杨丕文 著

四元数分析与偏微分方程

科学出版社
www.sciencep.com

四元数分析与偏微分方程

杨丕文　著

四川师范大学学术著作出版基金资助出版

科 学 出 版 社

北　京

内容简介

本书用四元数分析的方法讨论了一些椭圆型方程的边值问题，引入了可交换四元数空间，研究一些双曲型、混合型方程的边值问题，为数学物理方程中的一些常见的偏微分方程边值问题的研究，提供了一些有用的函数论工具。主要内容包括：四元数分析中的正则函数的一些函数论性质，四元数空间中的一些积分算子及其性质，用四元数分析的方法研究椭圆型、双曲型、混合型偏微分方程的各种边值问题以及 clifford 分析中的一些边值问题。

本书适合高等学校数学专业的大学生、研究生、教师及相关专业的科技工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

四元数分析与偏微分方程/杨丕文著. —北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-025592-1

Ⅰ. 四… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 偏微分方程 Ⅳ. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 166079 号

责任编辑：张扬 房 阳/责任校对：朱光光

责任印制：钱玉芬/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 9 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009 年 9 月第一次印刷 印张：13 1/4

印数：1—2 500 字数：257 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

四元数是爱尔兰数学家Hamilton于1843年发现的.这一发现于1866年发表在他的著名论文Elements of Quaternions中.四元数的发现是19世纪代数学最重大的事件之一,它推广了平面复数系结构.四元数是历史上第一次构造的不满足乘法交换律的数系,为通过减弱、放弃、替换普通代数中的不同定律和公理(如交换律、结合律等)提供了很好的范例.这对代数学的发展是革命性的,为众多代数系的研究开辟了一条新的道路.

在19世纪,Cauchy、Riemann、Weierstrass的工作奠定了复分析的基础.这一在复数域上建立起来的函数理论,在处理二维的物理学问题中发挥了极大的作用.将这一理论推广到更高维的空间,使其在物理学问题的研究中发挥更大的作用,就是一件很自然的事情了.1935年及其后的十多年中,R.Fueter开始了这一工作.他利用一个类似的Cauchy-Riemann方程,在四元数代数中引入了正则四元数函数的概念,证明了这一函数的类似Cauchy积分定理、Cauchy 积分公式、Laurent展式等,从而奠定了四元数分析的基础.他的一些主要工作及一些进一步的发展可参见Deavours[13]、Sudberg[32]、Cürlebeck、Spröbig[12]等的著作.而在其后的70年代,Delanghe等在更高维的Clifford代数中引入了正则函数的概念,使用类似于四元数分析的方法创立了Clifford分析,其主要工作见参考文献[8].这一研究领域得到了很多学者的关注,并在最近几十年得到极大的发展.四元数分析和Clifford分析作为高维空间的函数理论,已成为复分析的一个重要分支.在经典数学物理方程,如Maxwell方程、Yang-Mill场理论、光学、量子力学等研究领域都有重要应用.

20世纪50年代,L.Bers与N.H.Bekya用复分析和奇异积分方程的方法研究两个实变元的椭圆型方程,建立了系统的数学理论,他们分别把这种理论称为“准解析函数”与“广义解析函数”.这一研究领域在近十几年中得到了充分的发展,成为了研究两个实变元的椭圆型、双曲型、抛物型、混合型等类型的偏微分方程及其边值问题的一种重要方法.这一领域的一些主要工作可参见本书参考文献中所列Bers、Bekya及Gilbert、Wendland、Begehr、闻国椿等的著作.

如何在四元数分析和Clifford分析中引入广义解析函数的方法和理论,使之成

为研究高维的各种类型的偏微分方程的重要工具，是一些数学工作者关注的重要研究方向.作者也从事了这个方向的研究工作,本书的主要内容大多是作者近些年的研究成果.

本书共6章.第1章是四元数分析基础，主要讨论了四元数正则函数的一些重要的函数论性质,Cauchy型积分及其应用,非齐次方程$\partial_z u = f$的积分形式的弱解即T算子理论,高阶的n-正则函数与T_n算子理论.

