21世纪普通高等院校本科应用型规划教材
——经管类

Gailülun yu
SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主　编　汤红英
副主编　潘春跃 林映光

3

西南交通大學出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

021/335
2008

21 世纪普通高等院校本科应用型规划教材 ——经管类

概率论与数理统计

主　编　汤红英
副主编　潘春跃　林映光

西南交通大学出版社
·成　都·

内 容 提 要

本书内容包括：随机事件与概率，一维随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，几类常用分布简介，大数定律与中心极限定理，数理统计的基础知识，参数估计，假设检验，方差分析与线性回归分析等. 每章配有较充分的、难度相当的习题供选择使用.

本书的理论体系介绍系统、逻辑结构严谨，叙述简洁，以使学生在阅读和学习本教材时更能抓住重点，易于接受.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 汤红英主编. —成都：西南交通大学出版社，2008.10
21 世纪普通高等院校本科应用型规划教材. 经管类
ISBN 978-7-5643-0095-1

Ⅰ. 概… Ⅱ. 汤… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 154139 号

21 世纪普通高等院校本科应用型规划教材——经管类

概率论与数理统计

主编　汤红英

*

责任编辑　张宝华
封面设计　本格设计
西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段 111 号　邮政编码：610031 发行部电话：028－87600564）
http：　//press.swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：170 mm×230 mm　　印张：16.625
字数：305 千字　　印数：1—3 000 册
2008 年 10 月第 1 版　　2008 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-0095-1
定价：27.00 元

图书如有印装质量问题　本社负责退换

版权所有　盗版必究　举报电话：028－87600562

前　言

本书是系列教材“21 世纪普通高等院校本科应用型规划教材（经管类）”中的一本，是经管类数学基础课的教材之一. 按照高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革总体目标的要求，为适应我国在新世纪社会主义建设和经济发展中的需要，培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才，我们针对一般本科院校的生源状况，立足应用型人才的培养目标编写了这套经济数学教材，共包括《线性代数》和《概率论与数理统计》两个部分.

这本《概率论与数理统计》以概率论部分（第一章至第六章）为重点，向读者阐述了基础的理论；数理统计部分（第七章至第十章）向读者介绍了常用的统计推断方法，如参数估计、假设检验、方差分析与回归分析.

参加本书编写工作的都是具有多年教学实践经验的教师，在编写过程中结合了各自多年的教学实践经验，使本书独具以下特点：概率论与数理统计的基本思想突出；理论介绍规范、简明；例题与习题的选择注重典型性、多样性和可变性的结合，体现了“大众化教育”和“社会应用型人才”的要求；注重培养学生的实际应用能力.

本书可作为本科院校经济管理类专业的数学基础课教材，也可作为自学者的辅导书和参考资料. 本书的编写分工如下：

第一、二、三章由四川理工学院汤红英老师编写；第四、六章由四川理工学院陈玲丽老师编写；第五章由四川理工学院林映光老师编写；第七章由四川理工学院老师彭祖成编写；第八、九章由四川理工学院潘春跃老师编写；第十章由西华师范大学周寿彬老师编写；常用统计分布表各附表由四川理工学院陈杰老师编制.

在本书的编写过程中得到了西南交通大学出版社的大力协助和支持，在此表示诚挚的谢意.

由于时间仓促，本书难免存在不足和错误，恳请各位专家和读者批评指正，我们一定虚心接受，并不断修正完善.

编　者

2008 年 5 月于四川理工学院

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　随机事件与概率

【学习目标】

（1）掌握随机事件的概念及性质.

（2）掌握两种特性：不相容性、独立性.

（3）掌握五个概率公式：加法公式、条件概率计算公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式.

（4）掌握三类概型：古典概型、几何概型、独立试验序列概型.

概率论与数理统计是一门研究随机现象的统计规律性的数学学科，它有着系统、丰富的内容和深刻的结论. 它作为研究、揭示随机现象规律的主要理论工具，在自然科学、国民经济以及社会活动的所有部门都有着广泛的应用.

