高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark® 星火

数学分析

同步辅导及习题精解

（上册 华东师大·第三版）

张天德 韩振来 主编

联系考研，渗透精讲历年考研真题

- 知识图表 清晰梳理考点重点难点
- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 快速升华应用应试能力

天津科学技术出版社

数学分析

同步辅导及习题精解

（上册 华东师大·第三版）

主　编　张天德　韩振来
副主编　徐化忠　孙凤庆

天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析同步辅导及习题精解. 上册/张天德，韩振来主编. —天津：天津科学技术出版社，2009.6

ISBN 978-7-5308-5193-7

Ⅰ. 数… Ⅱ.①张…②韩… Ⅲ.数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第114656号

责任编辑:刘丽燕
责任印制:白彦生

天津科学技术出版社出版
出版人:胡振泰
天津市西康路35号　邮编300051
电话(022)23332398(事业部)　23332697(发行)
网址:www.tjkjcbs.com.cn
新华书店经销
莱州市电光印刷有限公司印刷

开本787×960　1/16　印张40　字数830 000
2009年7月第1版第1次印刷
定价:39.60元(全套两册)

前言

《数学分析》是数学专业最重要的一门基础课，也是报考数学类专业硕士研究生的专业考试科目。华东师范大学数学系主编的《数学分析》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用，也是许多学校硕士研究生入学考试的指定教材。华东师范大学数学系主编的《数学分析》(第三版)保持了其一贯的体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点，并根据近代数学发展的潮流，做了相应的调整。该教材保持了原来的优点、特色，进一步强调提高学生的综合素质并激发学生的创新能力。为帮助、指导广大读者学好这门课程，我们编写了这本与华东师范大学数学系主编的《数学分析》(第三版)配套的《数学分析同步辅导及习题精解》，以帮助加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，进而提高学习能力和数学思维水平。

本书共分二十三章，其中上册十一章，下册十二章。章节的划分与教材一致。每章包括五大部分内容：

一、知识结构及内容小结：先用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容；然后用表格形式简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统的梳理，并指出理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、经典例题解析：精选部分反映各章基本知识点和基本方法的典型例题——其中部分例题选自历年考研真题，给出了详细解答，以提高读者的综合解题能力。

三、历年考研真题评析：节选全国众多知名高校的研究生入学考试真题，做了精心深入的解答。

四、教材习题全解：对教材里该章节全部习题作详细解答，与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

五、同步自测题及参考答案：精选有代表性、测试价值高的题目(有些题目选自历年考研真题)，以检测学习效果，提高应试水平。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色。

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到

的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、互动：所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研例题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、浑然一体，一举完成。

三、联系考研密切、实用：本书既是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目　录

第一章 实数集与函数

本章知识结构及内容小结

【本章知识结构】

- 实数集与函数
  - 实数集
    - 实数
      - 实数及其性质
      - 绝对值与不等式
    - 数集确界原理
      - 区间与邻域
      - 有界集
      - 确界原理
  - 函数
    - 函数概念
      - 函数的定义
      - 函数的表示法
      - 函数的四则运算
      - 复合函数
      - 反函数
      - 初等函数
    - 函数性质
      - 有界性
      - 单调性
      - 奇偶性
      - 周期性

