成人高等教育公共基础课系列教材

成人教育高等数学导学

上 册

微 积 分

■ 主 编：匡奕群

■ 副主编：赖国治 石 哲

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

成人高等教育公共基础课系列教材

成人教育高等数学导学

上　册

微　积　分

■ 主　编：匡奕群

■ 副主编：赖国治　石　哲

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分:上册/匡奕群主编.—武汉:武汉大学出版社,2007.3
(成人高等教育公共基础课系列教材)
ISBN 978-7-307-05431-8

Ⅰ.微… Ⅱ.匡… Ⅲ.微积分—成人教育:高等教育—教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 020582 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:黄添生　　版式设计:杜　枚

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉大学出版社印刷总厂
开本:720×1000　1/16　印张:11.375　字数:212 千字　插页:1
版次:2007 年 3 月第 1 版　2007 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-05431-8/O·350　定价:17.00 元

内容简介

本书针对成人教育学生的学习特点，在课程内容体系的设计上，坚持以“适度、够用”与循序渐进为原则，引导学生在深入消化初等数学主干知识的基础上，较顺利地进入高等数学阶段的学习。本书删略了一些纯理论性的、而且难度较大的内容，让学生从专业的需要出发学习一些实用的数学知识。为帮助学生解决学习高等数学的困难，我们尝试以初等数学主干知识作铺垫，并采用了成人教育的学生易于接受的传导方式，简明、系统地介绍了极限与连续、导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分、定积分以及多元函数微积分等基本知识。在每章的开头就告诉读者这一章的学习目标和学习内容，分三个层次对该章内容进行了简要的说明，交代必须了解、理解和掌握的知识，从而便于成人教育的学生在学习过程中有重点、分层次地进行学习。在每章的结尾还有“本章小结”，为成人教育的学生复习之用。

本书注重所学内容的应用，配置了相当数量的例题，并介绍了解题方法。

本书可以作为成人高等教育数学课程的教材，也可以作为专科性质的专修班、高职高专相关专业的教材。

前　言

《成人教育高等数学导学》是江西省教育厅教改课题“成人高等教育公共基础课课程改革的研究”的一项研究成果，也是成人高等教育公共基础课系列教材之一。

本书是作者根据成人高等教育高等数学课程的教学基本要求，在多年积累的成人高等教育数学教学经验的基础上，经过提炼、加工和充实而编成的，可供广大成人高等教育的学生及自学者使用。

近年来，成人高等教育《高等数学》的教学时数在压缩，教学要求也有所调整，因此在编写本书时，精简了部分内容，对有些概念的叙述以及少数定理的证明作了一些改变，特别是对于成人教育的学生来说要求过高和难度较大的内容，在书中都进行了合理的删减，这些做法，都是为适应成人高等教育的培养目标与业务要求而采取的大胆尝试。

初等数学相关预备知识及微积分由匡奕群副教授编写，线性代数与概率初步由赖国治副教授编写。《微积分》、《线性代数与概率初步》两本书由江西理工大学继续教育学院赖国治副教授主编，并负责上述两本书的审定、修改、总纂和定稿工作，石哲副教授任副主编。

本书在编辑和出版过程中，江西理工大学继续教育学院院长胡明山副教授对本书编写工作提出了宝贵的建议和重要的修改意见，武汉大学出版社为本教材的出版给予了大力支持与协助，本课题组成员谢忠前教授等，都为本书的顺利出版付出了辛勤的劳动，在此，谨向大家表示衷心的感谢！

在本书的编写过程中，我们参阅并引用了国内外学者的有关著作和论述，并从中受到了启迪，特向他们表示诚挚的敬意！

由于编者的水平所限，书中难免有许多不足或错误之处，恳请读者批评指正。

作　者

2006 年 10 月 10 日

目　录

第一章　预备知识

学习目标:

理解函数、基本初等函数、复合函数、分段函数的概念;了解反函数,函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性概念;掌握复合函数的复合过程.

了解代数方程的基本解法,会解一些常见的代数方程.掌握一些常见的不等式,牢记本书列出的一些基本的三角公式.

掌握数列的基本概念,熟悉数学归纳法.

为了方便大家进一步地学习、较好地掌握微积分中的基本理论和基本方法,在本章中,我们将简单回顾在中学阶段学习过的一些基本概念和方法.

§1.1　集合与函数

1.1.1　集合的概念和基本运算

集合是数学中一个原始的概念,它不能用更简单的概念来描述.能说明集合这个概念的例子不计其数,如全体实数的集合;一个房间中的人员,等等.一般地,我们称集合是具有某种特性的事物的全体.通常我们用大写字母 A,B,C,M,N 等来表示;构成集合的那些事物称为集合的元素,用小写字母 a,b,c,x,y 等来表示.事物 a 是集合 A 的元素,记之为 $a\in A$(a 属于 A).否则 $a\notin A$(a 不属于 A).