第一节　随机事件

在自然界与人类社会中普遍存在着两类现象：确定性现象与随机现象.

确定性现象是指在一定条件下必然发生或必然不发生的现象. 如水在 0 ℃要结冰；没有氧气人不能存活；没有水植物不能生长，等等.

随机现象是指一定条件下结果不可预知的现象，它也许发生也许不发生. 如随意抛一枚硬币，结果可能是正面向上，也可能是反面向上；春耕粮种播种下地，秋天也可能丰收，也可能欠收；一个国家采用提高利率控制信贷的货币财政政策以控制经济过热，可能短期见成效，也可能收效甚微；观察某地第二天的天气是雨天还是晴天等.

要研究随机现象，找出其存在的统计规律，就需要对相应的客观事物进行跟踪观察. 这个过称为随机试验，简称试验. 在概率论中所研究的试验应具有以下三个特性：

(1) 多样确定性. 试验结果不唯一，即具有两种及两种以上的可能结果，但其全部可能的结果在做试验之前是确切知道的.

(2) 不可预知性. 一次试验，在结束之前不能准确预知其结果是可能结果中的哪一种.

(3) 可重复性. 在相同的条件下，试验可以重复进行.

一、随机事件与样本空间

随机试验的可能结果称为随机事件，在本书中也简称事件.

在事件中，有的可看成是多个事件的组合，有的却不能分为其他事件的组合. 这种不能分为其他事件组合的最简单的事件称为基本事件或简单事件，由多个事件组合而成的事件称为复杂事件.

从点集的角度去标记，一个试验中每一个不可细分的可能结果为一基本单位，称为一个样本点，记为ω_i；一个样本点即构成一个基本事件. 所有样本点的集合称为样本空间，记为 Ω, $\Omega=\{\omega\mid\cdot\}$或$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$. 从集合论的观点看，这种记法表明所有事件是集合，其元素是样本点；一般事件是样本空间的子集，样本空间是最大的一个事件.

在试验中，某个可能结果最终出现了，我们称该事件发生了. 每次试验中一定要发生的称为必然事件，Ω 为必然事件；一定不发生的称为不可能事件，记为$\varnothing$. 必然事件和不可能事件都是确定事件，为随机事件的两个极端，通常仍称它们为事件.

例 1.1 任意抛一枚均匀的硬币，观察硬币着地时出现在上的面. 这是一个试验，其样本空间为$\Omega=\{正面, 反面\}$.

例 1.2 记录电话交换台在一段时间内接到的呼叫次数. 这也是一个试验，其样本空间为：$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

例 1.3 对某企业生产的同型号灯泡做破坏性试验，测灯泡的寿命. 其样本空间$\Omega=[0, +\infty)$ 或$\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

样本空间中，有的样本点数为有限个（如例 1.1），有的为无限个（如例 1.2，例 1.3）；有的样本点可列（如例 1.2），有的却不可列（如例 1.3）.

二、事件之间的关系与运算

在一个样本空间中，有简单事件，也有复杂事件. 复杂事件由简单事件组

合而成．通过对简单事件的了解研究，可以掌握较复杂的事件．这就需要首先研究事件之间的关系及其运算，并用简单的符号或方式描述它们．

由事件的组成看，任意事件都是集合．因此可借用集合论的语言，即集合的符号、集合的关系及其运算法则来进行事件的关系运算．一般的事件可用符号 $A, B, \cdots$ 等大写字母表示．设 $A, B, C, D, A_1, A_2, \cdots, A_n$ 等为事件，那么事件的关系与运算可表述如下．

(1) 事件的包含关系．

若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，则称事件 A 包含事件 B（或事件 B 包含于事件 A），记为 $A\supset B$（或 $B\subset A$）．

(2) 事件的相等关系．

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，称事件 A，B 相等，记为 $A=B$．

(3) 和事件．

两个事件 A，B 中至少发生一个，即"A 发生或 B 发生"，这一事件称为 A，B 的和事件，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$．

