21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

太原理工大学数学系 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

太原理工大学数学系　编

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书内容包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验、方差分析与正交设计、回归分析、MATLAB在概率统计中的应用，书后配有部分习题答案.

本书内容丰富，深入浅出，宜于教学. 可作为非数学各专业的本科生教材，也可供相关教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/太原理工大学数学系编. —北京：科学出版社，2009

21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-025177-0

Ⅰ.概… Ⅱ.太… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2009) 第137559号

责任编辑：王 静 房 阳／责任校对：李奕萱
责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2009年8月第一次印刷 印张：16 1/4
印数：1—6 500 字数：319 000

定价：22.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

随着科学技术的进步与发展, 特别是随着计算机的普及和计算技术的提高, 概率统计的应用已渗透到数学、物理、化学、天文、地理、生物以及工程、经济、管理、人文、社科等各个学科和领域, 概率统计的思想和方法已成为现代专业人士必须掌握的一项最重要的知识和技能. 概率统计不仅是研究随机现象中必然规律的一门学科和工具, 而且在诸多非随机的数学分支中也发挥着越来越巨大的作用, 日益凸显出它与其他学科间密切的内在联系. 可以说, 现在已经没有一个学科或领域能够真正离得开概率统计了.

本书是专门为非数学专业学生编写的一本概率统计入门书. 力求兼顾严谨与直观, 希望学生在系统学习丰富的概率统计知识时, 既能感受到所学知识的有趣与有用, 也能体会到学习的快乐和收获的愉悦.

本书在太原理工大学数学系编写出版的《线性代数　概率论与数理统计》的基础上重新编写而成, 并增加了“MATLAB 在概率统计中的应用”一章. 参加编写的有丁万刚 (第 1、2 章)、李玉瑛 (第 3~5 章)、景英川 (第 6~8 章)、王玉清 (第 9 章) 和吕士钦 (第 10、11 章), 全书由卢准炜教授统稿和整理. 本书的出版得到科学出版社的大力支持, 特此表示衷心的感谢.

书中不妥之处, 恳请读者批评指正.

编　者

2009 年 5 月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论起源于人们对随机现象的研究, 迄今已经形成了一套完整的理论体系, 且成为数学的一个重要分支. 它作为研究随机现象的主要工具, 在自然科学、工程技术及社会科学中有着广泛的应用, 如质量管理、自动控制、医药和农业实验、金融保险及日常生活中的天气预报、自然灾害的预测等. 并形成了信息论、排队论、可靠性理论等学科. 它也是数理统计的基础.

1.1　预 备 知 识

1.1.1　计数公式

乘法原理: 若完成一件事情必须要经过 r 个步骤, 其中第一步有 n_1 种不同的方法, 第二步有 n_2 种不同的方法, $\cdots$, 第 r 步有 n_r 种不同的方法, 则完成这件事情共有 $\prod\limits_{i=1}^{r} n_i$ 种不同的方法.

加法原理: 若完成一件事情有 r 类方案, 其中第一类方案中有 n_1 种不同的方法, 第二类方案中有 n_2 种不同的方法, $\cdots$, 第 r 类方案中有 n_r 种不同的方法, 则完成这件事共有 $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i$ 种不同的方法.

排列: 从 n 个不同的元素中按顺序取 k 个排成一列 $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 称为一个排列. 将其所有可能的排列种数记为 A_n^k, 利用乘法原理容易得到

$$\mathrm{A}_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

特别地, 当 $k=n$ 时, 称为全排列. 这时全排列种数为 $P_n = \mathrm{A}_n^n = n!$.

组合: 从 n 个不同元素中任取 k 个元素组成一组 $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 称为一个组合. 所有可能的组合数记为 C_n^k 或 $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

从 n 个元素中取 k 个元素排成一列可分为两步进行, 首先从 n 个元素中取 k 个组成一组, 共有 C_n^k 种方法, 然后再对取出的 k 个元素进行排列, 共有 $k!$ 种方法,

利用乘法原理有：$\mathrm{A}_n^k = \mathrm{C}_n^k \cdot k!$, 即

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

它是 $(1+x)^n$ 展开式中 x^k 的系数. 并且有 $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$.

