21世纪全国应用型本科计算机案例型规划教材

21st CENTURY
实用规划教材

线性代数

主　编　姚喜妍
王济荣

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪全国应用型本科计算机案例型规划教材

线 性 代 数

主　编　姚喜妍　王济荣
副主编　赵宜宾　王　涛
参　编　王宝丽

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是根据教育部高等院校线性代数课程的基本要求，从计算机应用的角度出发，融入数学建模和数学实验，总结多年教学经验编写而成的。全书共分6章，内容有行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与矩阵的对角化、二次型，数学实验与数学建模，书末附有习题答案。

本书选材适当，文字流畅，通俗易懂，强调应用，注重能力的培养。除第6章外，每章后配有A、B两套综合练习。

本书可供本科院校理科、工科、经管等专业使用，也可供其他相关专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/姚喜妍，王济荣主编. —北京：北京大学出版社，2009. 8

(21世纪全国应用型本科计算机案例型规划教材)

ISBN 978-7-301-04852-8

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①姚…②王… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第140233号

书　　名：线性代数
著作责任者：姚喜妍　王济荣　主　编
策 划 编 辑：孙哲伟　李　虎
责 任 编 辑：孙哲伟
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-04852-8/O・0785
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn　http://www.pup6.com
电　　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962
电 子 邮 箱：pup_6@163.com
印　刷　者：北京飞达印刷有限责任公司
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　14印张　312千字
2009年8月第1版　2009年8月第1次印刷
定　　　价：22.00元

21世纪全国应用型本科计算机案例型规划教材

专家编审委员会

(按姓名拼音顺序)

信息技术的案例型教材建设

(代丛书序)

刘瑞挺

北京大学出版社第六事业部在 2005 年组织编写了《21 世纪全国应用型本科计算机系列实用规划教材》，至今已出版了 50 多种。这些教材出版后，在全国高校引起热烈反响，可谓初战告捷。这使北京大学出版社的计算机教材市场规模迅速扩大，编辑队伍茁壮成长，经济效益明显增强，与各类高校师生的关系更加密切。

2008 年 1 月北京大学出版社第六事业部在北京召开了"21 世纪全国应用型本科计算机案例型教材建设和教学研讨会"。这次会议为编写案例型教材做了深入的探讨和具体的部署，制定了详细的编写目的、丛书特色、内容要求和风格规范。在内容上强调面向应用、能力驱动、精选案例、严把质量；在风格上力求文字精练、脉络清晰、图表明快、版式新颖。这次会议吹响了提高教材质量第二战役的进军号。

案例型教材真能提高教学的质量吗？

是的。著名法国哲学家、数学家勒内·笛卡儿(Rene Descartes，1596—1650)说得好："由一个例子的考察，我们可以抽出一条规律。(From the consideration of an example we can form a rule.)"事实上，他发明的直角坐标系，正是通过生活实例而得到的灵感。据说是在 1619 年夏天，笛卡儿因病住进医院。中午他躺在病床上，苦苦思索一个数学问题时，忽然看到天花板上有一只苍蝇飞来飞去。当时天花板是用木条做成正方形的格子。笛卡儿发现，要说出这只苍蝇在天花板上的位置，只需说出苍蝇在天花板上的第几行和第几列。当苍蝇落在第四行、第五列的那个正方形时，可以用(4，5)来表示这个位置……由此他联想到可用类似的办法来描述一个点在平面上的位置。他高兴地跳下床，喊着"我找到了，找到了"，然而不小心把国际象棋撒了一地。当他的目光落到棋盘上时，又兴奋地一拍大腿："对，对，就是这个图"。笛卡儿锲而不舍的毅力，苦思冥想的钻研，使他开创了解析几何的新纪元。千百年来，代数与几何，井水不犯河水。17 世纪后，数学突飞猛进的发展，在很大程度上归功于笛卡儿坐标系和解析几何学的创立。