第2章主要讨论了在不同区域内将四元数正则函数展开成Taylor级数和Laurent级数,以及由解析函数生成正则函数的问题.

第3章用四元数分析的方法,研究三维空间$\mathbb{R}^3$中的广义Cauchy-Riemann方程组即Moisil-Theodoresco 方程组，建立了这个方程组的解即三维正则函数的系统理论. 讨论了非齐次和高阶的情况,研究了其相关性质，并讨论了这几类方程的几种典型的边值问题.

第4章讨论了四元数函数一些边值问题,包括四元数正则函数与方程$\partial_z u = f$,n-正则函数与方程$\partial_z^n u = f$的Riemann边值问题及双圆柱区域P上的Dirichlet边值问题.

第5章引入了几种新的四元数空间,以其作为工具,讨论一些双曲复方程及其边值问题.而在本章的第5节,使用同样的方法,研究了$\mathbb{R}^3$中的两类一阶双曲偏微分方程的边值问题.

第6章引入一种新的矩阵形式的复Clifford代数,以其作为工具,类似于四元数分析的方法,讨论了高维空间的Cauchy-Riemann型方程,建立了相关函数理论.

本书的完成与作者的老师闻国椿教授多年来的悉心指导是分不开的,在此向他表示诚挚的感谢.

作　者

2009年6月

目　　录

第 1 章　四元数分析基础

本章是四元数分析基础.主要讨论了四元数正则函数的一些重要的函数论性质,Cauchy型积分及其应用,非齐次方程$\partial_z u = f$的积分形式的弱解即T算子理论,高阶的n-正则函数与T_n算子理论.

1.1　四元数代数

1.1.1　四元数及其运算

用$\mathbb{C}$和$\mathbb{R}$分别表示复数域和实数域.设$\mathbb{Q}$是一个以e,i,j和k为基元的四维实向量空间.其中，基元e是单位元, 而i,j,k满足关系:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -e, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

$\mathbb{Q}$中元

$$x = ex_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$$

称为实四元数,简称四元数.其中，x_1, x_2, x_3, x_4称为四元数x的实系数,单位元e通常也简记为1.记

$$\mathbb{Q} = \{x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 | x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

对任意$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \in \mathbb{Q}$, 我们称$x_1$为$x$的实部或数量部分,记为$\mathrm{Re}x = x_1$；称$ix_2 + jx_3 + kx_4$为$x$的虚部或向量部分, 记为$\mathrm{Im}\ x = ix_2 + jx_3 + kx_4$.

对于$\mathbb{Q}$中任两个四元数$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = x_1 + A$, $y = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4 = y_1 + B$(此处$A$=Im$x$, B=Imy)和$a \in \mathbb{R}$,由向量空间的加法与数乘,有

$$x + y = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2) + j(x_3 + y_3) + k(x_4 + y_4),$$

$$ax = ax_1 + iax_2 + jax_3 + kax_4.$$

两个四元数的乘积按分配律可推出

$$xy = (x_1 + A)(y_1 + B) = x_1y_1 - A \cdot B + x_1B + y_1A + A \times B,$$

其中，$A\cdot B$和$A\times B$分别表示三维向量A,B的数量积与向量积.

$$A\cdot B=x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4,$$

$$A\times B=i(x_3y_4-x_4y_3)+j(x_4y_2-x_2y_4)+k(x_2y_3-x_3y_2).$$

四元数的乘法不满足交换律, 一般情况下, $xy\neq yx$.

称

$$\overline{x}=x_1-ix_2-jx_3-kx_4$$

为x的共轭四元数. 称$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{\frac{1}{2}}$为$x$的模, 记为

$$|x|=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{\frac{1}{2}}.$$

直接由定义可推出下列一些结论.