乘法原理与加法原理在古典概率的计算中非常有用, 它也是推导许多组合计数公式的工具.

例 1　从 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数中任取四个, 问能组成多少个四位偶数?

解法一　组成的四位数是偶数, 要求末位为 0, 2, 4, 可先选末位数, 共 C_3^1 种, 前三位数的选取方法有 A_5^3 种, 而 0 不能作首位数, 减去 0 作首数, 选 2, 4 作末位数, 最后从剩余四个数中选两个数排列, 所以组成的偶数个数为

$$\mathrm{C}_3^1 \cdot \mathrm{A}_5^3 - \mathrm{C}_1^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 156.$$

解法二　首先考虑 0 作为尾数的四位偶数有 $\mathrm{C}_1^1 \cdot \mathrm{A}_5^3$ 种, 再考虑 2, 4 选一作尾数, 从其他不为零的四个数选一作首数, 最后从剩余的四个数中选两个数排列有 $\mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{A}_4^2$ 种, 由乘法原理和加法原理有

$$\mathrm{C}_1^1 \cdot \mathrm{A}_5^3 + \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{A}_4^2 = 156.$$

例 2　将 n 个不同的元素分为 r 组, 各组元素的数目分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ $\left(\sum_{i=1}^{r} k_i = n\right)$, 由乘法原理易知, 分法的总数为

$$\mathrm{C}_n^{k_1} \mathrm{C}_{n-k_1}^{k_2} \cdots \mathrm{C}_{k_r}^{k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}.$$

如将 15 名新生任意分到三个班中, 其中一班 4 名、二班 5 名、三班 6 名, 共有 $\dfrac{15!}{4!5!6!}$ 种分法.

1.1.2　集合及其运算

集合是集合论中的一个最基本的概念, 它指具有某类共同性质的事物的全体. 通常集合用大写字母 A, B, C 表示. 构成集合 A 的每个事物称为集合 A 的元素, 元素一般用小写字母 a, b, c 表示. 若 a 是集合 A 中的元素, 记为 $a \in A$, 读作“a 属于 A”; 反之, 若 a 不是 A 中元素, 记为 $a \notin A$, 读作“a 不属于 A”. 若一个集合的元素与自然数一一对应, 则称该集合为可数 (可列) 集合.

关于集合之间的关系, 常见的有以下几种 (图 1-1).

(1) 子集: 设 A, B 为两个集合, 若 A 中所有元素都是 B 中元素, 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subset B$, 读作“A 含于 B”, 或者“B 包含 A”.

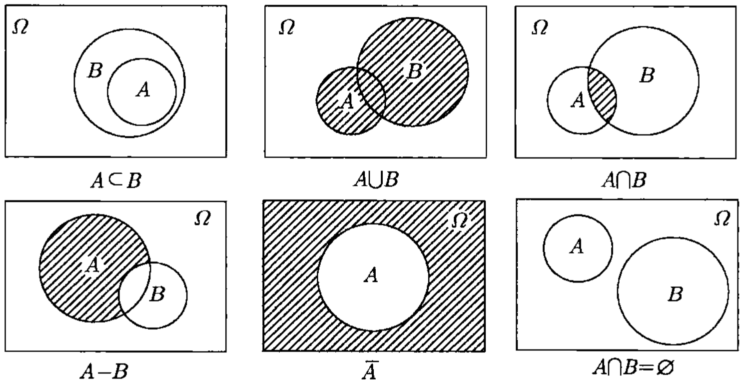

图 1-1

不含有任何元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$, 空集是任何集合的子集. 容易理解, 若 $A \subset B$, $B \subset C$, 则一定有 $A \subset C$; 称相互包含的集合为相等集合, 即若 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 则 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

(2) 并集: 由属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 读作“A 并 B”.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

显然, $A \cup \varnothing = A$. 若 $B \subset A$, 则一定有 $A \cup B = A$. 并集也称为和集.

