

杨丕文 著

四元数分析与 偏微分方程



科学出版社

www.sciencep.com

四元数分析与偏微分方程

杨丕文 著

四川师范大学学术著作出版基金资助出版

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书用四元数分析的方法讨论了一些椭圆型方程的边值问题,引入了可交换四元数空间,研究一些双曲型、混合型方程的边值问题,为数学物理方程中的一些常见的偏微分方程边值问题的研究,提供了一些有用的函数论工具。主要内容包括:四元数分析中的正则函数的一些函数论性质,四元数空间中的一些积分算子及其性质,用四元数分析的方法研究椭圆型、双曲型、混合型偏微分方程的各种边值问题以及 clifford 分析中的一些边值问题。

本书适合高等学校数学专业的大学生、研究生、教师及相关专业的科技工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

四元数分析与偏微分方程/杨丕文著. —北京:科学出版社,2009
ISBN 978-7-03-025592-1

I. 四… II. 杨… III. 偏微分方程 IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 166079 号

责任编辑:张 扬 房 阳/责任校对:朱光光
责任印制:钱玉芬/封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

盛 业 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 9 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2009 年 9 月第一次印刷 印张:13 1/4

印数:1—2 500 字数:257 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

四元数是爱尔兰数学家Hamilton于1843年发现的.这一发现于1866年发表在他的著名论文Elements of Quaternions中.四元数的发现是19世纪代数学最重大的事件之一,它推广了平面复数系结构.四元数是历史上第一次构造的不满足乘法交换律的数系,为通过减弱、放弃、替换普通代数中的不同定律和公理(如交换律、结合律等)提供了很好的范例.这对代数学的发展是革命性的,为众多代数系的研究开辟了一条新的道路.

在19世纪,Cauchy、Riemann、Weierstrass的工作奠定了复分析的基础.这一在复数域上建立起来的函数理论,在处理二维的物理学问题中发挥了极大的作用.将这一理论推广到更高维的空间,使其在物理学问题的研究中发挥更大的作用,就是一件很自然的事情了.1935年及其后的十多年中,R.Fueter开始了这一工作.他利用一个类似的Cauchy-Riemann方程,在四元数代数中引入了正则四元数函数的概念,证明了这一函数的类似Cauchy积分定理、Cauchy积分公式、Laurent展式等,从而奠定了四元数分析的基础.他的一些主要工作及一些进一步的发展可参见Deavours[13]、Sudberg[32]、Cürlebeck、Spröbig[12]等的著作.而在其后的70年代,Delanghe等在更高维的Clifford代数中引入了正则函数的概念,使用类似于四元数分析的方法创立了Clifford分析,其主要工作见参考文献[8].这一研究领域得到了很多学者的关注,并在最近几十年得到极大的发展.四元数分析和Clifford分析作为高维空间的函数理论,已成为复分析的一个重要分支.在经典数学物理方程,如Maxwell方程、Yang-Mill场理论、光学、量子力学等研究领域都有重要应用.

20世纪50年代,L.Bers与N.H.Bekya用复分析和奇异积分方程的方法研究两个实变元的椭圆型方程,建立了系统的数学理论,他们分别把这种理论称为“准解析函数”与“广义解析函数”.这一研究领域在近十几年中得到了充分的发展,成为了研究两个实变元的椭圆型、双曲型、抛物型、混合型等类型的偏微分方程及其边值问题的一种重要方法.这一领域的一些主要工作可参见本书参考文献中所列Bers、Bekya及Gilbert、Wendland、Begehr、闻国椿等的著作.

如何在四元数分析和Clifford分析中引入广义解析函数的方法和理论,使之成

为研究高维的各种类型的偏微分方程的重要工具,是一些数学工作者关注的重要研究方向.作者也从事了这个方向的研究工作,本书的主要内容大多是作者近些年的研究成果.

本书共6章.第1章是四元数分析基础,主要讨论了四元数正则函数的一些重要的函数论性质,Cauchy型积分及其应用,非齐次方程 $\partial_z u = f$ 的积分形式的弱解即 T 算子理论,高阶的 n -正则函数与 T_n 算子理论.

第2章主要讨论了在不同区域内将四元数正则函数展开成Taylor级数和Laurent级数,以及由解析函数生成正则函数的问题.

第3章用四元数分析的方法,研究三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的广义Cauchy-Riemann方程组即Moisil-Theodoresco方程组,建立了这个方程组的解即三维正则函数的系统理论.讨论了非齐次和高阶的情况,研究了其相关性质,并讨论了这几类方程的几种典型的边值问题.

