GAODENG ZHIYE JIAOYU

主　编◎曹瑞成
主　审◎曹喜望
副主编◎姜海勤
周　晓

高等职业教育课程改革示范教材

工程数学基础

◎线性代数
◎级数与积分变换
◎概率与数理统计
◎图论简介

南京大学出版社

高等职业教育课程改革示范教材

工程数学基础

◎主　编　曹瑞成
◎主　审　曹喜望
◎副主编　姜海勤　周　晓

南京大学出版社

内容简介

本书是为高职高专理工类学生编写的,"以应用为目的,以必需够用为度"是编写本书的基本原则. 考虑到新形势下高等职业教育的发展,编者结合多年来的教学实践与课程改革的需要,力求做到本书内容"易学,实用". 本书内容共分十章:行列式、矩阵、线性方程组、无穷级数、傅里叶变换、拉普拉斯变换、随机事件与概率、一维随机变量及其数字特征、数理统计基础、图论简介,每章配有一定数量的习题,书末附有参考答案.

本书作为高职院校的教学用书,可供不同专业在教学时选用相应的内容. 本书还可作为成人高校、夜大和函授大学等层次的教学用书,亦可作为广大自学者的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学基础 / 曹瑞成主编. —南京:南京大学出版社,2009.1

高等职业教育课程改革示范教材

ISBN 978-7-305-05709-0

Ⅰ. 工… Ⅱ. 曹… Ⅲ. 工程数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 210808 号

出 版 者 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮编 210093
网　　址 http://press.nju.edu.com
出 版 人 左 健

丛 书 名 高等职业教育课程改革示范教材
书　　名 工程数学基础
主　　编 曹瑞成
责任编辑 吴 华　　编辑热线 025-83592146

照　　排 南京玄武湖印刷照排中心
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 787×1 092 1/16 印张 12.25 字数 294 千
版　　次 2009 年 1 月第 1 版 2009 年 1 月第 1 次印刷
印　　数 1~3 500
ISBN 978-7-305-05709-0
定　　价 23.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 nupress1@public1.ptt.js.cn

高等职业教育课程改革示范教材
《工程数学基础》指导委员会

前　言

本书的编写以高职院校的人才培养目标为依据，努力体现“以应用为目的、以必需够用为度”的高职院校教学基本原则，同时充分吸收了一线教师在教学与改革中的经验，兼顾了学生的可持续性发展. 本教材内容共分十章：行列式、矩阵、线性方程组、无穷级数、傅里叶变换、拉普拉斯变换、随机事件与概率、一维随机变量及其数字特征、数理统计基础、图论简介，书末附有参考答案.

本书内容具有以下特点：

(1) 充分考虑高职院校学生的数学基础和学习能力，在尽可能保持数学学科系统性的基础上，力求突出实用性，强调数学概念与实际问题的联系.

(2) 坚持理论够用为度的原则，精选教学内容，降低纯理论难度，淡化复杂的理论推导，对一些定理只给出解释或简单的几何说明，充分利用几何图形，直观地帮助学生理解相关概念和理论.

(3) 基本概念的引入尽可能从实际背景入手，在叙述基本概念、基本原理和基本解题技巧时，做到循序渐进、通俗易懂，不要求过分复杂的计算和证明.

(4) 注重基础知识、基本方法和基本技能的训练，注重对学生的计算能力、推理能力和抽象概括能力的培养.

(5) 各章末的习题配备类型合理，深度和广度适中(加“*”的习题为难度较大的选做题)，“本章小结”便于学生复习、巩固和掌握本章知识重点，理解知识之间的内在联系.

本书的教学时数约为85学时，教学内容可供理工类不同专业的需要选学.

本书由曹瑞成担任主编，姜海勤、周晓担任副主编. 本书的编写分工为：周晓(第1～3章)，曹瑞成(第4章、第7～9章)，姜海勤(第5～6章)，李建龙(第10章). 本书由曹瑞成修改、统稿、定稿.

本书由南京航空航天大学曹喜望教授担任主审，他对本书的编写提供了宝贵的意见，对此，编者表示诚挚的谢意.

本书的编写还得到了扬州职业大学领导的大力支持和帮助，对此，编者表示由衷的敬意.

虽然编者在本书的编写工作中非常认真、努力，但宥于学术水平，书中难免有不妥和疏漏之处，敬请广大师生和读者批评指正.

编　者

2008年10月

目　录

第 1 章　行 列 式

行列式是线性代数中的一个重要的基本概念,它是为了求解未知量个数和方程个数相同的线性方程组而引入的. 在现代科学技术和生产经营管理活动中,经常遇到可以归结为求解线性方程组的问题. 本章由二元线性方程组解的讨论,引出二、三阶行列式,然后推广到 n 阶行列式,给出了 n 阶行列式的性质及计算方法. 此外还介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Crammer)法则.