这个故事，听起来与阿基米德在浴池洗澡而发现浮力原理，牛顿在苹果树下遇到苹果落到头上而发现万有引力定律，确有异曲同工之妙。这就证明，一个好的例子往往能激发灵感，由特殊到一般，联想出普遍的规律，即所谓的"一叶知秋"、"见微知著"的意思。

回顾计算机发明的历史，每一台机器、每一颗芯片、每一种操作系统、每一类编程语言、每一个算法、每一套软件、每一款外部设备，无不像闪光的珍珠串在一起。每个案例都闪烁着智慧的火花，是创新思想不竭的源泉。在计算机科学技术领域，这样的案例就像大海岸边的贝壳，俯拾皆是。

事实上，案例研究(Case Study)是现代科学广泛使用的一种方法。Case 包含的意义很广：包括 Example 例子，Instance 事例、示例，Actual State 实际状况，Circumstance 情况、事件、境遇，甚至 Project 项目、工程等。

我们知道在计算机的科学术语中，很多是直接来自日常生活的。例如 Computer 一词早在 1646 年就出现于古代英文字典中，但当时它的意义不是"计算机"而是"计算工人"，

即专门从事简单计算的工人。同理，Printer 当时也是“印刷工人”而不是“打印机”。正是由于这些“计算工人”和“印刷工人”常出现计算错误和印刷错误，才激发查尔斯·巴贝奇(Charles Babbage，1791—1871)设计了差分机和分析机，这是最早的专用计算机和通用计算机。这位英国剑桥大学数学教授、机械设计专家、经济学家和哲学家是国际公认的“计算机之父”。

20 世纪 40 年代，人们还用 Calculator 表示计算机器。到电子计算机出现后，才用 Computer 表示计算机。此外，硬件(Hardware)和软件(Software)来自销售人员。总线(Bus)就是公共汽车或大巴，故障和排除故障源自格瑞斯·霍普(Grace Hopper，1906—1992)发现的“飞蛾子”(Bug)和“抓蛾子”或“抓虫子”(Debug)。其他如鼠标、菜单……不胜枚举。至于哲学家进餐问题，理发师睡觉问题更是操作系统文化中脍炙人口的经典。

以计算机为核心的信息技术，从一开始就与应用紧密结合。例如，ENIAC 用于弹道曲线的计算，ARPANET 用于资源共享以及核战争时的可靠通信。即使是非常抽象的图灵机模型，也受到二战时图灵博士破译纳粹密码工作的影响。

在信息技术中，既有许多成功的案例，也有不少失败的案例；既有先成功而后失败的案例，也有先失败而后成功的案例。好好研究它们的成功经验和失败教训，对于编写案例型教材有重要的意义。

我国正在实现中华民族的伟大复兴，教育是民族振兴的基石。改革开放 30 年来，我国高等教育在数量上、规模上已有相当的发展。当前的重要任务是提高培养人才的质量，必须从学科知识的灌输转变为素质与能力的培养。应当指出，大学课堂在高新技术的武装下，利用 PPT 进行的“高速灌输”、“翻页宣科”有愈演愈烈的趋势，我们不能容忍用“技术”绑架教学，而是让教学工作乘信息技术的东风自由地飞翔。

本系列教材的编写，以学生就业所需的专业知识和操作技能为着眼点，在适度的基础知识与理论体系覆盖下，突出应用型、技能型教学的实用性和可操作性，强化案例教学。本套教材将会有机融入大量最新的示例、实例以及操作性较强的案例，力求提高教材的趣味性和实用性，打破传统教材自身知识框架的封闭性，强化实际操作的训练，使本系列教材做到“教师易教，学生乐学，技能实用”。有了广阔的应用背景，再造计算机案例型教材就有了基础。

我相信北京大学出版社在全国各地高校教师的积极支持下，精心设计，严格把关，一定能够建设出一批符合计算机应用型人才培养模式的、以案例型为创新点和兴奋点的精品教材，并且通过一体化设计、实现多种媒体有机结合的立体化教材，为各门计算机课程配齐电子教案、学习指导、习题解答、课程设计等辅导资料。让我们用锲而不舍的毅力，勤奋好学的钻研，向着共同的目标努力吧！