第4章讨论了四元数函数一些边值问题,包括四元数正则函数与方程 $\partial_z u = f$, n -正则函数与方程 $\partial_z^n u = f$ 的Riemann边值问题及双圆柱区域 P 上的Dirichlet边值问题.

第5章引入了几种新的四元数空间,以其作为工具,讨论一些双曲复方程及其边值问题.而在本章的第5节,使用同样的方法,研究了 $\mathbb{R}^3$ 中的两类一阶双曲偏微分方程的边值问题.

第6章引入一种新的矩阵形式的复Clifford代数,以其作为工具,类似于四元数分析的方法,讨论了高维空间的Cauchy-Riemann型方程,建立了相关函数理论.

本书的完成与作者的老师闻国椿教授多年来的悉心指导是分不开的,在此向他表示诚挚的感谢.

作 者

2009年6月

目 录

前言

第1章 四元数分析基础	1
1.1 四元数代数	1
1.1.1 四元数及其运算	1
1.1.2 四元数的矩阵形式	3
1.2 四元数正则函数	4
1.2.1 正则函数的概念	4
1.2.2 正则函数的Cauchy积分定理	7
1.2.3 正则函数的Cauchy积分公式	8
1.2.4 正则函数的Poisson公式与正则函数的无穷次可微性	10
1.2.5 正则函数的Liouville定理	11
1.2.6 正则函数与调和函数的关系	12
1.2.7 正则函数的唯一性定理	14
1.2.8 正则函数的最大模原理	14
1.2.9 Morera定理	16
1.2.10 正则函数列的Weierstrass定理	20
1.3 Cauchy型积分及其应用	22
1.3.1 Cauchy型积分的概念	22
1.3.2 Plemelj公式	22
1.3.3 超球与双圆柱区域上的二元解析函数的边界值	25
1.4 四元数空间中的 T_G 算子与方程 $\partial_z u = f$ 的分布解	30
1.4.1 T_G 算子的概念	30
1.4.2 T_G 属于 $L_p(1 \leq p < \frac{4}{3})$ 的性质	30
1.4.3 方程 $\partial_z u = f$ 的分布解	32
1.4.4 $T_G f$ 的Hölder连续性	35
1.5 n -正则函数与 T_n 算子	38
1.5.1 n -正则函数的Cauchy积分公式	39

1.5.2	n -正则函数与正则函数之间的关系	41
1.5.3	n -正则函数的Cauchy型积分	42
1.5.4	T_n 算子及其性质	45
1.6	单复变中某些相关结果	46
1.6.1	单复变中的 Tf 算子	46
1.6.2	单位圆上方程 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} w = f$ 的适合齐次边界条件的二重积分	48
1.6.3	适合非齐次边界条件的解析函数	50
1.6.4	单位圆上方程 $\frac{\partial}{\partial z} w = f$ 的Riemann-Hilbert边值问题	52
1.7	第1章的注记: 关于四元数分析与Clifford分析之间的关系	55
第2章	四元数分析中的级数	57
2.1	由解析函数生成正则函数	57
2.2	正则齐次多项式	61
2.3	四元数正则函数的Taylor展式	65
2.4	环形区域内正则函数的Laurent展式	71
2.4.1	正则函数的Laurent展式	71
2.4.2	正则函数的孤立奇点和留数定理	74
第3章	Moisil-Theodoresco型方程及其边值问题	77
3.1	正则向量函数	77
3.1.1	正则向量函数的定义	77
3.1.2	正则向量函数的Cauchy积分公式及其某些函数论性质	79
3.1.3	Cauchy型积分	81
3.2	$\tilde{T}f$ 算子与方程 $\partial u = f$ 的分布解	85
3.2.1	$\tilde{T}f$ 算子及其性质	85
3.2.2	$\tilde{T}f$ 算子的Hölder连续性	87
3.3	n -正则向量函数与 $\tilde{T}_n$ 算子	89
3.3.1	n -正则向量函数的定义及与正则向量函数的关系	89
3.3.2	n -正则向量函数的Cauchy积分公式	91
3.3.3	n -正则向量函数的Cauchy型积分	93
3.3.4	$\tilde{T}_n$ 算子与方程 $\partial^n u = f$ 的解	96
3.4	方程 $\partial F = f$ 的Riemann-Hilbert边值问题	97
3.4.1	问题RH的定义	97
3.4.2	正则向量函数的问题RH	97
3.4.3	非齐次方程 $\partial F = f$ 的问题RH	100
3.5	单位球上 n 阶方程 $\partial^n F = f$ 的Riemann-Hilbert边值问题	101