(3) 交集: 由同时属于 A 和 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 读作“A 交 B”.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

显然, 对任意集合 A, $A \cap \varnothing = \varnothing$. 若 $B \subset A$, 则 $B \cap A = B$. 交集也称为积集. $A \cap B$ 也常写作 AB.

(4) 差集: 由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A - B$, 读作“A 减 B”.

$$A - B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

若 A 与 B 不相交, 即 $A \cap B = \varnothing$, 则 $A - B = A$. 特别地, 若 Ω 是包含所有元素的集合, 则称之为全集, 则称 $\Omega - A$ 为集合 A 在全集 Ω 中的余集或补集, 记为 $\overline{A}$ 或 A^{c}. 容易验证 $\overline{\overline{A}} = A$.

关于集合之间的运算规律, 常见的有以下几条.

(1) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

(2) 结合律：

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

(3) 分配律：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

(4) 德摩根 (De Morgan) 定律：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

上述运算法则可以推广到任意有限多个及可数无穷多个集合的情形.

例 3 证明 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

若 $x\in\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}$, 则 $x\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, 即对任意 i, $x\notin A_i$ 亦即对任意 i, $x\in\overline{A}_i$, 从而 $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$, 所以 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$. 同样可证 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i}\supset\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

习 题 1.1

1. 计算从八个不同的元素中任取三个组成的排列数.

2. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这七个数中任取三个组成三位数, 问共组成多少个偶数?

3. 由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数共能组成多少个没有重复数字的五位数? 其中被 5 整除的有多少个?

4. 从 100 件产品中抽取 4 件进行检查, 有多少种不同的抽取方法? 其中某一件恰好被抽到的抽法有多少种?

5. 设电话号码由七个数字组成, 假定每个用户只用一个电话号码, 问电话局共能容纳多少个用户? 数字均不相同的电话号码有多少个?

6. 某班有 20 个男同学、10 个女同学, 从中任选 3 个男同学、2 个女同学组成一个科研小组, 有多少种不同的选取方法?

7. 集合 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{3,4,5\}$, $C=\{5,6,7\}$ 全集 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,9,10\}$. 写出下列各集合：

(1) $\overline{A}\cap B$;

(2) $A-B$;

(3) $\overline{A\cap(B\cup C)}$;

(4) $\overline{A\cap\overline{B}\cap C}$.

8. 证明下列各集合关系的等式：

(1) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(2) $\overline{\overline{A}}=A$;

(3) $A\cap\overline{B}=A-B$;

(4) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$.

1.2 随机事件

1.2.1 随机试验

人们在生产实践和科学试验中发现, 自然界和社会上所观察到的现象大体可分为两类：一类是事前可预料的, 即在一定条件下必然发生或必然不发生的现象, 我们把这一类现象称为必然现象或确定性现象; 另一类是事前不可预料的, 即在相同条件下重复进行观察或试验时, 可能出现这样的结果, 也可能出现那样的结果, 称为偶然现象或随机现象. 人们发现随机现象在大量重复试验或观察下它的结果呈现出某种规律性, 即大量重复试验下随机现象发生的频率具有稳定性, 称为统计规律性. 通常, 我们把对自然现象的观察或进行一次试验, 统称为一个试验.

例 1 试验 E_1 为掷一枚均匀的硬币, 观察正面 H(有国徽的一面), 反面 T 出现的情况.

例 2 试验 E_2 为掷一枚骰子, 观察点数出现的情况.

例 3 试验 E_3 为一袋中装有编号 1、2、3、4 的四个球, 从袋中任取一球后, 不放回袋中, 再从中任取一球, 观察两次取球的结果.

例 4 试验 E_4 为记录某电话交换台在早 $8:00\sim8:10$ 接到的呼唤次数.

例 5 试验 E_5 为从一批灯泡中任取一只, 测试它的寿命.