1.1　行列式的概念

1.1.1　二阶行列式

设含有两个未知量 x_1,x_2 及两个方程的线性方程组(即未知量的最高次幂是 1 的方程组)为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,则可以用加减消元法求得方程组(1-1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-2}$$

为便于记忆和应用,引入二阶行列式的概念. 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

称为二阶行列式,它由 2^2 个数构成,表示一个算式,其值为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中,数 $a_{ij}\,(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1-3)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行;第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆. 把 a_{11} 到 a_{22} 的对角线称为主对角线,a_{12} 到 a_{21} 的对角线称为副(或次)对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两个元素之积所得的差.

例如,
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 5-(-1)\times 3 = 13.$$

利用二阶行列式的概念，若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么式(1-2)可写成

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

注意 这里的分母 D 是由方程组(1-1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

【例 1-1】 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-2\times(-2)=7\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12\times1-1\times(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\times1-2\times12=-21,$$

所以方程组的解为 $\quad x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{14}{7}=2,\quad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-21}{7}=-3.$

1.1.2 三阶行列式

与二阶行列式类似，可以定义三阶行列式. 记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

称为三阶行列式，它由 3^2 个数构成，表示一个算式，其值为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

即
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

注意 三阶行列式仍有对角线法则，即三阶行列式的值等于主对角线上三个元素乘积之和，减去副对角线上三个元素乘积之和(如图1-1).

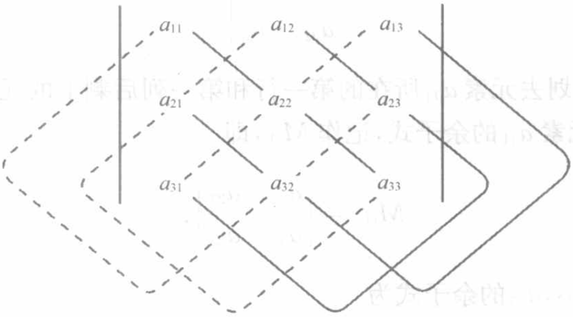

图1-1

【例1-2】 计算三阶行列式
$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 $D=2\times(-2)\times(-2)+(-1)\times1\times(-3)+3\times1\times1$
$-2\times1\times1-(-1)\times1\times(-2)-3\times(-2)\times(-3)$
$=8+3+3-2-2-18=-8.$

【例1-3】 解方程
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 5 & x^2 \end{vmatrix}=0.$$

解 方程左端的三阶行列式
$$D=3x^2+4x+10-5x-2x^2-12=x^2-x-2,$$
由 $x^2-x-2=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=2$.

1.1.3 n阶行列式

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为研究四阶及更高阶行列式，下面先介绍有关代数余子式的知识，然后引出n阶行列式的概念.

由二阶行列式和三阶行列式的定义，不难发现如下关系式.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

其中

$$\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

是原三阶行列式 D 中划去元素 a_{11} 所在的第一行和第一列后剩下的元素按原来顺序组成的二阶行列式，称它为元素 a_{11} 的余子式，记作 M_{11}，即

$$M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

类似地，分别记 a_{12}，a_{13} 的余子式为

$$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},\qquad M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},$$

并且定义

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\quad(i=1,2,3;j=1,2,3)$$

为元素 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 的代数余子式.

因此，三阶行列式也可以表示为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.\tag{1-5}$$

这样，求三阶行列式的问题就可以转化为求二阶行列式的问题，这种求行列式的方法称为降阶法，式(1-5)的右端称为按行列式 D 的第一行展开的展开式.

【例 1-4】 利用降阶法计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&0&3\\1&-5&1\\-3&4&-2\end{vmatrix}$$

解 $D=2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5&1\\4&-2\end{vmatrix}+0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\-3&-2\end{vmatrix}+3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&-5\\-3&4\end{vmatrix}$

$=2[(-5)\times(-2)-4\times1]+3[1\times4-(-5)\times(-3)]$

$=-21.$

仿照二、三阶行列式，可以把行列式推广到一般情形.

定义 1-1 记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它由 n^2 个数构成，代表一个算式，其值为

① 当 $n=1$ 时，规定 $D=|a_{11}|=a_{11}$；

② 当 $n\geqslant 2$ 时，将行列式按第一行展开，得

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}. \tag{1-6}$$

对于 n 阶行列式，元素 $a_{ij}(i=1,2,3,\cdots,n;j=1,2,3,\cdots,n)$ 的余子式和代数余子式的定义与三阶行列式的余子式和代数余子式的定义相同. 显然，n 阶行列式的余子式和代数余子式均为 $n-1$ 阶行列式.