3.5.1	问题的定义	101
3.5.2	B_3 上 n -正则向量函数的问题RH和问题 D	102
3.5.3	B_3 上方程 $\partial^n F = f$ 的问题RH和问题 D	107
3.6	正则向量函数与方程 $\partial u = f$ 的Riemann边值问题	109
3.6.1	正则向量函数的问题 R 与问题 R'	110
3.6.2	非齐次方程 $\partial u = f$ 的Riemann边值问题	116
3.7	n -正则向量函数与方程 $\partial^n u = f$ 的Riemann边值问题	117
3.7.1	n -正则向量函数的问题 R 与问题 R'	118
3.7.2	方程 $\partial^n u = f$ 的问题 R 与问题 R'	121
第4章	四元数函数的一些边值问题	124
4.1	Riemann边值问题	124
4.1.1	四元数正则函数与 $\partial_z u = f$ 的Riemann边值问题	124
4.1.2	n -正则四元函数与方程 $\partial_z^n u = f$ 的Riemann边值问题	126
4.2	双圆柱区域 P 上四元数方程的Dirichlet边值问题	131
4.2.1	双圆柱区域上的非齐次Cauchy-Riemann方程的Dirichlet边值问题	131
4.2.2	双圆柱区域 P 上的四元数正则函数与方程 $\partial_z u = f$ 的Dirichlet问题	134
4.2.3	四元数 n -正则函数与方程 $\partial_z^n u = f$ 的Dirichlet边值问题	137
第5章	双曲型方程的四元数分析方法	140
5.1	双曲复方程的Riemann-Hilbert边界值问题	140
5.1.1	可交换四元数代数及其矩阵形式	140
5.1.2	$\mathbb{R}^3$ 中一个双曲复方程的问题RH的定义	141
5.1.3	一个二阶双曲复方程的边值问题	142
5.1.4	方程(2)的问题RH	144
5.1.5	非齐次方程 $Df = g$ 的问题RH	147
5.1.6	方程 $\left(i\frac{\partial}{\partial z_1} + j\frac{\partial}{\partial z_2}\right)(f_1 + kf_2) = 0$ 的问题RH	150
5.2	双曲复方程的特征边值问题	152
5.2.1	方程(42)的特征边值问题	153
5.2.2	拟线性方程(43)的特征边值问题	156
5.2.3	方程(44)的特征边值问题	157
5.2.4	最大模原理	159
5.3	某些一阶双曲方程组的初边值问题	160
5.3.1	关于方程 $\nabla \Psi = h$ 的广义解及 $\nabla \Psi = 0$ 的边值问题	162
5.3.2	方程 $Df = g$ 的问题E	167
5.4	Maxwell方程的一个初边值问题	169

5.4.1 关于方程 $(\frac{\partial}{\partial t}e_0 + \nabla)(\Psi + i\Phi) = 0$ 的初边值问题	169
5.4.2 Maxwell方程的初边值问题	175
5.5 $\mathbb{R}^3$ 中两类一阶双曲方程组的初边值问题	179
第6章 复Clifford分析	185
6.1 2^n 维的正则向量函数	185
6.1.1 2^n 维的正则向量函数的定义与Cauchy积分公式	185
6.1.2 Cauchy型积分及其应用	189
6.2 复Clifford分析中的 T 算子	191
6.3 复Clifford分析中 k -正则向量函数及非齐次 k 阶 Cauchy-Riemann型方程 $\mathcal{L}^k u = f$	194
6.3.1 k -正则向量函数	194
6.3.2 非齐次 k 阶方程 $\mathcal{L}^k u = f$ 的分布解	199
6.3.3 在单复变函数论中的应用	200
参考文献	202

第 1 章 四元数分析基础

本章是四元数分析基础.主要讨论了四元数正则函数的一些重要的函数论性质,Cauchy型积分及其应用,非齐次方程 $\partial_z u = f$ 的积分形式的弱解即 T 算子理论,高阶的 n -正则函数与 T_n 算子理论.