【知识要点与考点】

1. 实数概述

名　称	内　容
实数定义	凡能写成无限十进小数形式的数叫做实数.若它是有限的或无限循环的,则为有理数(可表示为形如$\dfrac{p}{q}$,p、q为整数且$q\neq 0$),若它是无限不循环的,则为无理数.
实数性质	1° 实数对加、减、乘、除(除数不得为0)四则运算是封闭的. 2° 实数是有序的. 3° 实数大小关系具有传递性. 4° 实数全体具有稠密性.即任意两个不相等的实数之间必有另一个实数,且既有有理数又有无理数. 5° 实数具有阿基米德性,即对任意两个实数a与b,且$b>a>0$,必存在正整数N,使得$Na>b$. 6° 全体实数与数轴上的点具有一一对应的关系.
绝对值	实数a的绝对值定义为$\lvert a\rvert=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$ 从数轴上看,$\lvert a\rvert$是点a到原点O的距离.
绝对值性质	1° $\lvert a\rvert=\lvert -a\rvert\geqslant 0$,当且仅当$a=0$时,$\lvert a\rvert=0$. 2° $-\lvert a\rvert\leqslant a\leqslant\lvert a\rvert$,当且仅当$a=0$时,等式成立. 3° $\lvert a\rvert<h\Leftrightarrow -h<a<h$;$\lvert a\rvert\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h$. 4° $\forall a$、$b\in\mathbf{R}$,有$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\leqslant\lvert a\pm b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$.(三角形不等式) 5° $\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\lvert b\rvert$. 6° $\left\lvert\dfrac{a}{b}\right\rvert=\dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}(b\neq 0)$.
区间与邻域	$(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$称为开区间; $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$称为闭区间; 类似地可定义$(a,+\infty)$、$[a,+\infty]$、$(-\infty,a)$、$(-\infty,a)$、$(a,b]$、$[a,b)$等等,一般地$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$. $U(a,\delta)=\{x\mid\lvert x-a\rvert<\delta,x\in\mathbf{R}\}$称为点$a$的$\delta$邻域; $U^{o}(a,\delta)=\{x\mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta,x\in\mathbf{R}\}$称为点$a$的空心$\delta$邻域; $U_{+}(a,\delta)=\{x\mid 0\leqslant x-a<\delta_1,x\in\mathbf{R}\}$称为点$a$的$\delta$右邻域; $U_{-}(a,\delta)=\{x\mid-\delta<x-a\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$称为点$a$的$\delta$左邻域; $\forall M>0,U(+\infty,M)=\{x\mid M<x<+\infty,x\in\mathbf{R}\}$称为$+\infty$的$M$邻域,简记为$U(+\infty)$; $U(-\infty,M)=\{x\mid-\infty<x<-M,x\in\mathbf{R}\}$称为$-\infty$的$M$邻域,简记为$U(-\infty)$.

2. 有界集、确界原理

名　称	内　容	说　明
有界集定义	设S为$\mathbf{R}$中的一个数集，若$\exists M(L)$，使得对$\forall x \in S$，都有$x \leqslant M(x \geqslant L)$，则称$S$为有上(下)界的数集，数$M(L)$称为$S$的一个上(下)界．若数集$S$既有上界又有下界，则称$S$为有界集，否则称为无界集．	S没有上(下)界可以表述为：$\forall M(L)>0$，都$\exists x_0 \in S$，使得$x_0>M(x_0<L)$．
上确界定义	对于给定数集S，若数η满足下述条件： (ⅰ)对$\forall x \in S$，有$x \leqslant \eta$(即η是S的上界)； (ⅱ)对$\forall \varepsilon>0$，必$\exists x_0 \in S$，使得$x_0>\eta-\varepsilon$(即η是S的最小上界)，则称数η为数集S的上确界，记作$\eta=\sup S$或$\eta=\sup\limits_{x \in S}\{x\}$．	(ⅱ)也可以表述为：对$\forall \alpha<\eta$，$\exists x_0 \in S$，使得$x_0>\alpha$，即小于η的都不是S的上界，也即η是S的最小上界．
下确界定义	对于给定数集S，若数ξ满足下述条件： (ⅰ)对$\forall x \in S$，有$x \geqslant \xi$(即ξ是S的下界)； (ⅱ)对$\forall \varepsilon>0$，必$\exists x_0 \in S$，使得$x_0<\xi+\varepsilon$(即ξ是S的最大下界)，则称数ξ为数集S的下确界，记作$\xi=\inf S$或$\xi=\inf\limits_{x \in S}\{x\}$．	同上确界一样，(ⅱ)也可以表述为：对$\forall \beta>\xi$，$\exists x_0 \in S$，使得$x_0<\beta$，即大于ξ的都不是S的下界，也即ξ是S的最大下界．
确界原理	(确界原理)非空有上(下)界数集必有上(下)确界． (推广的确界原理)任一非空数集必有正常上(下)确界或非正常上(下)确界．	推广的确界原理指的是把$+\infty$和$-\infty$补充到实数集中，看做数集的非正常上下确界．这种思想以后还要用到，如单调有界定理等．

