

工程电磁场 专论

周克定 编著



工程电磁场专论

周克定 编著

西安交通大学出版社

西安交通大学出版社

西安交通大学出版社

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书介绍了电磁场数值计算方法的某些最新研究成果,包括加权余量法、边界单元法、网络场模型法及一些关于二维、三维涡流场的近期研究成果。

本书可作为高等院校电工类有关专业高年级学生或研究生的工程电磁场课程教材或教学参考书,亦可供电工方面的教师和科技人员参考。

工程电磁场专论

周克定 编著

责任编辑 李 德

华中工学院出版社出版

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所发行

华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 7.25 字数: 159,000

1986年7月第一版 1986年7月第一次印刷

印数: 1—5,000

统一书号: 15255—062 定价: 1.20 元

前 言

电磁场理论在工程上的应用范围日益广泛，准确地计算电磁场的分布与大小，一直是十分重要的课题，过去的经典方法已经感到很不够，十余年来随着电子计算机的普遍推广，有效而迅速地发展了电磁场数值计算方法。

编写本书的目的是介绍电磁场数值计算方法的某些最新研究成果，第一章着重介绍现代有关文献中常用的许多基本概念和术语名词，并且企图以散度源和旋度源为线索，对某些理论问题作综合性概括，第二章介绍了加权余量法的数学基础、用加权余量法建立差分方程及有限元离散化方程的推导过程，第三章介绍了边界单元法的基本理论及其在电磁场数值计算中的应用，第四章介绍了网络场模型法，网络场模型是一种直接离散模型，书中有用于计算场或连续域比较严密和完整的公式体系，第五章介绍了一些关于二维和三维涡流场的近期研究成果。

本书是根据1983年（北京）电磁场数值计算讲习班的部分讲稿，以及1983年、1984年两届研究生（硕士）和电工类专业助教进修班“工程电磁场”课程两次讲稿综合整理修改补充而成的。由于时间仓促，水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，敬请读者指正批评。

编著者

1985年8月于武汉

目 录

第一章 电磁场理论分析	1
§ 1.1 场与源, 麦克斯韦方程组	1
§ 1.2 不同媒质分界面的边界(交接)条件, 场矢量的突变	7
1. 电场	7
2. 磁场	7
3. 恒定电流场	7
§ 1.3 边界(约束)条件与源的等价性, 标量位的突变	12
§ 1.4 无界场的位函数展开, 多极子场	16
§ 1.5 电介质极化场的分析	25
§ 1.6 磁质磁化场的分析	27
§ 1.7 偶极矩场的直接表达式	38
§ 1.8 永磁体的磁场	41
§ 1.9 有界场的计算, 格林函数法和基本解	51
§ 1.10 矢格林公式及其应用	61
§ 1.11 电磁场的积分方程	65
§ 1.12 电磁场的规范变换	67
§ 1.13 场解的唯一性	72
1. 静电场	73
2. 静磁场	75
3. 已知散度和旋度的矢量场	77
4. 用坡印亭能量定理研究混合问题解的唯一性	78

§ 1.14	磁场非线性问题的处理	79
1.	采用近似解析式	80
2.	用复数磁导率和有效磁导率	81
3.	采用插值函数	85
4.	线性化方法	88
第二章	加权余量法	90
§ 2.1	加权余量法的数学基础	90
§ 2.2	用加权余量法建立差分方程	98
§ 2.3	用加权余量法建立电磁场有限元离散化方程	101
第三章	边界单元法	110
§ 3.1	电磁场边界单元分析法的基本理论	110
1.	边界积分方程及位的计算	110
2.	离散化方法	120
3.	非线性问题的处理	124
§ 3.2	恒定磁场和正弦稳态电磁场的计算	126
1.	采用非恒值单元的插值离散过程	127
2.	矩阵元素的确定	129
3.	边界及域内点 u 、 q 值的求解	132
4.	多媒质区域的离散化方程	134
5.	三维场的计算方法	137
6.	正弦稳态场的计算	147
7.	恒定磁场的计算实例	149
§ 3.3	有限元边界元混合法	152
第四章	网络场模型法	156
§ 4.1	网络场模型的构成	156
1.	场图的概念	156
2.	空间离散过程	158
§ 4.2	端点方程	161