(4) 积事件．

两个事件 A，B 都发生，即 A 发生，B 也发生，且为一个事件，称为 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB．它包含所有既属于 A 也属于 B 的基本事件．

(5) 差事件．

事件 A 发生但 B 不发生，且为一个事件，称为 A 与 B 的差事件．它是由属于 A 但不属于 B 的基本事件构成的集合，记为 $A-B$．

(6) 事件互不相容（互斥）关系．

如果事件 A, B 不能都发生，即 $AB=\varnothing$，称事件 A 与 B 互不相容（或互斥）．互不相容的两事件没有共同的基本事件．

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_iA_j=\varnothing$ $(i\neq j;\ i, j=1, 2, \cdots, n)$，称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，也简称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为互不相容事件．

(7) 对立事件（互逆事件）．

事件 $\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件（互逆事件）．它是由样本空间里所有不属于 A 的样本点构成的集合，记为 $\overline{A}$．

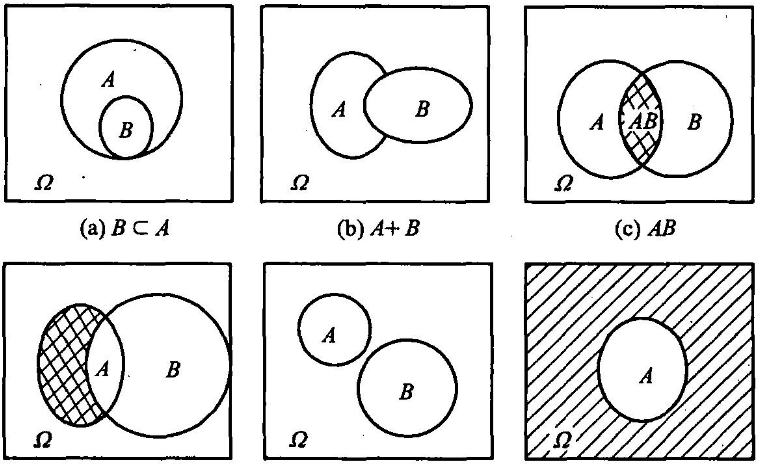
(8) 完备事件组．

若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容的事件，而且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一个完备事件组．

完备事件组在一个试验的事件组合求解中，有着广泛而重要的作用．

有时，以几何图示来辅助表示事件或简化复杂事件，可以起到形象、直观、快捷的作用．一般地，图示中用矩形表示样本空间，用矩形内的圆圈表示一般

事件. 事件关系与运算的几何表示如图 1.1 所示.



(a) $B\subset A$　　(b) $A+B$　　(c) AB

(d) $B-A$　　(e) A与B互不相容　　(f) $\overline{A}$

图 1.1　事件关系与运算示意图

例 1.4　掷一颗骰子的试验，观察出现的点数. 事件 A 表示奇数点，B 表示点数小于 5，C 表示小于 5 的偶数点. 用集合的列举法表示事件：Ω, A, B, C, $A+B$, $A-B$, $A\overline{B}$, $\overline{AB}$, $\overline{A}\overline{B}$.

解　由题意知，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{2,4\}$, $A+B=\{1,2,3,4,5\}$, $A-B=\{5\}$, $A\overline{B}=A-B=\{5\}$, $\overline{AB}=\{2,4,5,6\}$, $\overline{A}\overline{B}=\{6\}$.

例 1.5　工程队承包了五个工程，设 A_i 表示第 i 个工程验收合格（$i=1,2,\cdots,5$），试用 A_i（$i=1,2,\cdots,5$）表出事件：

（1）至少有一个工程合格；

（2）最多有一个工程合格；

（3）恰有一个工程合格；

（4）只有第一个工程合格.