例如，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 8 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别是

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 8 & -1 & 4 \end{vmatrix},\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 8 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

【例 1-5】 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 8 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 由式(1-6)得

$$D=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}+(-2)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}+$$

$$1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 8 & -1 & 4 \end{vmatrix}+5\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 8 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=531-120+280-995=-304.$$

【例 1-6】 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ e & 0 & 0 & f \end{vmatrix}.$$

解 由式(1-6)得

$$D=a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}c&0&0\\0&d&0\\0&0&f\end{vmatrix}+b\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&c&0\\0&0&d\\e&0&0\end{vmatrix}$$

$$=ac\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}d&0\\0&f\end{vmatrix}-bc\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&d\\e&0\end{vmatrix}$$

$$=acdf-bced.$$

【例 1-7】 计算 n 阶下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

解 由式(1-6)得

$$D=a_{11}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{33}&0&\cdots&0\\a_{43}&a_{44}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n3}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由例 1-7 可知，n 阶下三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积. 特别地，对角行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.2 行列式的性质与计算

1.2.1 行列式的性质

为了简化行列式的计算，下面不加证明而直接引入行列式的性质.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

例如，
$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 8 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 8 \\ -2 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

性质 1－1 行列式与它的转置行列式相等.

例如，
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 8 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 8 \\ -2 & 7 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

由性质 1－1 可得上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 1－2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

注：以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换第 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换第 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

例如，
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 8 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_4}-\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

推论 1－1 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

例如，
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 8 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

性质 1－3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

注：第 i 行(列)乘以 k，记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

例如，
$$\begin{vmatrix} 3 & 2\times(-2) & 1 & 5 \\ 1 & 2\times 7 & 0 & 3 \\ 2 & 2\times 0 & 3 & 6 \\ 8 & 2\times(-1) & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 8 & -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

推论 1-2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

注:第 i 行(列)提出公因子 k,记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

例如，
$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 & -3 \\ 3 & 14 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2\div 2} 2\times\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

性质 1-4 如果行列式中某两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

例如，
$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 10 \\ 3 & 7 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 1-5 如果行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如,第 i 行的元素都是两数之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1-6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上,行列式不变.

注:以数 k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上,记作 r_i+kr_j(或 c_i+kc_j).

例如，

$$\begin{vmatrix}3&-2&1&5\\1&2&0&3\\2&0&-1&1\\8&-1&-2&4\end{vmatrix}\overline{\overline{r_4+(-4)r_3}}\begin{vmatrix}3&-2&1&5\\1&2&0&3\\2&0&-1&1\\8+2(-4)&-1+0(-4)&-2+(-1)(-4)&4+1(-4)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3&-2&1&5\\1&2&0&3\\2&0&-1&1\\0&-1&2&0\end{vmatrix}.$$

性质 1-7 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

性质 1-7 称为行列式按第 i 行(或第 j 列)展开的拉普拉斯(Laplace)展开式.式(1-6)是性质 1-7 在 i 取 1 的特殊情形.

推论 1-3 行列式的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n).$$

【例 1-8】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&-1&5\\2&-4&7\\6&-2&10\end{vmatrix}.$$

解 注意到第 3 行各元素是第 1 行各元素的 2 倍,即 1,3 两行对应元素成比例,所以由性质 1-4,有

$$D=\begin{vmatrix}3&-1&5\\2&-4&7\\6&-2&10\end{vmatrix}=0.$$

【例 1-9】 设三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2 & 5\\ 2 & 0 & 6\\ 8 & -1 & 4\end{vmatrix}.$$

(1) 按第二行展开,并求其值;

(2) 按第三列展开,并求其值.

解 (1) 将 D 按第二行展开得

$$\begin{aligned}D&=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}\\ &=2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -1 & 4\end{vmatrix}+0\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 8 & 4\end{vmatrix}+6\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 8 & -1\end{vmatrix}\\ &=2\times(-1)\times(-3)+0\times(-28)+6\times(-1)\times 13\\ &=-72.\end{aligned}$$

(2) 将 D 按第三列展开得

$$\begin{aligned}D&=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}\\ &=5\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 8 & -1\end{vmatrix}+6\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 8 & -1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ &=5\times(-2)+6\times(-1)\times 13+4\times 4\\ &=-72.\end{aligned}$$

【例 1-10】 设

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=2,$$

求

$$D=\begin{vmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 2a_{11}+3a_{31} & 2a_{12}+3a_{32} & 2a_{13}+3a_{33}\end{vmatrix}.$$

解 $D\xlongequal{r_3+(-3)r_1}\begin{vmatrix}a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13}\end{vmatrix}\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_1}-\begin{vmatrix}2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_1\div 2}-2\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-4.$$

1.2.2 行列式的计算

因为三角行列式的值等于主对角线上各元素的乘积,所以对于一个 n 阶行列式,通常是