定理1.1　设x,y和z是四元数,那么

1. $x\overline{x}=\overline{x}x=|x|^2,|x|=|\overline{x}|$.
2. $|\cdot|$是线性空间$\mathbb{Q}$上的范数,即
   $|x|=0$当且仅当$x=0$,
   $|xy|=|yx|=|x||y|$,
   $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.
3. $|x|^2+|y|^2=\dfrac{1}{2}(|x+y|^2+|x-y|^2)$.
4. 对任意复数c, $jc=\overline{c}j$或$jc\overline{j}=\overline{c}$.
5. $\overline{(xy)}=\overline{y}\,\overline{x}$.
6. $(xy)z=x(yz)$, 即四元数的乘法满足结合律.
7. $\overline{x}=x$当且仅当$x\in\mathbb{R}$.
8. $\forall x\in\mathbb{Q}$, $ax=xa$ 当且仅当$a\in\mathbb{R}$.
9. 若$x\neq0$, $\dfrac{\overline{x}}{|x|^2}$是$x$的逆元, 记为$x^{-1}$,有$|x^{-1}|=\dfrac{1}{|x|}$.
10. 每个四元数z可以唯一地被表示成$z=c_1+jc_2$, 此处c_1和c_2是复数.

由上述定理中的性质10,我们也将$\mathbb{Q}$中的元记作下列形式:

$$z=z_1+jz_2,$$

z_1,z_2都是复数, 即

$$\mathbb{Q}=\{z=z_1+jz_2|z_1,z_2\in\mathbb{C}\}.\tag{1}$$

而z的共轭

$$\overline{z}=\overline{z}_1-jz_2.$$

1.1.2 四元数的矩阵形式

记

$$e_0' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}' = \Bigg\{ x' &= x_1 e_0' + x_2 i' + x_3 j' + x_4 k' \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -(x_3 + ix_4) \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \Bigg| x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \Bigg\}.\end{aligned}$$

令

$$\mu : x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \longrightarrow x' = x_1 e_0 + x_2 i' + x_3 j' + x_4 k'.$$

易验证μ是由$\mathbb{Q}$到$\mathbb{Q}'$的一个一一映射，且保持前面的所有运算．故在这一意义之下，我们将x'看作四元数x的矩阵形式，即

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -(x_3 + ix_4) \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \Bigg| x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

对于矩阵形式的四元数

$$x = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -(x_3 + ix_4) \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix},$$

其共轭

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 + ix_2 \end{pmatrix},$$

其模

$$|x| = |x\overline{x}|^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} x_1 + ix_2 & -(x_3 + ix_4) \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}.$$

与(1)式对应,我们也记

$$\mathbb{Q} = \left\{ z = z_1 + jz_2 = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \Bigg| z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

而

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}$$

的共轭

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & \overline{z}_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix},$$

其模

$$|z| = |z_1 + jz_2| = \begin{vmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z_1} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2　四元数正则函数

1.2.1　正则函数的概念

设D是$\mathbb{R}^4$中的一个区域, 而$\mathbb{R}^4$中元记为$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$$U : D \to Q,$$

$$U = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4,$$

其中，$u_i(x_1, x_2, x_3, x_4), i = 1, 2, 3, 4$是定义在$D$上的四元实函数，则称$U$是定义在$D$上的四元数函数.

我们也将四元数函数看作$\mathbb{C}^2$空间到$\mathbb{Q}$的映射，即设G是$\mathbb{C}^2$中的一个区域,

$$F : G \to Q,$$

$$F(z_1, z_2) = f_1(z_1, z_2) + jf_2(z_1, z_2),$$

这里，$f_1(z_1, z_2)$和$f_2(z_1, z_2)$是定义在区域G上的复值函数. 记

$$f_1(z_1, z_2) = R(F(z_1, z_2)),$$

$$f_2(z_1, z_2) = I(F(z_1, z_2)).$$

定义微分算子

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + j\frac{\partial}{\partial x_3} + k\frac{\partial}{\partial x_4}, \tag{2}$$

其共轭算子

$$\partial_{\overline{x}} = \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} - j\frac{\partial}{\partial x_3} - k\frac{\partial}{\partial x_4}. \tag{3}$$

显然

$$\partial_x\partial_{\overline{x}} = \partial_{\overline{x}}\partial_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \Delta,$$

其中，Δ即四维空间中的Laplace算子.