3. 函数

名　称	内　容	说　明
函数的定义	设$D \neq \varnothing$，$D \subset R$(即D是实数集$\mathbf{R}$的非空子集)，若对$\forall x \in D$，按照对应法则f，有唯一确定的$y \in \mathbf{R}$与之对应，则称f为定义在D上的函数，记为 $f: D \to \mathbf{R}(x \to y=f(x))$． 数集$D$称为函数$f$的定义域，$y$称为$x$所对应的函数值，记为$y=f(x)$，函数值的集合称为$f$的值域，记为$f(D)$．即 $f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\} \subset \mathbf{R}$．	1° 定义域D和对应法则f为函数的两个主要内容．在数学分析中，所谓两个函数相同，是指它们的定义域和对应法则分别相同，两者缺一不可． 2° 函数“$f: D \to \mathbf{R}$”中D到的对应只能是单值的．
函数的表示方法	解析法、列表法、图象法	在数学分析中，侧重解析法．

4. 反函数

名　称	内　容	说　明
反函数定义	设函数 $y=f(x),x\in D,y\in f(D)$. 若 $\forall y_0\in f(D)$,在 D 中有唯一确定的 x_0,使得 $y_0=f(x_0)$,则在 $f(D)$ 上确定一个函数,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $f^{-1}:f(D)\rightarrow D$ 或 $x=f^{-1}(y),y\in f(D)$.	1° 若 $y=f(x),x\in D$ 存在反函数 $f=f^{-1}(y),y\in f(D)$,则 D 与 $f(D)$ 之间是一一对应,即 $\forall x_1,x_2\in D$,且 $x_1\neq x_2$,则必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 2° 若 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数,则 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 反函数. 而反函数的定义域与值域分别是直接函数的值域与定义域. 因此有 $f^{-1}[f(x)]=x,x\in D$; $f[f^{-1}(y)]=y,y\in f(D)$.

5. 复合函数

名　称	内　容
复合函数定义	设 $y=f(u),u\in D;u=\varphi(x),x\in E$. 若 $E^*=\{x\mid\varphi(x)\in D,x\in E\}\neq\varnothing$,则在 E^* 上确定了一个由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 经过复合运算所得到的复合函数,记作 $y=f(\varphi(x)),x\in E^*$,其中 $y=f(u)$ 称为外函数,$u=\varphi(x)$ 称为内函数,u 称为中间变量.

6. 初等函数

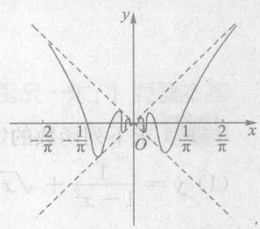
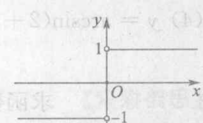
名　称	内　容
基本初等函数	常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.
初等函数	由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算步骤所得到的函数称为初等函数.