上面所举的 5 个试验例子, 尽管内容各异, 但它们有着共同的特点. 例如试验 E_1, 它有两种可能结果, 出现 H 或出现 T, 但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T, 这个试验可以在相同的条件下重复地进行. 又如试验 E_4, 在某一天早 $8:00\sim8:10$ 接到的呼唤次数可能为 0, 或 1, 或 2, $\cdots$, 但在试验之前不能确定会有几次呼唤, 这个试验可以在相同的条件下重复进行. 再如试验 E_5, 我们知道灯泡的寿命 $t\geqslant0$, 但在测试之前不能确定它的寿命有多长, 这个试验也可以在相同的条件下重复进行. 概括起来, 所谓随机试验就是指这样的试验, 它可以在相同的条件下重复进行, 试验的所有可能发生的结果是已知的, 但每次试验的结果事前是不能确定的. 以后我们所说的试验都是指随机试验.

概率论不研究随机现象形成的原因, 只关注随机试验的结果及其发生的可能性大小. 例如掷硬币, 现有的力学系统的确定性理论及最先进的测量技术远不足以告诉我们哪个面朝上. 另外, 随机现象也是有条件的. 如掷硬币, 要求地面足够硬, 抛

的足够高, 硬币均匀且是正反两面. 这样经过大量重复试验或观察下它的结果才会呈现出统计规律性.

1.2.2　样本空间与事件

随机事件 (简称事件) 是概率论中的一个基本概念, 也是随机现象在某方面的具体表现和描述.

为了借助集合论的概念描述随机事件, 需引入样本空间的概念. 随机试验 E 中不能再分的结果, 叫做 E 的基本结果.

例如, 在 E_1 中, “出现 H”、“出现 T”; 在 E_4 中, “交换台接到的呼唤次数为 6”; 在 E_5 中, “测得灯泡的寿命为 1200 小时”等, 都是相应试验的基本结果.

值得注意的是, 一个试验结果是否为基本结果是相对于试验的目的而言, 不是绝对的. 例如, 在 E_5 中, 若考虑的是灯泡寿命的长短, 那么基本结果为“灯泡的寿命为 $t(t \geqslant 0)$”, 故有不可数无穷多个基本结果. 若按寿命取值的大小将灯泡分为优质品、合格品或次品, 那么就只有三个基本结果, 即“取得灯泡为优质品”, “取得灯泡为合格品”,“取得灯泡为次品”.

对于一个随机试验 E, 把 E 中的所有基本结果所组成的集合称为 E 的基本空间或样本空间, 记作 Ω. Ω 中的元素就是试验 E 的基本结果, 基本结果也称样本点, 记作 ω.

例如, 在 E_1 中, 基本结果有两个, 即“出现 H”、“出现 T”, 所以样本空间中含有两个样本点, $\omega_1 =$“出现 H”, $\omega_2 =$“出现 T”, 则样本空间 Ω_1 为

$$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

在 E_2 中, 若以 k 表示“出现 k 点”这个基本结果, 则由所有基本结果组成的集合

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

就是 E_2 的样本空间.

在 E_3 中, 由于两次取球的标号不能重复, 按排列知识共有 $\mathrm{A}_4^2 = 12$ 种取球的结果, 所以 E_3 中有 12 个基本结果. 故其样本空间 Ω_3 中含有 12 个样本点, 即

$$\Omega_3 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$$

在 E_4 中, 若以 k 表示基本结果“交换台接到的呼唤次数为 k”, 则 Ω_4 中含有可数无穷多个样本点, 即

$$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

在 E_5 中, 若以 t 表示基本结果"任取一只灯泡, 测试其寿命为 t", 则 Ω_5 中含有不可数无穷多个样本点, 即

$$\Omega_5=\{t:t\geqslant 0\}.$$

同样应当注意的是, 样本空间的元素取决于试验的目的. 例如, 在 E_5 中, 如果只考虑取得灯泡的优劣, 则样本空间可取为

$$\Omega_5'=\{\text{优质品},\text{合格品},\text{次品}\}.$$

引入样本空间之后, 事件均可看成是样本空间的子集, 一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 当事件中只含有一个样本点 (基本结果) 时, 称为基本事件. 一般事件都可由基本事件通过集合运算复合而成. 例如, 在试验 E_2 中, A 表示"出现偶数点", 则 A 为 Ω_2 的子集, 即

$$A=\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}=\{2,4,6\}.$$

在一次试验中, 当且仅当 A 所含的基本结果中有一个出现时, 称事件 A 发生. 由所有不属于 A 的样本点所组成的事件, 称为 A 的逆事件, 记为 $\overline{A}$, 显然 $\overline{A}$ 发生则 A 不发生.

