.2.1 和定义 1.2.2,有

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{T}}&=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}\\&=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}\\&=D.\end{aligned}$$

性质 2　把行列式的两行(列)互换,所得到的新的行列式与原行列式互为相反数.

证明:令

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

记

$$D_1=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{i1}&b_{i2}&\cdots&b_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{j1}&b_{j2}&\cdots&b_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}.$$

则

$$b_{kl}=\begin{cases}a_{kl}, & k\neq i,j,\\a_{jl}, & k=i,\\a_{il}, & k=j,\end{cases}\qquad l=1,2,\cdots,n.$$

由行列式的定义 1.2.1 以及对换改变排列奇偶性这一性质,可知

$$\begin{aligned}D_1&=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}\\&=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}\\&=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\&=-\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\\&=-D.\end{aligned}$$

同理,可得交换两列的情况.

由性质 2,我们马上可以得到如下推论:

推论 1 若行列式 D 中有两行(列)相同,则 $D=0$.

性质 3 将行列式中某一行(列)的所有元素都扩大 k 倍,则所得行列式为原行列式的 k 倍.

推论 2 若行列式的某一行(列)的所有元素都有公因数 $k(k\neq 0)$,则可将该公因数 k 提至行列式外相乘,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 3 如果行列式中某一行(列)的所有元素全是 0,则 $D=0$.

性质 4 如果行列式 D 中有两行(列)元素成比例,则 $D=0$.

由性质 2 和性质 3,可以很简单地得到性质 4.

性质 5 如果行列式 D 的某一行(列)元素均为两元素的和,那么这个行列式就可以写成两个行列式的和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 3 和性质 5 的证明利用行列式的定义 1.2.1 很简单就可以得出,在这里我们省去证明.

性质 5 告诉我们,若行列式 D 中某一行(列)元素均为两元素的和,则行列式可以拆分成两个行列式之和;若行列式 D 中有两行(列)均为两元素的和,则 D 可拆分成四个行列式的和;依此类推,若 n 阶行列式 D 中,每个元素均为两个数之和,则 D 可拆分成 2^n 个行列式之和,如二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c+z & d+w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ c+z & d+w \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b \\ z & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质6　将行列式D中某一行(列)的k倍加到另一行(列)去,则行列式的值不变.

证明:由性质 4 和性质 5 可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由行列式的定义可知,一个行列式中数字越简单,0 出现越多,一般情况下行列式的计算就会越简单.因而,对于一般行列式的计算,我们往往是先利用性质 6 对行列式进行化简后再计算,这样可大大减少计算量.

在上一节中,我们知道三角行列式的计算很简单,所以在这一节,我们一般先利用行列式性质把行列式化为三角行列式,再进行计算.在本书后面关于行列式的计算中,为了表示出变换的过程,我们把行列式对应于行的三种变换分别记为:$r_i \leftrightarrow r_j$(交换第 i 行与第j 行),kr_i(将第 i 行乘以k),r_i+kr_j(将第 j 行的k 倍加到第i 行).同理,我们用 $c_i \leftrightarrow c_j$,kc_i,c_i+kc_j 表示行列式列的三种变换.

例 1.3.1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解:$D \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-3r_1]{r_2-2r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$