解　（1）至少有一个工程合格的对立事件是五个工程都不合格，因此所求事件可以表示为

$$A_1+A_2+\cdots+A_5=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_5}$$

（2）最多有一个工程合格的另一种表述是五个工程中只有一个合格或五个都不合格，也可表述为五个工程中至少有四个不合格，故事件可表示为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5$$
$$=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_5+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_4\overline{A}_5+\overline{A}_1\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5+\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5$$

(3) 所求事件为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\overline{A}_5+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5$

(4) 所求事件为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5$.

例 1.6　如果用 x 表示一个沿数轴作随机运动的质点所在位置的坐标，试说明下列事件的关系：$A=\{x|x\leqslant 10\}$，$B=\{x|x<5\}$，$C=\{x|x>-5\}$，$D=\{x|x>0\}$，$E=\{x|x>10\}$.

解　各事件如图 1.2 所示.

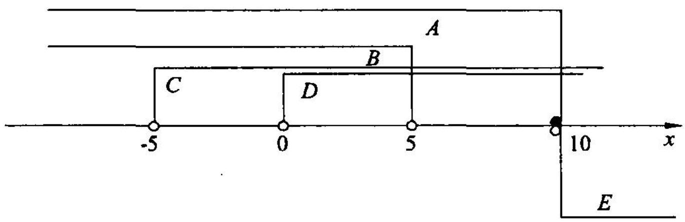


图 1.2

由图 1.2 可以直观地看出各事件之间的关系：

(1) 包含关系：$A\supset B$，$C\supset D\supset E$.

(2) 对立关系：A 与 E 是一对对立事件.

(3) 不相容关系：B 与 E 为不相容事件.

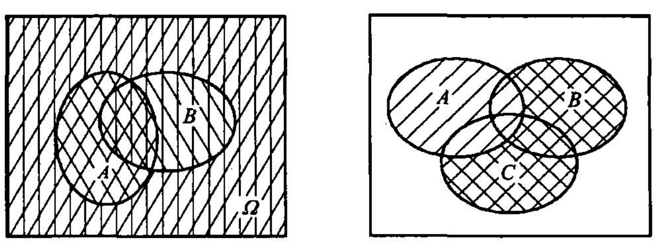
(4) 相容关系：A 与 C 相容；A 与 D，B 与 C，B 与 D 也相容.

例 1.7　用图示法化简或证明下列各式（事件 A，B，C 相容）：

(1) $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$；

(2) $A+\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}C=A+B+C$.

解　作图 1.3 如下：



(a)$(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$　　(b)$A+B+C$

图 1.3

由图 1.3 可得:

(1) $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})=AB$.

(2) $A+B+C=A+(B-A)+(C-A-B)=A+\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}C$.

实际上，事件的运算与集合的运算一样，也满足如下规律:

(1) 交换律: $A+B=B+A$，$AB=BA$.

(2) 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 德 · 摩根 (De Morgan) 法则: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些规律可以推广到有限个和可列个事件的情形. 关于它们的应用，要注意领会概率论的含义.

第二节 频率与概率

概率论研究的是随机事件中量的规律性，因此除了解研究一个试验中含有的事件、事件的关系与运算以及表述之外，更重要的是对事件发生可能性的大小作量的描述. 也就是以一个数来表出一个事件发生可能性的大小，这个数就是事件发生的概率.

一个事件的概率如何求得，或者说如何测得呢? 先来看看事件的频率.

定义 1.1 重复做某个试验 n 次，对于试验中的某个事件 A 发生了 m_A 次，称 m_A 为事件 A 发生的频数. 称 $f_n(A)=\dfrac{m_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

显然，必然事件的频率为 1，不可能事件的频率为 0，一般事件的频率介于 0 与 1 之间. 对不相容事件 A 与 B，若在 n 次试验中它们发生的频数分别为 m_A, m_B，则和事件 $A+B$ 的频率为

$$f_n(A+B)=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=f_n(A)+f_n(B)$$

即频率具有可加性.

由此可得频率的性质:

(1) 非负性: $f_n(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性: $f_n(\Omega)=1$.