$\varnothing$ 与 Ω 作为 Ω 的子集也可称为事件. 易见, 每次试验中, Ω 必然发生, 故称为必然事件. 每次试验中 $\varnothing$ 必然不发生, 故称为不可能事件. 这两个事件都是确定性事件, 我们为讨论方便, 把它们当作特殊的随机事件. 值得注意的是, 对较复杂的样本空间, 并不是所有的 Ω 的子集都是事件.

1.2.3 事件的关系与运算

为了研究事件的需要, 下面介绍事件之间的几种主要关系以及事件的运算. 设试验 E 的样本空间为 Ω, A, B, C, $A_i(i=1,2,\cdots)$ 为事件, 均为 Ω 的子集.

由事件发生的定义又知:

(1) 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称事件 A 为事件 B 的子事件, 记为 $A\subset B$. 为了方便起见, 规定对任一事件 $A,\varnothing\subset A\subset\Omega$. 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$, 那么 $A\subset C$; 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, 那么称 A 与 B 相等, 记为 $A=B$.

(2) 事件 A 与事件 B 至少有一个发生, 这一事件称为事件 A 与事件 B 的和事件, 记为 $A\cup B$.

(3) 事件 A 与事件 B 同时发生, 这一事件称为事件 A 与事件 B 的积事件, 记为 $A\cap B$ 或 AB.

(4) 事件 A 发生而事件 B 不发生, 这一事件称为事件 A 与事件 B 的差事件, 记为 $A-B$. $\overline{A}$ 是 Ω 与 A 的差事件, $\overline{A}=\Omega-A$.

(5) 若事件 A 与事件 B 不能同时发生, 则称 A 与 B 为互斥事件或互不相容事件, 记为 $AB = \varnothing$. 对于互斥事件 A、B, 可以把和事件 $A \cup B$ 记作 $A + B$. 如果一组事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中任意两个都互斥, 那么称这组事件两两互斥. 对于一组两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots$, 通常把事件 $\bigcup\limits_n A_n$ 记作 $\sum\limits_n A_n$.

可见, 事件的运算法则与集合的运算法则是相同的, 具体见 1.1 节集合的运算法则.

一个较复杂的事件可以通过事件的运算法则表示成多种等价的形式, 因此可根据具体问题的需要恰当地选择一种表示形式, 这在概率论中非常有用. 比如 "A 与 B 至少发生一个" 这一事件可以表示成 $A \cup B$, 也可以表示成 $A + \overline{A}B$, 这两个事件是相等的, $A \cup B$ 在形式上简单, 而 $A + \overline{A}B$ 则是两个互斥事件的和事件.

例 6　设 A、B、C 是三个事件, 则

(1) "A 发生而 B、C 都不发生" 可表示为 $A\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A - B - C$ 或 $A - (B \cup C)$;

(2) "A 与 B 发生而 C 不发生" 可表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB - C$ 或 $AB - ABC$;

(3) "A、B、C 三个事件至少发生两个" 可表示为 $AB \cup AC \cup BC$ 或 $ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$.

例 7　向指定目标射击三枪, 分别用 A_1、A_2、A_3 表示第一、第二、第三枪击中目标, 试用 A_1、A_2、A_3 表示以下事件:

(1) 只有第一枪击中;

(2) 至少有一枪击中;

(3) 恰好有一枪击中;

(4) 至少有两枪击中;

(5) 三枪都未击中.

解　(1) 只有第一枪击中, 说明 A_1 发生, 而 A_2、A_3 都不发生, 可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $A_1 - A_2 - A_3$;

(2) 至少有一枪击中, 即 A_1、A_2、A_3 至少有一个发生, 可表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

(3) 恰好有一枪击中可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;

(4) 至少有两枪击中可表示为 $A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$;

(5) 三枪都未击中可表示为 $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.