1.1 四元数代数

1.1.1 四元数及其运算

用 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示复数域和实数域.设 $\mathbb{Q}$ 是一个以 e, i, j 和 k 为基元的四维实向量空间.其中,基元 e 是单位元,而 i, j, k 满足关系:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -e, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

$\mathbb{Q}$ 中元

$$x = ex_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$$

称为实四元数,简称四元数.其中, x_1, x_2, x_3, x_4 称为四元数 x 的实系数,单位元 e 通常也简记为1.记

$$\mathbb{Q} = \{x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 | x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

对任意 $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \in \mathbb{Q}$, 我们称 x_1 为 x 的实部或数量部分,记为 $\text{Re}x = x_1$; 称 $ix_2 + jx_3 + kx_4$ 为 x 的虚部或向量部分, 记为 $\text{Im}x = ix_2 + jx_3 + kx_4$.

对于 $\mathbb{Q}$ 中任两个四元数 $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = x_1 + A$, $y = y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4 = y_1 + B$ (此处 $A = \text{Im}x$, $B = \text{Im}y$)和 $a \in \mathbb{R}$,由向量空间的加法与数乘,有

$$x + y = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2) + j(x_3 + y_3) + k(x_4 + y_4),$$

$$ax = ax_1 + ia x_2 + ja x_3 + ka x_4.$$

两个四元数的乘积按分配律可推出

$$xy = (x_1 + A)(y_1 + B) = x_1 y_1 - A \cdot B + x_1 B + y_1 A + A \times B,$$

其中, $A \cdot B$ 和 $A \times B$ 分别表示三维向量 A, B 的数量积与向量积.

$$A \cdot B = x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4,$$

$$A \times B = i(x_3 y_4 - x_4 y_3) + j(x_4 y_2 - x_2 y_4) + k(x_2 y_3 - x_3 y_2).$$

四元数的乘法不满足交换律, 一般情况下, $xy \neq yx$.

称

$$\bar{x} = x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4$$

为 x 的共轭四元数. 称 $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}$ 为 x 的模, 记为

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}.$$

直接由定义可推出下列一些结论.

定理 1.1 设 x, y 和 z 是四元数, 那么

$$1. x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2, |x| = |\bar{x}|.$$

2. $|\cdot|$ 是线性空间 $\mathbb{Q}$ 上的范数, 即

$$|x| = 0 \text{ 当且仅当 } x = 0,$$

$$|xy| = |yx| = |x||y|,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$3. |x|^2 + |y|^2 = \frac{1}{2}(|x + y|^2 + |x - y|^2).$$

4. 对任意复数 c , $jc = \bar{c}j$ 或 $jc\bar{j} = \bar{c}$.

$$5. \overline{(xy)} = \bar{y}\bar{x}.$$

6. $(xy)z = x(yz)$, 即四元数的乘法满足结合律.

7. $\bar{x} = x$ 当且仅当 $x \in \mathbb{R}$.

8. $\forall x \in \mathbb{Q}, ax = xa$ 当且仅当 $a \in \mathbb{R}$.

9. 若 $x \neq 0$, $\frac{\bar{x}}{|x|^2}$ 是 x 的逆元, 记为 x^{-1} , 有 $|x^{-1}| = \frac{1}{|x|}$.

10. 每个四元数 z 可以唯一地被表示成 $z = c_1 + jc_2$, 此处 c_1 和 c_2 是复数.

由上述定理中的性质 10, 我们也将 $\mathbb{Q}$ 中的元记作下列形式:

$$z = z_1 + jz_2,$$

z_1, z_2 都是复数, 即

$$\mathbb{Q} = \{z = z_1 + jz_2 | z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}. \quad (1)$$

而 z 的共轭

$$\bar{z} = \bar{z}_1 - jz_2.$$

1.1.2 四元数的矩阵形式

记

$$e'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}' &= \left\{ x' = x_1 e'_0 + x_2 i' + x_3 j' + x_4 k' \right. \\ &= \left. \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -(x_3 + ix_4) \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

令

$$\mu: x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \longrightarrow x' = x_1 e'_0 + x_2 i' + x_3 j' + x_4 k'.$$

易验证 μ 是由 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{Q}'$ 的一个一一映射, 且保持前面的所有运算. 故在这一意义之下, 我们将 x' 看作四元数 x 的矩阵形式, 即

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -(x_3 + ix_4) \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

对于矩阵形式的四元数

$$x = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -(x_3 + ix_4) \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix},$$

其共轭

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 + ix_2 \end{pmatrix},$$

其模

$$|x| = |x\bar{x}|^{\frac{1}{2}} = \left| \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -(x_3 + ix_4) \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \right|^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{\frac{1}{2}}.$$

与(1)式对应, 我们也记

$$\mathbb{Q} = \left\{ z = z_1 + jz_2 = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

而

$$z = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

的共轭

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix},$$

其模

$$|z| = |z_1 + jz_2| = \left| \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \right|^{\frac{1}{2}} = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 四元数正则函数

1.2.1 正则函数的概念

设 D 是 $\mathbb{R}^4$ 中的一个区域, 而 $\mathbb{R}^4$ 中元记为 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$$U : D \rightarrow Q,$$

$$U = u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4,$$

其中, $u_i(x_1, x_2, x_3, x_4), i = 1, 2, 3, 4$ 是定义在 D 上的四元实函数, 则称 U 是定义在 D 上的四元数函数.