若四元数函数$U(x) \in C^1(D)$, 且满足方程

$$\partial_x U = 0, \tag{4}$$

则称$U(x)$为D内的左正则函数. 而若四元数函数$U(x) \in C^1(D)$, 且满足方程

$$U\partial_x = 0, \tag{5}$$

则称$U(x)$为D内的右正则函数.左正则函数将被简称为正则函数.

方程(4)等价于下列的一阶椭圆型方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_4}{\partial x_4} = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_4} + \dfrac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_4} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_4} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

在文献[16,13,32,12]中, 研究了此类四元数正则函数. 而在本书中,大多数情况我们将采用下述正则函数的定义, 这样的定义更方便使用复分析的方法和建立与多复变之间的联系.

设$z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_4}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}-i\frac{\partial}{\partial x_4}\right).$$

定义

$$\partial_z=2\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}+j\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\right),\tag{6}$$

其共轭算子

$$\partial_{\overline{z}}=2\left(\frac{\partial}{\partial z_1}-j\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}\right),\tag{7}$$

同样，有

$$\partial_z\partial_{\overline{z}}=\partial_{\overline{z}}\partial_z=4\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial \overline{z}_1}+\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial \overline{z}_2}\right)=\Delta.$$

若四元数函数$F(z)\in C^1(G)$，且满足方程

$$\partial_z F=0,\tag{8}$$

则称$F(z)$是区域G内的左正则函数. 而若四元数函数$F(z)\in C^1(G)$，且满足方程

$$F\partial_z=0,\tag{9}$$

则称$F(z)$是区域G内的右正则函数.左正则函数将被简称为正则函数. 方程(8)的矩阵形式是

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_1} & -\dfrac{\partial}{\partial z_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_2} & \dfrac{\partial}{\partial z_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}=0.\tag{10}$$

在本书中, 除特别提到外, 均采用后一种定义.

方程(8)即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}+j\frac{\partial}{\partial x_3}-k\frac{\partial}{\partial x_4}\right)F=0,$$

上式与(4)式相比仅差一个负号, 故这两种定义之间并无本质的区别.

若$F(z)=f_1(z_1,z_2)$, 即$F(z)$是一复值函数, 且$F(z)$在G内正则时, 即有

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_2}=0,$$

在G内成立, 那么$F(z)$是G内的二元解析函数.

1.2.2 正则函数的Cauchy积分定理

设G是$\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$中的一个有界区域,其边界曲面$S$光滑或分片光滑. 若$U(z)$是定义在$G$上的一个四元数函数, $U(z)\in C(\overline{G})\cap C^1(G)$.

由散度公式可推出

$$\int_G \partial_z U \mathrm{d}\sigma=\int_S \Im U \mathrm{d}S, \tag{11}$$

此处

$$\begin{aligned}\Im &=\cos(\nu,x_1)+i\cos(\nu,x_2)+j\cos(\nu,x_3)-k\cos(\nu,x_4)\\ &=\cos\alpha_1+i\cos\alpha_2+j\cos\alpha_3-k\cos\alpha_4,\end{aligned}$$

其中，$\alpha_i=(\nu,x_i),i=1,2,3,4$表示曲面$S$的外法方向$\nu$与$x_i$轴之间的夹角.

由公式(11)即推出如下Cauchy积分定理.

定理1.2 若$U(z)$在$\mathbb{R}^4$空间中的一个开集E内正则, S是E内的一个光滑或分片光滑的闭曲面, S所成的区域$G\subset E$, 那么

$$\int_S \Im U \mathrm{d}S=0. \tag{12}$$

假设$n+1$个光滑或分片光滑闭曲面$S_0,S_1,\cdots,S_n$, 其中，$S_1,\cdots,S_n$中每一个都在其余各个的外部, 而它们又全都在S_0的内部. 在S_0的内部同时又在$S_1,\cdots,S_n$的外部的点集构成$\mathbb{R}^4$空间中的一个有界$n+1$连通区域G, 以$S_0,S_1,\cdots,S_n$为它的边界. 在这种情况下, 我们称区域G的边界是一个复围面.

$$S=S_0+S_1+\cdots+S_n,$$

其正指向作为区域G的边界的外法线方向.