习　题　1.2

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 将一枚硬币掷两次, 观察正面 H、反面 T 出现的情况;

(2) 一袋中有四只形状完全相同的球, 编号分别为 $1,2,3,4$, 从中同时取 2 只球, 观察出现的号码;

(3) 10 件产品中有三件次品, 每次从中取一件 (不放回), 直到将三件次品都取出的抽取次数.

2. 设 A、B、C 是随机事件. 说明下列各式成立时 A、B、C 之间有什么关系?

(1) $ABC=A$; (2) $A\cup B\cup C=A$; (3) $AB\subset C$; (4) $A\subset BC$.

3. 设 A、B、C 为三个随机事件, 试用 A、B、C 的运算表示下列各事件:

(1) A 发生, B 与 C 不发生;

(2) A 与 B 都发生, 而 C 不发生;

(3) A、B、C 都发生;

(4) A、B、C 至少有一个发生;

(5) A、B、C 不多于两个发生;

(6) A、B、C 都不发生.

4. 设某工人生产了四个零件, 用 A_i 表示事件“第 i 个零件是正品” ($i=1,2,3,4$), 试用 A_i 表示下列各事件:

(1) 没有一个产品是次品;

(2) 至少有一个产品是次品;

(3) 只有一个产品是次品;

(4) 至少有三个产品是正品.

5. 在某系的学生中任选一名学生, 设 A 表示“被选出者为男生”, B 表示“被选出者是三年级学生”, C 表示“被选出者是运动员”, 则

(1) 说明事件 $AB\overline{C}$ 的含义;

(2) 什么时候 $ABC=C$ 成立;

(3) 什么时候关系式 $C\subset B$ 正确;

(4) 什么时候等式 $\overline{A}=B$ 成立.

1.3 概率的定义与运算

随机事件在一次试验中是否发生带有偶然性, 我们不能事先预料. 但是在大量重复试验中, 人们还是可以发现它是有其内在规律性的. 这种规律性最明显的表现就是事件在试验中发生的可能性有大小之分, 这就是人们常说的干某件事有百分之几的成功把握, 或某种现象发生的可能性为百分之几等. 对于事件发生可能性的大小, 自然需要用一个数量指标去刻画它. 这个指标, 首先应该是随机事件本身所具有的属性, 不能带有主观性, 且能在大量重复试验中得到验证; 其次, 必须符合常情. 例如, 事件发生可能性大的就赋予它较大的值, 反之, 就赋予它较小的值. 把刻画事件发生的可能性大小的数量指标叫做事件的概率. 事件 A 的概率用 $P(A)$ 表示. 我们将通过以下几种不同的概率的直观定义逐步引入严格的概率的数学定义.

1.3.1　古典概率　几何概率和频率

1. 古典概率

古典概型研究的是一类比较简单、直观的随机试验, 这类问题有两个明显的特征:

(1) 试验所有基本结果的个数有限, 不妨记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$, 样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

(2) 各个基本结果 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 在每次试验中出现的可能性是相等的.

假设事件 A 中包含了以上 n 种结果中的 r 种, 即 $A=\{\omega_{n_1},\omega_{n_2},\cdots,\omega_{n_r}\}$ $(r\leqslant n)$, 则事件 A 发生的可能性, 即事件 A 发生的概率 $P(A)$ 自然可定义为 A 中包含的基本结果个数与总的结果个数之比, 即

$$P(A)=\frac{r}{n}.$$

称之为古典概率. 在古典概型中, 如果总的基本结果有 n 个, 而事件 A 中包含 r 个, 即 $A=\{\omega_{n_1},\omega_{n_2},\cdots,\omega_{n_r}\}$, 事件 B 中包含 s 个, 即 $B=\{\omega_{m_1},\omega_{m_2},\cdots,\omega_{m_s}\}$, 且 A 与 B 中没有相同的结果, 即 A 与 B 互斥, 则 $A+B$ 中共有 $r+s$ 个结果, 即

$$A+B=\{\omega_{n_1},\omega_{n_2},\cdots,\omega_{n_r},\omega_{m_1},\omega_{m_2},\cdots,\omega_{m_s}\}.$$