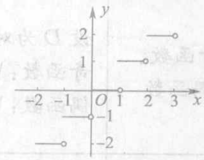
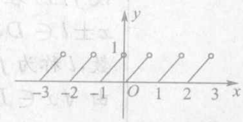
7. 几种特殊类型的函数

名　称	内　容	说　明
有界函数	若 $\exists$ 常数 k,对 $\forall x\in D$,有 $f(x)\leqslant k(f(x)\geqslant k)$,则称 $f(x)$ 在 D 上有上(下)界,k 称为 $f(x)$ 的上(下)界. 若 $\forall x\in D$,总有 $\mid f(x)\mid\leqslant M(M>0)$,则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数.	1° 称函数 $f(x)$ 有界时,必须指明在哪个区间上. 2° 有界函数指既有上界又有下界.
单调函数	$\forall x_1、x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$. 若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2))$,则称 $f(x)$ 在 D 上单调递增(递减);若 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$,则称 $f(x)$ 在 D 上严格单调递增(递减). 单调递增(递减)函数,统称为单调函数. 而严格递增(递减)函数统称为严格单调函数.	说函数 $f(x)$ 单调时,必须指明函数所在的区间.

名　称	内　容	说　明
奇函数、偶函数	设 D 为对称于原点的数集. 奇函数：$\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$. 偶函数：$\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$.	称函数 $f(x)$ 是奇(偶)函数时，其区间必须是关于原点对称.
周期函数	设 $f(x)$ 在 D 上有定义，若 $\exists l>0$，对 $\forall x\in D$，且 $x\pm l\in D$，有 $f(x\pm l)=f(x)$，称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 由 $\forall x\in D$，且 $x\pm l\in D$ 表明，$\forall n\in N$，有 $x\pm 2l\in D,x\pm 3l\in D,\cdots,x\pm nl\in D,\cdots$ 即数集 D 既无上界也无下界. 若 $l>0$ 是 $f(x)$ 的周期，则 nl 也是它的周期. 若函数 $f(x)$ 有最小正周期，则称这个最小正周期为 $f(x)$ 的基本周期，通常所说的函数的周期即是指基本周期.	1° 存在没有最小正周期的非常值的周期函数. 2° 两个周期函数的和或积未必是周期函数. 只有当两个周期的商为正有理数时，它们的和或积才是周期函数.

8. 几种常见的特殊函数

名　称	内　容	说　明
振荡函数	$y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$	
符号函数	$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$	
狄利克雷(Dirichlet)函数	$y=\begin{cases} 1, \text{当 } x \text{ 为有理数} \\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$	
黎曼(Riemann)函数	$y=\begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\,(p、q \text{ 为正整数}, \dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数}) \\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 及无理数} \end{cases}$	

名称	内容	说明
整数部分函数	$\forall x \in \mathbf{R}$,对应的 y 是不超过 x 的最大整数,记作 $y=[x]$.	
小数部分函数	$y=x-[x], x \in \mathbf{R}$	

9. 重点、难点与考点

重点	函数的有关基本知识
难点	确界的定义和确界原理
考点	函数的有关概念、上、下确界

经典例题解析

基本题型 Ⅰ:求一元函数的定义域

例1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$; (2) $y=\lg[\cos(\lg x)]$; (3) $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$;

(4) $y=\arcsin(2+3^x)$; (5) $y=(2x)!$; (6) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x<0;\\ x, & 0<x<1;\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

【思路探索】 求函数的定义域,在不和具体问题结合的情况下,就是求使式子有意义的一切实数值,即存在域.通常需考虑如下几点:① 分母不得为零;② 偶次根号下的式子非负;③ 对数号后的真数为正;④ 正(余)切函数符号后的值不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\pi)(k=0,\pm1,\cdots)$;⑤ 反正、余弦符号后的值不大于1;⑥ 若函数由几项组成,取各项定义域的交集;⑦ 分段函数取各段定义域的并.

解:(1) 欲使 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 有意义,必须满足不等式组 $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq\pm1\\ x\geqslant -2\end{cases}$,因此,所求函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 当 $\cos(\lg x)>0$ 即 $\left(2k-\dfrac{1}{2}\right)\pi<\lg x<\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi,(k=0,\pm1,\cdots)$ 时,函数有意义,所以原函数的定义域为 $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}<x<10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}(k=0,\pm1,\cdots)$.