对于复围面S, 公式(12)也是成立的. 我们仅以$n=1$的情况说明, 其余情况类似. 类似于单变中处理平面多连通区域的方法，即用一光滑曲面截区域G, 将其分成两单连通区域G_1,G_2, 则有

$$\int_S \Im U \mathrm{d}S=\int_{\partial G_1}\Im U \mathrm{d}S+\int_{\partial G_2}\Im U \mathrm{d}S=0.$$

1.2.3 正则函数的Cauchy积分公式

设$V(z)$也是G上的满足条件$V(z)\in C(\overline{G})\cap C^1(G)$的四元数函数, 那么由散度公式

$$\int_G\{[V\partial_z]U+V[\partial_z U]\}\mathrm{d}\sigma=\int_G\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(VU)+\frac{\partial}{\partial x_2}(ViU)+\frac{\partial}{\partial x_3}(VjU)-\frac{\partial}{\partial x_4}(VkU)\right\}=\int_S V\Im U\mathrm{d}S.$$

在等式

$$\int_G\{[V\partial_z]U+V[\partial_z U]\}\mathrm{d}\sigma=\int_S V\Im U\mathrm{d}S \tag{13}$$

中, 令$V(\zeta,z)=\partial_{\overline{z}}\dfrac{1}{r^2(\zeta,z)}$, 这里

$$r(\zeta,z)=|\zeta-z|=(|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_2-z_2|^2)^{\frac{1}{2}},$$

即$r(\zeta,z)$表示$\mathbb{C}^2$空间中两点$\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$和$z=(z_1,z_2)$之间的距离.

$$V(\zeta,z)=2\left(\frac{\partial}{\partial z_1}-j\frac{\partial}{\partial\overline{z}_2}\right)\frac{1}{r^2(\zeta,z)}=-2\frac{(\overline{z}_1-\overline{\zeta}_1)-j(z_2-\zeta_2)}{r^4(\zeta,z)}=2\frac{\overline{\zeta-z}}{|\zeta-z|^4}.$$

设ζ是区域G内的一个固定点, G_ε是以ζ为中心, ε为半径的内含于G的超球. 在区域$G\setminus G_\varepsilon$上利用公式(13)可得

$$\begin{aligned}\int_{G\setminus G_\varepsilon}\left[\partial_{\overline{z}}\frac{1}{r^2(\zeta,z)}\right][\partial_z U]\mathrm{d}\sigma&=\int_S\left[\partial_{\overline{z}}\frac{1}{r^2(\zeta,z)}\right]\Im U\mathrm{d}S-\int_{r(\zeta,z)=\varepsilon}\left[\partial_{\overline{z}}\frac{1}{r^2(\zeta,z)}\right]\Im U\mathrm{d}S\\&=I_S+I_\varepsilon,\end{aligned}\tag{14}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}I_\varepsilon&=2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r(\zeta,z)=\varepsilon}\frac{(\overline{z}_1-\overline{\zeta}_1)-j(z_2-\zeta_2)}{r^4(\zeta,z)}\cdot\frac{(z_1-\zeta_1)+j(z_2-\zeta_2)}{r(\zeta,z)}U(z)\mathrm{d}S\\&=2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r(\zeta,z)=\varepsilon}\frac{U(z)}{r^3(\zeta,z)}\mathrm{d}S=4\pi^2U(\zeta).\end{aligned}$$

在(14)式中, 令$\varepsilon\to 0$, 推得下列Pompeiu公式:

$$U(\zeta)=\frac{1}{4\pi^2}\left(-\int_S\left[\partial_{\overline{z}}\frac{1}{r^2(\zeta,z)}\right]\Im U\mathrm{d}S+\int_G\left[\partial_{\overline{z}}\frac{1}{r^2(\zeta,z)}\right][\partial_z U]\mathrm{d}\sigma\right). \tag{15}$$

利用Pompeiu公式, 可得下列正则函数的Cauchy积分公式.