1. 结构特性的端点表述·····	162
2. 傅里叶速度定律的端点表述·····	162
3. 边界条件的端点表述·····	164
§ 4.3 平衡方程式 (图方程) ·····	165
1. 节点方程组·····	165
2. 回路方程组·····	166
3. 割集方程组·····	171
§ 4.4 综合方程式 (场方程组) ·····	174
第五章 涡流场的数值分析 ·····	186
§ 5.1 三维非线性涡流场的基本方程和几种位函数·····	186
§ 5.2 非线性涡流方程的差分解法·····	193
§ 5.3 三维涡流问题的边界元分析·····	195
§ 5.4 用有限元边界元混合法分析涡流场·····	198
§ 5.5 用网络模型计算涡流·····	200
§ 5.6 瞬态涡流场的数值分析 (边界元解法) ·····	204
1. 初边值问题的积分方程·····	205
2. 离散化(数值化)过程·····	206
3. 计算实例·····	210

第一章 电磁场理论分析

§1.1 场与源, 麦克斯韦方程组

在电工领域中, 电磁场理论要研究的主要问题, 是场量 (位、通量、通量密度、场强、能量等) 与场源 (电荷与电流等) 的关系, 即在一定场源激励下, 分析源所产生的场的大小与分布情况; 或者, 根据对某种场的场量大小、分布的要求, 设计适当的场源。其次还要研究电磁场对电荷与电流产生的作用力, 以及电场与磁场的相互关系 (包括涡流问题)。此外, 在电场、磁场作用下, 电介质的极化和磁质的磁化问题, 也是电磁场理论要研究的内容。尤其是, 电极化体和磁化体常形成一种等效场源, 对电场、磁场产生反作用, 这些都增加了电场、磁场计算的复杂性。

电磁学中分析计算用的各种经典方法和现代数值方法, 无非是要解决上述几方面的问题。其中, 场量的计算, 是确定电磁器件参数、电机中电势与力矩的大小和能量损耗等性能指标的前提, 所以它是关键问题。

赫姆霍兹定理指出: 任何一个矢量场

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(x, y, z)$$

只要在有限区域 V' 中所有各点, $\mathbf{F}$ 的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = b(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

和旋度

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{c}(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

均为已知，则场 F 可以完全地确定。不同媒质相邻分界面上的边界条件（可能是突变面）也由场的散度和旋度唯一地决定。

因为由场的散度和旋度可以确定场，所以常常把它们也称为场的源，有时就称散度源（通量源函数）或旋度源（涡旋源函数）。散度和旋度有定值（包括零），不仅是决定场的充分条件，而且还是必要条件。只是有时场的散度恒为零，称为无散场（亦称无源场或管量场）；有时场的旋度恒为零，称为无旋场（亦称无涡场或势量场，简称位场）；如果场的散度和旋度都恒等于零，则称调和场；最一般的场，是其散度和旋度均不恒等于零。工程实际中遇到的电磁场，都属这四种类型。

无散场，散度恒为零。因为任意矢量场的旋度的散度恒等于零，故无散场必存在一矢量位 A ，即

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla \times F}{R} d\tau' = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{c(r')}{R} d\tau' \quad (1.3)$$

$$F = \nabla \times A \quad (\nabla \cdot F = 0) \quad (1.4)$$

式中， $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ， $\mathbf{r}$ 为场点矢径， $\mathbf{r}'$ 为源点矢径， $d\tau'$ 为源点的体积元（见图1.1）。