我们也将四元数函数看作 $\mathbb{C}^2$ 空间到 Q 的映射, 即设 G 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个区域,

$$F : G \rightarrow Q,$$

$$F(z_1, z_2) = f_1(z_1, z_2) + jf_2(z_1, z_2),$$

这里, $f_1(z_1, z_2)$ 和 $f_2(z_1, z_2)$ 是定义在区域 G 上的复值函数. 记

$$f_1(z_1, z_2) = R(F(z_1, z_2)),$$

$$f_2(z_1, z_2) = I(F(z_1, z_2)).$$

定义微分算子

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} + j \frac{\partial}{\partial x_3} + k \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad (2)$$

其共轭算子

$$\partial_{\bar{x}} = \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} - j \frac{\partial}{\partial x_3} - k \frac{\partial}{\partial x_4}. \quad (3)$$

显然

$$\partial_x \partial_{\bar{x}} = \partial_{\bar{x}} \partial_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \Delta,$$

其中, Δ 即四维空间中的Laplace算子.

若四元数函数 $U(x) \in C^1(D)$, 且满足方程

$$\partial_x U = 0, \quad (4)$$

则称 $U(x)$ 为 D 内的左正则函数. 而若四元数函数 $U(x) \in C^1(D)$, 且满足方程

$$U \partial_x = 0, \quad (5)$$

则称 $U(x)$ 为 D 内的右正则函数. 左正则函数将被简称为正则函数.

方程(4)等价于下列的一阶椭圆型方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_4} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_4} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_4} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

在文献[16,13,32,12]中, 研究了此类四元数正则函数. 而在本书中, 大多数情况我们将采用下述正则函数的定义, 这样的定义更方便使用复分析的方法和建立与多复变之间的联系.

设 $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + i \frac{\partial}{\partial x_4} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i \frac{\partial}{\partial x_4} \right).$$

定义

$$\partial_z = 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right), \quad (6)$$

其共轭算子

$$\partial_{\bar{z}} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - j \frac{\partial}{\partial z_2} \right), \quad (7)$$

同样, 有

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \partial_z = 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \right) = \Delta.$$

若四元数函数 $F(z) \in C^1(G)$, 且满足方程

$$\partial_z F = 0, \quad (8)$$

则称 $F(z)$ 是区域 G 内的左正则函数. 而若四元数函数 $F(z) \in C^1(G)$, 且满足方程

$$F \partial_z = 0, \quad (9)$$

则称 $F(z)$ 是区域 G 内的右正则函数. 左正则函数将被简称为正则函数. 方程(8)的矩阵形式是

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} & -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} & \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

在本书中, 除特别提到外, 均采用后一种定义.

方程(8)即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} + j \frac{\partial}{\partial x_3} - k \frac{\partial}{\partial x_4} \right) F = 0,$$

上式与(4)式相比仅差一个负号, 故这两种定义之间并无本质的区别.

若 $F(z) = f_1(z_1, z_2)$, 即 $F(z)$ 是一复值函数, 且 $F(z)$ 在 G 内正则时, 即有

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_2} = 0,$$

在 G 内成立, 那么 $F(z)$ 是 G 内的二元解析函数.

1.2.2 正则函数的Cauchy积分定理

设 G 是 $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ 中的一个有界区域,其边界曲面 S 光滑或分片光滑. 若 $U(z)$ 是定义在 G 上的一个四元数函数, $U(z) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G)$.

由散度公式可推出

$$\int_G \partial_z U d\sigma = \int_S \Im U dS, \quad (11)$$

此处

$$\begin{aligned} \Im &= \cos(\nu, x_1) + i \cos(\nu, x_2) + j \cos(\nu, x_3) - k \cos(\nu, x_4) \\ &= \cos \alpha_1 + i \cos \alpha_2 + j \cos \alpha_3 - k \cos \alpha_4, \end{aligned}$$

其中, $\alpha_i = (\nu, x_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ 表示曲面 S 的外法方向 ν 与 x_i 轴之间的夹角.