(3) 由于 $\sin^2\pi x\geqslant 0$,所以仅当 $\sin\pi x=0$ 时原函数才有意义,所以函数的定义域为 $x=k,(k=$

$0,\pm 1,\cdots$).

(4) 由于 $3^x>0$,即 $2+3^x>2$,不满足 $-1\leqslant 2+3^x\leqslant 1$,因此,原函数不存在定义域,即无意义.

(5) 由于 $2x=n$,因而函数的定义域为 $x=\frac{n}{2}(n=0,1,2,\cdots)$,即 $x=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\cdots,\frac{n}{2},\cdots(n=0,1,2,3,\cdots)$.

(6) 由于函数为分段表示的函数,所以定义为 $(-\infty,0)\cup(0,2]$.

例2 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,问(1) $f(x^2)$;(2) $f(\sin x)$;(3) $f(x+a)+f(x-a)$,$(a>0)$ 的定义域是什么?

【思路探索】 利用函数的定义.

解:(1) $\because 0\leqslant x^2\leqslant 1,\therefore -1\leqslant x\leqslant 1$,因此定义域为 $[-1,1]$.

(2) $\because 0\leqslant \sin x\leqslant 1,\therefore 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,(k=0,\pm 1,\cdots)$. 因此,函数的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$,(k 为整数).

(3) $\because\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1;\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$ (∗)

注意到 $a>0$,只能有两种情形:(ⅰ) 当 $1-a<a$ 时,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,(∗)无解,即定义域不存在;(ⅱ) 当 $a\leqslant 1-a$ 时,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,(∗)的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$,因此,定义域为 $[a,1-a]$.

基本题型 Ⅱ:相同函数的判定

例3 下列各题中,函数 $f(x),g(x)$ 是否相同?为什么?在哪一区间内它们是相同的?

(1) $f(x)=\frac{x}{x},\quad g(x)=1$; (2) $f(x)=x,\quad g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\lg x^2,\quad g(x)=2\lg x$; (4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},\quad g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(5) $f(x)=|x|,\quad g(x)=(\sqrt{x})^2$.

【思路探索】 我们说两个函数相同,是指两个函数同时满足:(ⅰ) 定义域相同;(ⅱ) 对应法则相同. 否则,就不相同.

解:(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,因而两函数不相同. 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上则两函数相同.

(2) 虽然 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,但由于对应法则不同,因而值域也不同,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同. 但在 $[0,+\infty)$ 上是相同的.

(3) $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,因而不相同. 但在 $(0,+\infty)$ 上是相同的.

(4) 相同. 因为它们同时满足思路探索中的两个条件.

(5) $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$,因而不相同. 但在 $[0,+\infty)$ 上是相同的.

基本题型 Ⅲ:判断函数的奇偶性

例4 试判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$; (2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $f(x)=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1},(a>0)$; (4) $f(x)=x^3+\cos x$.

【思路探索】 利用奇偶性定义.

解:(1) $f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$,

$\therefore f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

(2) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$,

$\therefore f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

(3) $f(-x)=(-x)\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{(-x)a^x(a^{-x}-1)}{a^x(a^{-x}+1)}=(-x)\frac{1-a^x}{1+a^x}=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}=f(x)$,

$\therefore f(x)=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 为偶函数.

(4) $f(-x)=(-x)^3+\cos(-x)=-x^3+\cos x$,

即 $f(-x)$ 既不等于 $f(x)$,又不等于 $-f(x)$,$\therefore f(x)=x^3+\cos x$ 是非奇非偶函数.

基本题型 Ⅳ:一元函数周期性的讨论

例 5 判断下列函数是否是周期函数?若是,求其周期:

(1) $f(x)=\sin^2 x$; (2) $f(x)=\sin x^2$;

(3) $f(x)=\arctan(\tan x)$; (4) $f(x)=\sin x+\sin(\sqrt{2}x)$.

【思路探索】 利用周期函数的定义.