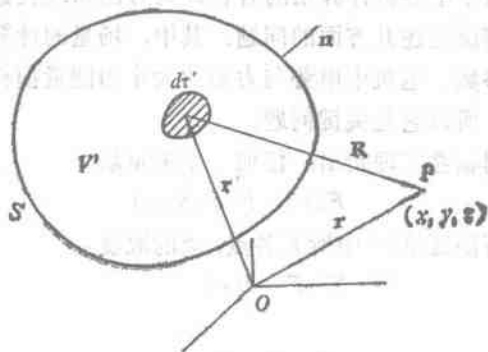


图1.1 计算 A 的坐标示意图

按式(1.3)及(1.4)可以定义矢量磁位, 在无静电荷区也可以定义矢量电位 (在实用中, 按另一种定义的矢量电位 $\mathbf{T}$, 以后另作介绍)。

无旋场, 旋度恒为零。因为任意标量场的梯度的旋度恒等于零, 故无旋场恒存在一标量位 u , 即

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{R} d\tau' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{b(\mathbf{r}')}{R} d\tau' \quad (1.5)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla u \quad (\nabla \times \mathbf{F} = 0) \quad (1.6)$$

在 ∇u 前加上负号是物理上的需要。按式(1.5)及(1.6)可以定义标量电位, 也可以定义标量磁位。

调和场, 散度和旋度都恒为零。例如无静电荷区域的静电场、电源以外区域的电流场和无电流区域的恒定磁场。由于旋度恒为零, 必存在标量位 u , 使场 $\mathbf{F} = -\nabla u$, 且因散度也恒为零, 故

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla \cdot \nabla u = -\nabla^2 u = 0 \quad (1.7)$$

所以调和场必存在标量位 u 满足拉普拉斯方程, 即 u 是调和函数。显然, 调和场的位函数 u 不能用式(1.5)的积分计算, 但可以用拉普拉斯方程求出。由复变函数理论可知, 平面调和场的位函数和通量函数都是调和函数, 并且处处正交, 因此构成复位函数。

在某些情形下, 矢量位 $\mathbf{A}$ 及其它场矢量 (如 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E}$ 等) 也可能满足拉普拉斯方程, 这时它们也都是调和函数。

散度和旋度都不恒等于零的场, 可以认为是无旋场和无散场的叠加, 因此同时存在标量位 u 及矢量位 $\mathbf{A}$, 场 $\mathbf{F}$ 便为 $-\nabla u$ 与 $\nabla \times \mathbf{A}$ 之和, 即

$$\mathbf{F} = -\nabla u + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.8)$$

实际上, 电磁场是一个整体, 是电场和磁场的叠加并相互作

用, 所以有时将它表示成一个张量, 比如由 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 组合, 即包含 ∇u 和 $\nabla \times \mathbf{A}$ 两项, 其中一项代表电场, 另一项则代表磁场。

描述电场和磁场各种不同矢量的相互关系, 是过去长时间研究的主要问题, 主要是从实验中找出场的规律和散度源与旋度源。麦克斯韦总结前人得到的基本定律和学说, 引入位移电流概念, 全面地完成了这一伟大任务, 提出定义电场、磁场散度和旋度的公式, 合称麦克斯韦方程组。在自由空间中, 用SI单位制, 方程组的瞬时值关系式是

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E}) \text{ 或 } \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ 或 } \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho \text{ 或 } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1.9)$$

式中,

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ 法/米}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ 亨/米}$$

分别称为自由空间的电容率和磁导率。其它各种物理量的代表符号都是习惯上通用的, 这里不再一一说明。以上四式源项的不对称性(1、3两式有源, 2、4两式无源), 反映了实验上不存在磁荷与磁流。

在物质中, 麦克斯韦方程组与式(1.9)有些不同。当电场和磁场作用在物质上时, 带电粒子将受到洛伦兹力的作用而产生位移或重新排列, 使电介质产生电极化效应, 或者是磁介质

(简称磁质)产生磁极化(简称磁化)效应。这两种效应(分别用电极化强度 $\mathbf{P}$ 和磁化强度 $\mathbf{M}$ 来计量)相当于额外的散度源和旋度源,它们迭加在原有场源上,对电场和磁场起作用。因此,场的定量关系必须用修改过的麦克斯韦方程组来描述。

根据 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 的定义(都是单位体积的偶极矩),可以导出电介质中因极化引起的净过量束缚电荷体密度 $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ (库仑/米³),以及由物质极化和磁化引起的对激发磁场起等效作用的两种体电流密度 $\mathbf{J}_b = \partial \mathbf{P} / \partial t$ 及 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ (关于 ρ_b 和 $\mathbf{J}_m$ 以后还要详细讨论)。把 $\mathbf{J}_b$ 和 $\mathbf{J}_m$ 对任一点合并后有一总电流密度,这时便可得到在物质区域中与方程组(1.9)的第一式相当的方程式:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