由公式(11)即推出如下Cauchy积分定理.

定理1.2 若 $U(z)$ 在 $\mathbb{R}^4$ 空间中的一个开集 E 内正则, S 是 E 内的一个光滑或分片光滑的闭曲面, S 所成的区域 $G \subset E$, 那么

$$\int_S \Im U dS = 0. \quad (12)$$

假设 $n+1$ 个光滑或分片光滑闭曲面 $S_0, S_1, \dots, S_n$, 其中, $S_1, \dots, S_n$ 中每一个都在其余各个的外部, 而它们又全都在 S_0 的内部. 在 S_0 的内部同时又在 $S_1, \dots, S_n$ 的外部的点集构成 $\mathbb{R}^4$ 空间中的一个有界 $n+1$ 连通区域 G , 以 $S_0, S_1, \dots, S_n$ 为它的边界. 在这种情况下, 我们称区域 G 的边界是一个复围面.

$$S = S_0 + S_1 + \dots + S_n,$$

其正指向作为区域 G 的边界的外法线方向.

对于复围面 S , 公式(12)也是成立的. 我们仅以 $n=1$ 的情况说明, 其余情况类似. 类似于单变中处理平面多连通区域的方法, 即用一光滑曲面截区域 G , 将其分成两单连通区域 G_1, G_2 , 则有

$$\int_S \Im U dS = \int_{\partial G_1} \Im U dS + \int_{\partial G_2} \Im U dS = 0.$$

1.2.3 正则函数的Cauchy积分公式

设 $V(z)$ 也是 G 上的满足条件 $V(z) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G)$ 的四元数函数, 那么由散度公式

$$\int_G \{[V\partial_z]U + V[\partial_z U]\}d\sigma = \int_G \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(VU) + \frac{\partial}{\partial x_2}(ViU) + \frac{\partial}{\partial x_3}(VjU) - \frac{\partial}{\partial x_4}(VkU) \right\} = \int_S V\Im U dS.$$

在等式

$$\int_G \{[V\partial_z]U + V[\partial_z U]\}d\sigma = \int_S V\Im U dS \quad (13)$$

中, 令 $V(\zeta, z) = \partial_{\bar{z}} \frac{1}{r^2(\zeta, z)}$, 这里

$$r(\zeta, z) = |\zeta - z| = (|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_2 - z_2|^2)^{\frac{1}{2}},$$

即 $r(\zeta, z)$ 表示 $\mathbb{C}^2$ 空间中两点 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ 和 $z = (z_1, z_2)$ 之间的距离.

$$V(\zeta, z) = 2 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right) \frac{1}{r^2(\zeta, z)} = -2 \frac{(\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) - j(z_2 - \zeta_2)}{r^4(\zeta, z)} = 2 \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|^4}.$$

设 ζ 是区域 G 内的一个固定点, G_ε 是以 ζ 为中心, ε 为半径的内含于 G 的超球. 在区域 $G \setminus G_\varepsilon$ 上利用公式(13)可得

$$\begin{aligned} \int_{G \setminus G_\varepsilon} \left[\partial_{\bar{z}} \frac{1}{r^2(\zeta, z)} \right] [\partial_z U] d\sigma &= \int_S \left[\partial_{\bar{z}} \frac{1}{r^2(\zeta, z)} \right] \Im U dS - \int_{r(\zeta, z)=\varepsilon} \left[\partial_{\bar{z}} \frac{1}{r^2(\zeta, z)} \right] \Im U dS \\ &= I_S + I_\varepsilon, \end{aligned} \quad (14)$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r(\zeta, z)=\varepsilon} \frac{(\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) - j(z_2 - \zeta_2)}{r^4(\zeta, z)} \cdot \frac{(z_1 - \zeta_1) + j(z_2 - \zeta_2)}{r(\zeta, z)} U(z) dS \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{r(\zeta, z)=\varepsilon} \frac{U(z)}{r^3(\zeta, z)} dS = 4\pi^2 U(\zeta). \end{aligned}$$

在(14)式中, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 推得下列Pompeiu公式:

$$U(\zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \left(- \int_S \left[\partial_{\bar{z}} \frac{1}{r^2(\zeta, z)} \right] \Im U dS + \int_G \left[\partial_{\bar{z}} \frac{1}{r^2(\zeta, z)} \right] [\partial_z U] d\sigma \right). \quad (15)$$

利用Pompeiu公式, 可得下列正则函数的Cauchy积分公式.