(1) 解法 1:$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$,而 $\cos 2x$ 的周期 $T'=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$,$\therefore f(x)=\sin^2 x$ 的周期 $T=T'=\pi$.

解法 2:设周期为 T,则有 $\sin^2(x+T)-\sin^2 x=0$,而 $\sin^2(x+T)-\sin^2 x=[\sin(x+T)+\sin x]\cdot[\sin(x+T)-\sin x]=4\sin\frac{2x+T}{2}\cos\frac{T}{2}\cdot\cos\frac{2x+T}{2}\sin\frac{T}{2}=\sin(2x+T)\sin T=0$,于是有 $\sin(2x+T)=0$ 或 $\sin T=0$,由 $\sin T=0$ 得 $T=\pi$,而当 $T=\pi$ 时,$\sin(x+T)=\sin x$,因此,函数 $f(x)=\sin^2 x$ 是周期函数,其周期为 $T=\pi$.

(2) 不是周期函数. 因若存在 T,使

$\sin(x+T)^2=\sin(x^2+2Tx+T^2)=\sin x^2$,只有当 $T=0$ 才可以.

(3) $\because \tan x$ 的周期 $T=\frac{\pi}{\omega}=\pi$,$\therefore f(x)=\arctan(\tan x)$ 为周期函数,其周期 $T=\pi$.

(4) $\because \sin x$ 的周期 $T_1=2\pi$,$\sin(\sqrt{2}x)$ 的周期 $T=\sqrt{2}\pi$. 而 2π 与 $\sqrt{2}\pi$ 无最小公倍数,故 $f(x)=\sin x+\sin(\sqrt{2}x)$ 不是周期函数.

例 6 证明:任何正有理数 r 都是狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 的周期.

【思路探索】 利用周期函数的定义.

证明:任意有理数 $r>0$,当 x 为有理数时,$x+r$ 也是有理数,当 x 为无理数时,$x+r$ 也是无理数,

故 $D(x+r)=\begin{cases}1,x\text{ 为有理数}\\0,x\text{ 为无理数}\end{cases}$,即 $D(x+r)=D(x)$.

因此,任何正有理数 r 都是狄利克雷函数的周期.

基本题型 Ⅴ:讨论函数的单调性

例 7 证明 $f(x)=1-\ln x$ 是单调递减函数.

【思路探索】 利用单调性质定义.

证明：$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=(1-\ln x_1)-(1-\ln x_2)=\ln\dfrac{x_2}{x_1}$，

由 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$，$\therefore \ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

因此，$f(x)=1-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调递减的.

基本题型 Ⅵ：求函数的表达式

例 8　设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n次}(x)]\}$，若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.

【思路探索】　使用归纳法.

解：当 $n=2$ 时，$f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，

设对于 $n=k$ 时，有 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$，

则对于 $n=k+1$ 时，有 $f_{k+1}(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$.

从而由数学归纳法知，对于任何自然数 n，有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

例 9　设 $f(x)+f(y)=f(z)$，求出 z，若(1) $f(x)=ax$；(2) $f(x)=\arctan x(|x|<1)$.

【思路探索】　利用函数的性质.

解：(1) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y)$，$f(z)=az$，
由 $f(x)+f(y)=f(z)$ 得 $z=x+y$.

(2) 由 $\arctan x+\arctan y=\arctan z$，得 $\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}=\arctan z$. 所以 $z=\dfrac{x+y}{1-xy}$.

例 10　设(1) $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$，$\psi(x)=\dfrac{1}{x}$；　(2) $\varphi(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ x, x>0;\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ -x^2, x>0.\end{cases}$

求：$\varphi(\varphi(x))$，$\varphi(\psi(x))$，$\psi(\varphi(x))$，$\psi(\psi(x))$.

【思路探索】　利用复合函数的定义.