移项整理得:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})}{\partial t}$$

再把 ρ_b 与自由电荷体密度 ρ 相加,方程组(1.9)的第三式变成

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho + \rho_b = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

即

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

令

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.11)$$

于是得到物质中的麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

式中, $\mathbf{D}$ 为电位移, 有时称电感强度; 相应地, 把 $\mathbf{B}$ 称为磁感强度。

在某些场合, 需要应用积分形式的麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_v \rho d\tau \\ \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

麦克斯韦方程组是联系场与源的定量关系式, 是所有宏观电磁现象统一规律的数学描述。有时为了全面分析问题, 还必须引用电场和磁场对电荷与电流 (运动电荷) 产生的洛伦兹力的计算公式

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.14)$$

以及表达电荷守恒定律的连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.15)$$

§1.2 不同媒质分界面的边界(交接)

条件, 场矢量的突变

在求解某个电磁场时, 不同媒质的分界面上, 场解必需匹配, 使分界面的边界条件得到满足。已知分界面的边界条件($\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{t}$ 分别代表法向和切向的单位矢量)如下。

1. 电场

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 & \text{或 } E_{2t} - E_{1t} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s & \text{或 } D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \end{cases} \quad (1.16)$$

式中, ρ_s 为自由电荷面密度, 它的存在, 不致引起 E_t 的不连续。

2. 磁场

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 & \text{或 } B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s & \text{或 } H_{2t} - H_{1t} = J_s \end{cases} \quad (1.17)$$

式中, J_s 为面自由电流密度(或称电流线密度)它的方向与沿 H_{2t} 绕行的方向符合右手螺旋法则, 它的存在, 不致引起 B_n 的突变。

3. 恒定电流场

$$\begin{cases} E_{2t} - E_{1t} = 0 \\ J_{2n} - J_{1n} = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

式中, J 为体自由电流密度(即电流密度)。

以后进一步的研究还将得出这样的结论: 电偶极矩 τ 的梯度将引起 E_t 突变; 磁荷面密度 σ_m 引起 H_n 突变; 面分子电流密度 J_{ms} 引起 M_t 突变, 而磁偶矩层的存在和不均匀性则导致

B_t 、 B_n 和 B 以及矢量磁位 A 的不连续。

不难证明，面散度源可能引起场矢量法向分量的突变，面旋度源则可能引起场矢量切向分量的突变。先证明前者：

根据散度定理

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} d\tau = \int_V b(\mathbf{r}) d\tau \quad (1.19)$$

对于磁场， $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，在一般情况下， B 的法向分量不可能突变。对于电场，则有

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = b(\mathbf{r}) \quad (1.20)$$

设1、2两种媒质之间存在一个过渡层，其厚度为 h ，在过渡层内，电磁性能参数从 ϵ_1 、 μ_1 、 σ_1 连续变化到 ϵ_2 、 μ_2 、 σ_2 ，当过渡层厚度缩减到零时，参数值发生跳跃，即当 $h \rightarrow 0$ 时，

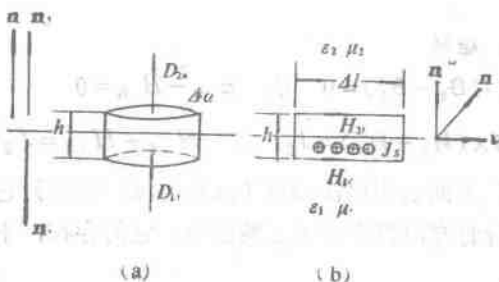


图1.2 不同媒质的分界面

(a)扁圆盒体积；(b)窄矩形面积

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} \times \mathbf{t}; \quad \mathbf{t} = \mathbf{n}' \times \mathbf{n}; \quad \mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}'$$

形成不连续的分界面。现在取 h 作为扁盒的高， ρ 为过渡层内自由电荷的体密度。按图1.2(a)所规定的法线方向，并根据(1.19)式和(1.20)式，可以求得 D 的面积分（因 $n_2 = n$ ， $n_1 = -n$ ）：