(3) 可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

一般而言，对试验中的事件 A，重复次数 n 不同，所得的频率 $f_n(A)$ 是不一样的. 不过，通过前人大量实验研究可知，随着试验次数 n 的增大，频率 $f_n(A)$ 的取值逐渐趋近于某一常值. 因此有如下的定义：

定义 1.2 在相同条件下，重复做试验 n 次. 当次数 n 足够大时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 渐趋稳定在一个常数 p 附近摆动，n 越大，摆动幅度越小. 称常数 p 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$（即 $P(A)=p$）.

实际上，一个事件发生概率的大小是由事件本身的结构决定的. 概率的统计定义也没界定出概率的计算方法，它的实用性就在于在实践中以频率代替概率，找寻概率的近似值. 这在科学探索的过程中应用很广，作用也很大. 如保险产品设计中涉及事故发生、疾病死亡等事件的概率问题，常常以相应区域长期统计数据为依据推演估算概率；人的寿命分布问题也常以人口普查和医疗统计数据为基础推算而得. 不过，从概率的统计定义可以归结出概率的性质：

性质 1 概率具有非负性：任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$.

性质 2 概率的规范性：$P(\Omega)=1$.

性质 3 概率具有可列可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为两两互不相容的事件，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

上面三条性质在严格的概率体系中可作为公理构成概率的公理化体系. 把它们作为概率必须具备的基本属性，进而成为建立概率数学理论的出发点.

性质 4 $P(\varnothing)=0$.

性质 5 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容的事件，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质 5 由概率的可列可加性和性质 4 就可推证出来，这只需把可列可加性中的 A_n 事件之后的全设为不可能事件就可以了.

性质 6 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

性质 7 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地，若 $A\supset B$，就有 $AB=B$. 再有概率的非负性，则有

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \quad 且 \quad P(A)\geqslant P(B)$$

性质 8 对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 9 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (1.1)

由例 1.7 可知，$A+B=A+\bar{A}B=A+(B-A)$，且 A 与 $\bar{A}B$ 不相容，所以

$$P(A+B)=P(A+(B-A))=P(A)+P(B-A)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

即
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
这就是概率的加法公式.

对三个事件来讲，其加法公式为

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.2}$$

加法公式可以推广到任意有限个事件的情形：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1.3}$$

有了概率的性质，就可以由一些事件的概率求出一些相应组合事件的概率.

例 1.8 已知 $A\subset B$，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，求：$P(\bar{A})$，$P(\bar{B})$；$P(AB)$；$P(A+B)$；$P(\bar{A}B)$；$P(\bar{A}\bar{B})$.

解 （1）$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.4=0.6$，$P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.6=0.4$.

（2）因为 $A\subset B$，所以 $AB=A$．故 $P(AB)=P(A)=0.4$.

（3）$P(A+B)=P(B)=0.6$.

（4）$P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=0.6-0.4=0.2$.

（5）$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(\overline{\bar{A}\bar{B}})=1-P(A+B)=1-0.6=0.4$.

例 1.9 已知 $P(A)=0.4$，$P(B\bar{A})=0.2$，$P(C\bar{A}\bar{B})=0.1$，求 $P(A+B+C)$.

解 $P(A+B+C)=P(A+B\bar{A}+C\bar{A}\bar{B})=P(A)+P(B\bar{A})+P(C\bar{A}\bar{B})$

$=0.4+0.2+0.1=0.7$.

总之，同一事件可能有多个等价的表达形式，通过变形，再利用概率的性质就可以比较顺利地求解问题.

第三节　古典概型与几何概型

虽然直接计算一个事件的概率有时很困难，甚或是不可能的，但对一些有特殊结构的概率问题，却是简单易行的．下面就介绍两类这样的概率问题——古典概型与几何概型.

一、古典概型

如例 1.1 和例 1.5 这类试验中，都具有两个共同的特性：

（1）有限性：所有的基本事件为有限个.

（2）等可能性：每个基本事件发生的可能性是相同的.