解：(1) $\varphi(\varphi(x))=\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x))=\operatorname{sgn}x$；$\varphi(\psi(x))=\operatorname{sgn}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\operatorname{sgn}x$，$(x\neq 0)$；

$\psi(\varphi(x))=\dfrac{1}{\operatorname{sgn}x}=\operatorname{sgn}x$，$(x\neq 0)$；　$\psi(\psi(x))=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}=x$，$(x\neq 0)$.

(2) $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$，$\varphi(\psi(x))=0$，$\psi(\varphi(x))=\psi(x)$，$\psi(\psi(x))=0$.

基本题型 Ⅶ：关于确界及确界原理

例 11　证明：若数集 S 的上确界存在，则一定是唯一的.

【思路探索】　利用上确界的定义.

证法一：设 $\eta=\sup S$. 若另有 $\eta'=\sup S$，则由上确界定义，η 为 S 的最小上界，η' 是 S 的一个上界，所以 $\eta\leqslant\eta'$；同理有 $\eta'\leqslant\eta$，故 $\eta'=\eta$. 即 S 的上确界是唯一的.

证法二：(反证法) 设 η 与 η' 均为 S 的上确界，若 $\eta'\neq\eta$，不妨设 $\eta'<\eta$，由 $\eta=\sup S$ 及上确界定义，$\exists x_0\in \mathbf{S}$，使 $x_0>\eta'$，这与 $\eta'=\sup S$ 矛盾，故 $\eta'=\eta$，即 S 的上确界是唯一的.

历年考研真题评析

1. (北京科技大学)叙述数集 A 的上确界定义,并证明:

对任意有界数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$,总有 $\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$.

【思路探索】 运用上确界的定义.

解:若存在数 a 满足下面两条:

(1) $\forall x\in\mathbf{A}$,都有 $x\leqslant a$;(2) $\forall b<a$,一定存在 $x_0\in\mathbf{A}$,有 $x_0>b$.

则称 a 为数集 A 的上确界,即 $\sup A=a$.

令 $a=\sup\{x_n\}$, $b=\sup\{y_n\}$,则 $x_n\leqslant a$, $y_n\leqslant b$, $(n=1,2\cdots)$, $\therefore x_n+y_n\leqslant a+b$,

$\therefore \sup\{x_n+y_n\}\leqslant a+b=\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$.

2. (中国人民大学)设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$,求 $f(x)$ 的定义域和 $f(f(-7))$.

【思路探索】 运用函数的定义.

解:由 $3-x>0$, $3-x\neq1$, $49-x^2\geqslant0$,解得 $x\in[-7,2)\cup(2,3)$,

从而 $f(x)$ 的定义域为 $[-7,2)\cup(2,3)$.

又 $f(-7)=\dfrac{1}{\lg 10}=1$, $\therefore f(f(-7))=f(1)=\dfrac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

3. (海军工程大学)设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$, $(-\infty<x<+\infty)$, $g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

解:$f(g(x))=\dfrac{g(x)+|g(x)|}{2}=\begin{cases}\dfrac{x+(-x)}{2}=0, & x<0\\ \dfrac{x^2+x^2}{2}=x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$

4. (华中理工大学)设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,试验证 $f(f(f(f(x))))=x$,并求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$, $x\neq0$, $x\neq1$.

解:$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x$. $\therefore f(f(f(f(x))))=f(f(x))=x$.

又 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x$.

5. (同济大学)设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant0.\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

【思路探索】 使用复合函数定义.

解:当 $x\geqslant0$ 时, $f(f(x))=f(1)=1$. 当 $-1\leqslant x<0$ 时, $f(f(x))=f(1+x)=1$.

当 $x<-1$ 时, $f(f(x))=f(1+x)=x+2$.

因此 $f(f(x))=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant-1 \text{ 时},\\ x+2 & \text{当 } x<-1 \text{ 时}.\end{cases}$

6. (西北工业大学)设 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2}}$,求:(1) $f(x)$ 的定义域;(2) $\dfrac{1}{2}(f(f(x)))^2$.

【思路探索】 使用复合函数定义.