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = D_2 \cdot \Delta a_2 + D_1 \cdot \Delta a_1 = n \cdot (D_2 - D_1) \Delta a$$

$$= (D_{2n} - D_{1n}) \Delta a = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} d\tau = \rho h \Delta a \quad (1.21)$$

如果 ρ 为有限值, 随着 $h \rightarrow 0$, $\rho h \Delta a = \Delta q = 0$, 因而

$$D_{2n} = D_{1n} \quad (1.22)$$

但是, 当电荷层厚度减小时, 根据无限薄电荷层的极限概念, 总电荷量将保持不变。即当 $h \rightarrow 0$ 时, ρ 可不断增大, 使 ρh 趋于一定值, 定义它为自由电荷面密度, 用 ρ_s 表示, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\rho h) = \rho_s \quad (1.23)$$

将(1.23)式代回式(1.21), 消去面积 Δa , 得:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad (1.24)$$

即使 $\mathbf{D}$ 的法向分量发生突变, 用标量电位的梯度表示则为

$$\epsilon_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_2 - \epsilon_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_1 = -\rho_s \quad (1.25)$$

或

$$\epsilon_2 (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi)_2 - \epsilon_1 (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi)_1 = -\rho_s \quad (1.26)$$

例如, 在理想导体 ($\sigma_1 = \infty$) 表面, 如有自由电荷面密度 ρ_s , 则因 $\mathbf{E}_1 = 0$, $\mathbf{D}_1 = 0$, 所以

$$D_{2n} = \rho_s$$

在式(1.21)中, 把 $\mathbf{D}$ 换成任一矢量 $\mathbf{F}$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 可得一普遍公式:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h b) = \lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (1.27)$$

在分析中, 有时把(1.23)式的极限突变值称为面散度源, 用 $\text{div} \mathbf{D}$ 来表示:

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho_s \quad (1.28)$$

类似地, 可证明旋度源可能引起场矢量切向分量的突变。

根据斯托克斯定理:

$$\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{c}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} \quad (1.29)$$

先研究磁场。对于图1.2(b)中的矩形闭合曲线 l ，当 $h \rightarrow 0$ 时， $l = 2\Delta l$ ，因 $t_2 = t$ ， $t_1 = -t$ ，故有：

$$H_2 \cdot t_2 \Delta l + H_1 \cdot t_1 \Delta l = t \cdot (H_2 - H_1) \Delta l$$

$$\oint_S \mathbf{c}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} h \Delta l \quad (1.30)$$

其中 $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ，并取矩形面积的宽等于过渡层的厚度

度 h 。因为

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}' \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$

所以(1.30)式可作如下变换：

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot (H_2 - H_1) \Delta l &= \mathbf{n}' \times \mathbf{n} \cdot (H_2 - H_1) \Delta l \\ &= \mathbf{n}' \cdot [\mathbf{n} \times (H_2 - H_1)] \Delta l \\ &= \mathbf{n}' \cdot \mathbf{c} h \Delta l \end{aligned} \quad (1.31)$$

消去 Δl ，移项，得：

$$\mathbf{n}' \cdot [\mathbf{n} \times (H_2 - H_1) - \mathbf{c} h] = 0 \quad (1.32)$$

同样，令过渡层厚度缩减到零，上式可写成：

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (H_2 - H_1) &= \lim_{h \rightarrow 0} (h \mathbf{c}) = \lim_{h \rightarrow 0} [h (\nabla \times \mathbf{H})] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[h \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.33)$$

当 $h \rightarrow 0$ 时上式右边第二项的极限为零，因为 $\mathbf{D}$ 和它的时间导数总是有限值。如 $\mathbf{J}$ 也有限，则第一项极值亦为零，因而

$$\mathbf{n} \times (H_2 - H_1) = 0 \quad \text{或} \quad H_{2t} = H_{1t} \quad (1.34)$$

但是，若将电流区压缩成片（即电流片），当其厚度减小时，通过片层的总电流不变。当 $h \rightarrow 0$ ，即片层无限减薄时， $\mathbf{J}$ 无