刘瑞挺教授　本系列教材编写指导委员会主任、全国高等院校计算机基础教育研究会副会长、中国计算机学会普及工作委员会顾问、教育部考试中心全国计算机应用技术证书考试委员会副主任、全国计算机等级考试顾问。曾任教育部理科计算机科学教学指导委员会委员、中国计算机学会教育培训委员会副主任。PC Magazine《个人电脑》总编辑、CHIP《新电脑》总顾问、清华大学《计算机教育》总策划。

前　言

线性代数是理工科各类专业的必修课程之一。本书是按照教育部颁布的高等院校数学课程教学的基本要求，结合多年教学经验和体会编写而成的。由于线性代数中某些概念比较抽象和理论性较强，为了便于读者更好地学习这门课程，编写中我们在以下几方面作了一些努力。

首先，通过案例引入问题，用生活中的具体事例展开所要研究的问题，使读者带着问题去学习，具有针对性。

其次，内容上突出重点，正确处理重点和难点内容，对重点内容力求讲透，对较难的定理给出结论和应用，略去其证明，减轻读者的压力和难度。

再次，对一些与计算机相关的内容，尽可能多地指出其对计算机应用的指导作用，并指出它的应用背景。

最后，第 6 章数学实验与数学建模能使读者较好地利用前面所学基础知识，借助数学软件解决实际问题。

另外，第 1～5 章后配备有 A、B 两套综合练习，其中部分习题来源于历年考研题。读者做完每节内容后的习题，再做这部分题目，可以提高解题能力和分析问题的能力。

本书前 5 章教学时数约 50 学时，其中第 1 章约 10 学时，第 2 章约 12 学时，第 3 章约 8 学时，第 4 章约 8 学时，第 5 章约 12 学时。第 6 章内容各院校可以灵活处理，如果时间紧张可以不讲或少讲。

本书第 1 章及第 2 章由运城学院王济荣编写；第 3 章由运城学院姚喜妍和王宝丽编写；第 4 章由华北科技学院王涛编写；第 5 章及第 6 章由防灾科技学院赵宜宾编写；各章节习题答案由各章节编者给出。全书由姚喜妍、王济荣负责统稿。

在本书的编写出版过程中，得到了北京大学出版社、运城学院教务处和应用数学系以及有关兄弟院校的帮助和支持。同时，运城学院张风琴教授对本书提出了许多宝贵意见，在此一并深表感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，诚恳欢迎广大师生和同行批评和指正。

编　者

2009 年 3 月

目　录

第1章

行 列 式

学习目标

通过本章的学习，理解行列式的定义和性质，掌握按一行(列)展开法则，熟练掌握四阶行列式的计算，掌握Cramer法则，学会计算一些简单的n阶行列式.

教学要求

能力模块	能力要求	相关知识点
基本概念	1. 培养学生理解能力 2. 培养学生抽象思维能力	1. 排列 2. n阶行列式定义
基本理论	培养学生推理、分析、判断等逻辑思维能力	1. 行列式的性质 2. Cramer法则
基本方法	1. 培养学生表达能力 2. 培养学生计算能力 3. 培养学生推理能力	1. 子式、余子式、代数余子式 2. 按一行(列)展开 3. 用Cramer法则解线性方程组

实际生活中许多问题都是求解线性方程组. 行列式是研究线性方程组的重要工具，并且行列式对于研究矩阵、二次型及数学的其他分支也有重要的作用.

1.1 二阶和三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

行列式的概念起源于线性方程组的研究.

先来看一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

现在用加减消元法，分别消去 x_1, x_2，可得

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{aligned} \tag{1-2}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，由上式可得到线性方程组的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1-3}$$

现在来观察上式中的分母，它正好是由方程组(1-1)的未知数的系数决定的.

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-4}$$

上式左端中的符号称为二阶行列式. 两条对角线分别称为主对角线和次对角线.