从而事件 $A+B$ 的概率为

$$P(A+B)=\frac{r+s}{n}=\frac{r}{n}+\frac{s}{n}=P(A)+P(B).$$

这是一个常用的公式, 前提条件是 A 与 B 互斥. 特别地, $1=P(\Omega)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$, 故 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

对古典概型下的事件 A 的概率定义, 显然满足以下三条:

(1) 非负性　对任意事件 $A\subset\Omega$, $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性　$P(\Omega)=1$;

(3) 有限可加性　若事件 A,B 互斥, $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

例 1　一批产品由 95 件正品和 5 件次品组成, 从中连续抽取两件, 第一次取出后不再放回, 问第一次抽得正品且第二次抽得次品的概率多大?

解　用 A 表示事件“第一次取得正品且第二次取得次品”, 由于是无放回地抽取, 利用乘法原理可知总的抽取方法有: 100×99 种, 而第一次抽正品的方法有 95 种, 第二次取次品的方法有 5 种, 则 A 中包含的抽取方法共 95×5 种, 所求概率为

$$P(A)=\frac{95\times 5}{100\times 99}=\frac{19}{396}.$$

例 2 在例 1 中, 若仍是不放回地抽取两件产品, 要求计算"抽得一件为正品, 一件为次品"的概率.

解 设 A 表示"第一次抽得正品且第二次抽得次品", B 表示"第一次抽得次品且第二次抽得正品", 显然 A 与 B 是互斥事件, $A+B$ 表示事件"一次取得正品, 一次取得次品", 从而所求概率为

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{95\times 5}{100\times 99}+\frac{5\times 95}{100\times 99}=\frac{19}{198}.$$

例 3 把 n 个球随机地放入 N 个盒子 $(n\leqslant N)$, 设每个球放入任何一个盒子是等可能的, 求每个盒子最多只有一个球的概率.

这是一个古典概率问题, 每个球可落入 N 个盒子中的任何一个, 问题相当于 N 个元素取 n 个的有重复的排列, 样本点总数是 N^n 个, 所求事件的样本点数为 N 个元素取 n 个的排列 A_N^n, 故所求概率为

$$P=\frac{\mathrm{A}_N^n}{N^n}=\frac{\mathrm{C}_N^n n!}{N^n}.$$

与此相联系的是历史上著名的生日问题: 求参加集会的 n 个人中 $(n\leqslant 365)$, 没有人生日相同的概率. 把 n 个人看成 n 个球, 把一年 365 天看成 365 个盒子, $N=365$, $P=\dfrac{\mathrm{A}_N^n}{N^n}$. 当 $n=40$ 时 $P=0.109$, 当 $n=50$ 时, $P=0.03$, 当 $n=55$ 时, $P=0.01$. 相反, 集会中的 n 个人至少有两人生日相同的概率为 $1-\dfrac{\mathrm{A}_N^n}{N^n}$.

2. 几何概率

在古典概型中, 所研究的问题都有两个特征, 即基本结果个数的有限性和出现每个基本结果的等可能性. 如果等可能性仍然成立, 但试验的基本结果个数为无穷时, 则古典概率的定义就不适用了, 必须加以改进. 我们通过下面的例子来引入另一种概率计算方法.

例 4 甲、乙两人相约在 0 到 T 这段时间内在预定地点会面, 先到的人等候另一个, 经过时间 $t(t<T)$ 离去. 设每人在 0 到 T 这段时间内各时刻到达该地是等可能的, 试求甲、乙两人能会面的概率多大?

解 以 x、y 分别表示甲、乙两人到达的时刻, 所有可能到达时刻组成的点可以用平面上边长为 T 的正方形 $\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant T, 0\leqslant y\leqslant T\}$ 来表示, 两人能会面这个事件表示点落在区域

$$A=\{(x,y)\in\Omega:|x-y|\leqslant t\},$$

如图 1-2 所示, 由等可能性, 所求概率可定义为