由有限个元素构成的集合称为有限集,可以用列举法来表示这样的集合.例如集合 A 是由 0,1,2,3,4,5 构成的数集,则 A 可以记作 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$.

由无穷多个元素构成的集合称为无限集.我们用如下形式来表示无限集

$$M=\{x\mid x\text{ 所具有的特性}\}.$$

例如,全体实数构成的集合 $\mathbf{R}$ 可表示为 $\mathbf{R}=\{x\mid x\text{ 是实数}\}$;又如平面上以原点为圆心、半径为 1 的圆周上的所有点构成的集合 M,如采用 (x,y) 表示平面上点的坐标,则 M 可以表示为

$$M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}.$$

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即当 $x \in A$ 时必有 $x \in B$,则称 A 是 B 的子集,记作 $A \subset B$(A 包含于 B)或 $B \supset A$(B 包含 A).例如全体自然数的集合 $\mathbf{N}$ 是全体整数集合 $\mathbf{Z}$ 的子集,而全体整数集合 $\mathbf{Z}$ 又是全体有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的子集,全体有理数集 $\mathbf{Q}$ 又是全体实数集 $\mathbf{R}$ 的子集,记为 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称集合 A 与 B 相等,记作 $A = B$.例如,设 $A = \{1,2\}$,$B = \{2,1\}$,$C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$,则 $A = B = C$.

另外,我们简单介绍一下集合的运算.

1.集合的并:$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

2.集合的交:$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.

3.集合的差:$A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$,并规定空集为任何集合的子集,例如:$\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\} = \varnothing$.

在本课程中所用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合,如果没有特别声明,以后提到的数均为实数.

区间是一类常用的数集.设 a 和 b 均为实数,且 $a < b$.则 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

类似地,我们还有所谓的半开区间,

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

其中 a,b 称为区间的端点,$b-a$ 称为区间的长度.上述区间都称为有限区间,即区间长度为有限.并且这样的区间可以表示为数轴上长度有限的线段.如图 1-1 所示.

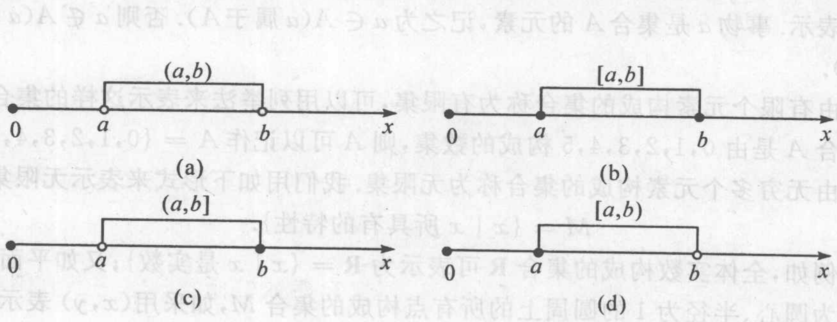

图 1-1

此外还有所谓的无限区间，引进记号 $+\infty$（正无穷大）和 $-\infty$（负无穷大），类似有限区间的表达形式如下：

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}=\{x\mid x\geqslant a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}=\{x\mid x<b\}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}.$$

这些区间同样可以用数轴上的无限长半直线或直线来刻画.

区间的一般通用的记号为“I”，我们经常会说“… 区间 I…”.

一类特殊的区间 —— 邻域，是一个重要的概念. 设 a,δ 均为实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 称为 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，注意到

$$|x-a|<\delta\Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$$

所以 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$. 区间长为 2δ，如图 1-2 所示.

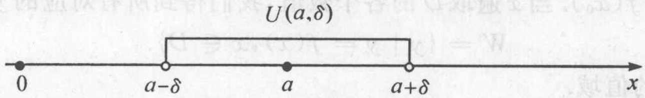

图 1-2

而 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心邻域. 这里，$0<|x-a|<\delta\Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$ 且 $x\neq a$.

1.1.2 函数概念

函数是微积分学所研究的主要对象，为了建立函数的概念，我们先举两个例子.

例 1 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的路程为 s，假定开始下落的时间 $t=0$，则 s 与 t 之间的对应关系可以由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

确定，其中 g 是重力加速度. 假定物体落地的时刻为 $t=T$，那么当 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，s 按照上述公式就有确定的值与之对应.