具有上述两个特性的试验称为古典概型. 古典概型是最简单的概率问题类型，也是概率研究史上最早涉及的主要研究对象.

设试验中的任意事件 A 含有基本事件 E，若事件 E 发生必然导致事件 A 发生，即事件 E 的发生有利于事件 A 的发生，故称事件 E 为事件 A 的有利事件.

定义 1.3 在古典概型中，试验所含有的基本事件总数为 n，其中，事件 A 所含的有利事件数目为 m_A，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m_A}{n}$$

概率的古典定义，指明了这类问题中事件概率的计算方法. 可以看出，这类问题中事件概率的计算非常简单，其关键是找出试验中的基本事件总数和事件 A 的有利事件数.

例 1.10 一批产品共有 100 个，其中一等品 50 个，二等品 40 个，等外品 10 个，规定一、二等品为合格品，求一、二等品率与次品率.

解 设 A 表示事件取到一等品，B 表示事件取到二等品，C 表示事件取到次品，据题意有

$$P(A)=\frac{50}{100}=0.5\text{ ，}\quad P(B)=\frac{40}{100}=0.4\text{ ，}\quad P(C)=\frac{10}{100}=0.1$$

另外，$P(C)$也可解为

$$P(C)=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)=0.1$$

例 1.11 箱内装有 4 个红球 5 个白球，从中任取 2 个，求取到 2 个都是白球的概率.

解 令 A 表示事件取得 2 个白球. 9 个球中任取 2 个的总取法数为 $\mathrm{C}_9^2=\dfrac{9\times 8}{2!}=36$；2 个白球应从 5 个白球中任取，故有利事件数为 $\mathrm{C}_5^2=10$. 由概率的古典定义，有

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_9^2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

例 1.12 一辆飞机场的交通车载有 25 名乘客，途经 9 个站，每位乘客等可能地在 9 个站中任意一站下车，交通车只在有乘客下车时才停车. 求下列各事件的概率：

(1) 交通车在第 i 站停车；

(2) 交通车在第 i 站和第 j 站至少有一站停车；

(3) 交通车在第 i 站和第 j 站均停车；

(4) 在第 i 站有三人下车.

解 令 A_i 表示交通车在第 i 站停车 $(i=1,2,\cdots,9)$，B 表示第 i 站有 3 人下车.

(1) 交通车在第 i 站停车，表明第 i 站至少有一个人下车. 而其对立事件就是所有人都在其余 8 个站中的任意一个站下车. 由等可能性及概率的性质，可得

$$P(A_i)=1-P(\bar{A}_i)=1-\frac{8^{25}}{9^{25}}$$

(2) 由题意可得

$$P(A_i+A_j)=1-P(\bar{A}_i\bar{A}_j)=1-\frac{7^{25}}{9^{25}}$$

(3) 由于

$$P(A_iA_j)=1-P(\bar{A}_i+\bar{A}_j)=1-P(\bar{A}_i)-P(\bar{A}_j)+P(\bar{A}_i\bar{A}_j)$$

故由各站地位的对等性有

$$P(A_i)=P(A_j)$$

故
$$P(A_iA_j)=1-2P(\bar{A}_i)+P(\bar{A}_i\bar{A}_j)=1-2\times\frac{8^{25}}{9^{25}}+\frac{7^{25}}{9^{25}}$$

(4) 由题意可得

$$P(B)=\mathrm{C}_{25}^{3}\frac{8^{22}}{9^{25}}=\mathrm{C}_{25}^{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{3}\left(\frac{8}{9}\right)^{22}$$

例 1.13 设有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的任意一间去住 $(n\leqslant N)$，求下列事件的概率：

(1) 指定的 n 个房间各有一个人住；

(2) 恰好有 n 个房间各有一人住.

解 设 A 表示事件指定的 n 个房间各有一个人住，B 表示恰好有 n 个房间各有一个人住.

(1) 对每个人有 N 个房间可供选择，无限制的情况下可以多人甚或所有人

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com