计算法则：二阶行列式的值正好是主对角线之积减去次对角线之积.

按照以上行列式的记法，方程组(1-1)的解就可记成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

这种表达形式既简单又整齐美观，便于记忆.

1.1.2 三阶行列式

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-5}$$

引入三阶行列式符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1-6}$$

2．用行列式解方程组

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

1.2 排　列

为了讨论由 n 个方程 n 个未知量构成的线性方程组，就需要给出 n 阶行列式的概念．为此，需要介绍排列的有关概念．

1.2.1 排列及其逆序数

由 n 个不同数字 1，2，…，n 组成的有序数组 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 称为一个 n **级排列**．

例如，3241 是一个 4 级排列，24315 是一个 5 级排列．

$123\cdots n$ 是按自然顺序排列的，称为**自然排列**．

n 级排列总共有 $n!$ 个．

定义 1　在一个排列中，如果有一个大数排在一个小数之前，则称这两个数构成该排列的一个**逆序**．一个排列中所有逆序的总和，称为该排列的**逆序数**，记作 $\pi(j_1 j_2 \cdots j_n)$．

如果一个排列的逆序数为奇数，则称该排列为**奇排列**，如果一个排列的逆序数为偶数，则称该排列为**偶排列**．

显然，自然排列 $123\cdots n$ 的逆序数为零，它是偶排列．

【例 1.2】　求排列 24315 的逆序数，并判断其奇偶性．

解　先求排列 24315 中与 1 构成的逆序数，再求排列 24315 中与 2 构成的逆序数，…，依次下去，故

$$\pi(24315) = 3 + 0 + 1 + 0 + 0 = 4$$

因而，排列 24315 为偶排列．

1.2.2 对换

定义 2　在一个排列中，如果将两个数字对调，而保持其他元素不变，得到另一个新的排列，这样的一个变换称为**对换**．特别地，对调两相邻两元素之间的对换称为**相邻对换**．

例如，24315 作对换(4,1)后变为 21345．

定理 1　排列经依次对换后，改变奇偶性．

证明　先证相邻对换的情形．

设排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$，作 a 与 b 的对换后化为

$$a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$$

显然，元素 $a_1, \cdots, a_l; b_1, \cdots, b_m$ 的逆序数经过对换并不改变，但 a, b 两元素的逆序数变化为，当 $a < b$ 时，a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变；当 $a > b$ 时，a 的逆序数不变，而 b 的逆序数增加 1．

因此，排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性发生了改变．

再证一般对换的情形．

为了给出n阶行列式的定义，先来考察二阶行列式与三阶行列式之间的关系，根据定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

通过观察可以看出，二阶行列式表示所有不同行不同列的两个元素乘积的代数和．一般地，两个元素的乘积可以写成$a_{1j_1}a_{2j_2}$，排列j_1j_2可以取12和21，这样的排列共有2!项．因此，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}$$

其中t为列排列j_1j_2的逆序数．

同样地，由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

因此，三阶行列式表示所有不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和．一般地，3 个元的乘积可以写成$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，排列$j_1j_2j_3$可以取所有的 3 级排列，这样的排列共有3!项．

因此，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中t为列排列$j_1j_2j_3$的逆序数．

再观察每一项的符号可得，当项中元素的行排列为自然排列时，如果这一项的列排列为偶排列，则该项前冠以正号；如果这一项的列排列为奇排列，则该项前冠以负号．

这样，就可以给出n阶行列式的定义．

定义 3　将n^2个数$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成的如下形式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n**阶行列式**，它有n个行n个列．它表示的是所有取自不同行不同列的n个元素乘积的代数和；每项的符号是:当项中元素的行排列为自然排列时，如果这一项的列排列为偶排列，则该项前冠以正号；如果这一项的列排列为奇排列，则该项前冠以负号．

一般项的n个元素的乘积可以写成$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，排列$j_1j_2\cdots j_n$可以取所有的$n$级排列，这样的排列共有$n!$项，一半正项一半负项．因此，$n$阶行列式