例 2 圆内接正多边形的周长. 设圆的半径为 r，S_n 为圆内接正 n 边形的周长，则我们有 $S_n=2nr\sin\dfrac{\pi}{n}$，当 n 在 $3,4,5,\cdots$ 自然数中任意取定一个数值时，按上式 S_n 就有确定的数值与之对应.

在上述两个例子中，我们遇到了各种不同的量，g,π,s,t,S_n,n，其中一类量

在考察过程中保持不变，只取一个固定的值，称之为常量，如 g,π；而另一类量在考察过程中可以取不同的数值，称之为变量，如 s,t,n,S_n，它们都是变量. 在习惯上常量用字母 a,b,c,d 等表示，变量用 x,y,z,t 等表示.

1. 函数的概念及表示法

由例 1，例 2 我们可以发现，在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立，而是相互影响和相互制约的. 一个量或一些量的变化会引起另一个变量的改变，如果这些影响是确定的，是按照某一规则的，则我们认为这些变量存在着函数关系.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值，我们得到所有对应的 y 构成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

称之为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以用其他字母来表示，如“φ”，“F”，等等，这时函数就记为 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，等等.

注 1：函数定义中有两个基本要素：定义域 D 和函数关系 f，也就是说函数的确定与否，取决于 D 和 f.

注 2：在函数的定义域的确定中，对于实际问题而言，我们通常根据问题的实际意义确定函数的定义域. 如果函数是用抽象的算式表达，则我们规定：函数的定义域就是自变量所能取的使得算式有意义的一切实数值.

例 3 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f(-x),f\left(\dfrac{1}{x}\right),f(x+1),f(x^2)$.

解 $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$.

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x},\quad f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{2+x},\quad f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

例 4 求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$；　　(2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$；

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$；　　(4) $f(x)=\arcsin(2x-1)$.

解　(1) 因为分式的分母不能为零，所以有 $5x^2+2x\neq 0$

即 $x\neq-\dfrac{2}{5}$，且 $x\neq 0$，定义域：$\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$.

(2) 在偶次根式中，被开方式必须非负，所以有 $9-x^2\geqslant 0$，即 $-3\leqslant x\leqslant 3$. 定义域：$[-3,3]$.

(3) 因为在对数式中，真数必须大于零，所以有

$$4x-3>0，即\ x>\frac{3}{4}.\ 定义域：\left(\frac{3}{4},+\infty\right).$$

(4) 反正弦或反余弦中式子的绝对值小于等于1，所以有 $|2x-1|\leqslant 1$. 解之得 $0\leqslant x\leqslant 1$. 所以定义域：$[0,1]$.

下面我们再举几个函数的例子：

例 5　函数 $y=x^2$，其图形是一条抛物线，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 值域 $W=[0,+\infty)$，如图 1-3 所示.

例 6　函数 $y=x^3$，其图形是一条立方抛物线，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$. 值域 $W=(-\infty,+\infty)$，如图 1-4 所示.

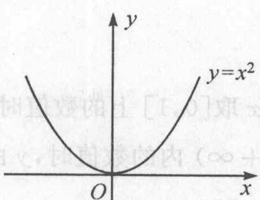

图 1-3

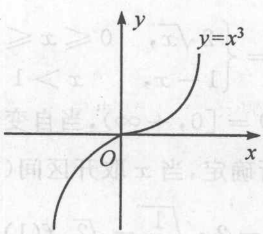

图 1-4

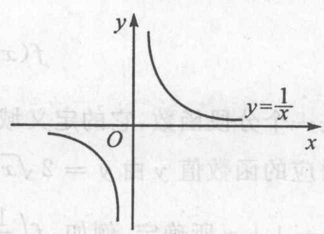

图 1-5

例 7　函数 $y=\dfrac{1}{x}$，其图形称为等轴双曲线，其定义域 $D=\mathbf{R}\backslash\{0\}$，值域 $W=\mathbf{R}\backslash\{0\}$. 如图 1-5 所示.

例 8　数 x 的绝对值记为 $|x|$，如果将 x 看做变量，则有函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，它的另一表达形式为 $f(x)=\sqrt{x^2}$，其图形如图 1-6 所示.

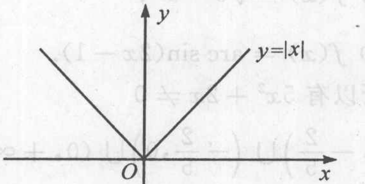

图 1-6

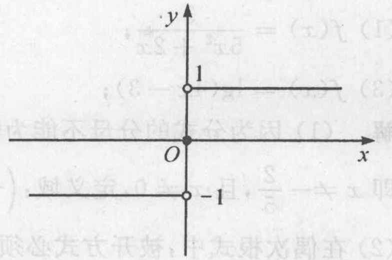

图 1-7

例 9 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域$D=(-\infty,+\infty)$,值域$W=\{-1,0,1\}$.其图形如图 1-7 所示,对任何实数 x,有

$$x=|x|\cdot\operatorname{sgn}x.$$

从上述两个例子我们可以发现:有时一个函数是用几个式子来表示的,这种在不同范围中用不同的式子表示的函数称为分段函数.

例 10 函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1-x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数,它的定义域$D=[0,+\infty)$,当自变量 x 取$[0,1]$上的数值时,对应的函数值 y 由 $y=2\sqrt{x}$ 所确定,当 x 取开区间$(1,+\infty)$ 内的数值时,y 由 $y=1+x$ 所确定. 例如:$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,$f(1)=2\sqrt{1}=2$. $f(3)=1+3=4$. 其图形如图 1-8 所示.

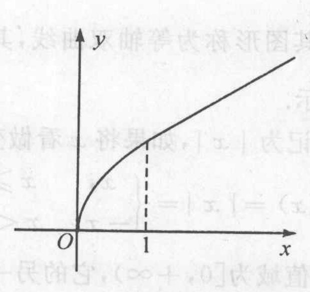

图 1-8

2. 函数的几种特性

(1) 有界性. 函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X \subset D$,如果存在正数 M,使得对任一 $x \in X$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界;如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 X 内无界.

注:有界的概念与数集 X 紧密相关. 例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,其定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$f(x)$ 在 $[1,2]\subset D$ 上有界. 但在 $(0,1)$ 内无界.

若 $X=D$,则 $f(x)$ 称为有界函数,如 $f(x)=\sin x$,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,而对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,均有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $f(x)=\sin x$ 为有界函数.

(2) 单调性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的,如图 1-9 所示.
如果对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2).$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的,如图 1-10 所示.

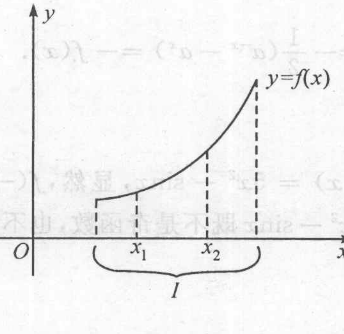

图 1-9

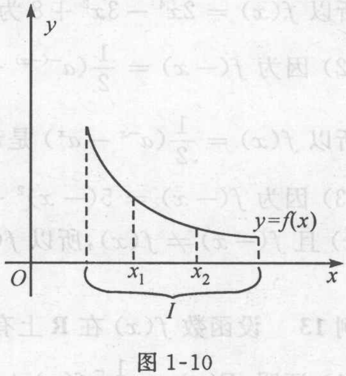

图 1-10

注 1:函数的单调性与区间 I 有关,I 为单调区间. 如 $y=x^2$,它在 $[0,+\infty)$ 内单调增加,而在 $(-\infty,0]$ 内单调减少;在 $(-\infty,+\infty)$ 内则不是单调函数.

注 2:若定义中的 $I=D$,则称 $f(x)$ 为单调函数. 如 $y=x^3$,它在 $(-\infty,+\infty)$ 内总是单调增加的.

例 11 讨论函数 $y=2x+3$ 在其定义域上的单调性.

解 函数 $y=2x+3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取两点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,于是

$$f(x_1)-f(x_2)=(2x_1+3)-(2x_2+3)=2(x_1-x_2)<0$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $y=2x+3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

(3) 奇偶性:设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$),如果对任一 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数;如果对任一 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如:$f(x)=x^2$ 是偶函数,这是因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,$f(x)=x^3$ 为奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

注 1:函数奇偶性的讨论必须要求函数的定义域关于原点对称.

注 2:并不是所有的函数均能分奇、偶,即存在非奇非偶的函数.如:$f(x)=x^2+x$.

注 3:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 12 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=2x^4-3x^2+8$;

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)\quad(a>0,a\neq 1)$;

(3) $f(x)=5x^2+\sin x$.

解 (1) 因为 $f(-x)=2(-x)^4-3(-x)^2+8=2x^4-3x^2+8=f(x)$

所以 $f(x)=2x^4-3x^2+8$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=\dfrac{1}{2}(a^{-(-x)}-a^{-x})=-\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x)$.

所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=5(-x)^2+\sin(-x)=5x^2-\sin x$,显然,$f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$,所以 $f(x)=5x^2-\sin x$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

例 13 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义.

(1) 证明:$F(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 是偶函数.

(2) 证明:定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 都可以表示成奇函数与偶函数之和.

证明 (1)
$$\begin{aligned}F(-x)&=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]\\&=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=F(x)\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 是偶函数.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]\triangleq F(x)+G(x)$