解析几何

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

解　析

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

1975·北京

内 容 提 要

这套《初等数学》共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》，是一般科学技术读物.

各册内容努力选取三大革命运动中普遍需要的数学知识，并且注意突出基本规律及其辩证发展的线索. 为了便于自学，叙述力求详细，同时各章一般有小结，每册有总结，还配置了一定数量的练习题.

《解析几何》这一册共有以下五章：曲线与方程，直线，二次曲线，参数方程和极坐标，经验公式.

这套《初等数学》可供广大工农兵、知识青年、中小学教师阅读参考.

解析几何

北京市《初等数学》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

1975 年 6 月修订第 1 版　1978 年 2 月第 6 次印刷

书号 13012·04　定价 0.45 元

毛主席语录

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

读书是学习，使用也是学习，而且是更重要的学习。

目　　录

引　言

在生产实践和科学实验中，经常遇到各种各样的曲线.

在凸轮机构中，为了保证从动杆等速上升，就采用螺线作为凸轮的轮廓线(图 1).

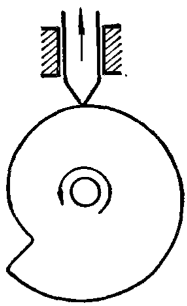

图 1

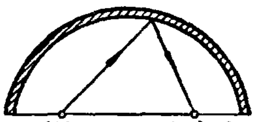

图 2

在批林批孔运动推动下，我国激光技术迅速发展，某激光器中，为了使光源发出的光能都集中反射到激光物质（如红宝石)上，激光腔体的断面就是椭圆(图 2).

为了利用曲线，必须掌握曲线的性质，这就提出一个问题：怎样研究各种曲线的性质？解析几何提供了基本的方法：把空间形式与数量关系互相联系起来．首先，通过设置坐标系把点与一对数(坐标)联系起来，然后，曲线作为满足一定条件的点的全体，与点的坐标所满足的方程互相联系起来．这

样，就可以利用代数的方法来研究各种曲线的性质。

生产实践也要求“形”和“数”结合. 例如：

造船，先要把船体的轮廓曲线进行放样(图 3)，过去一直

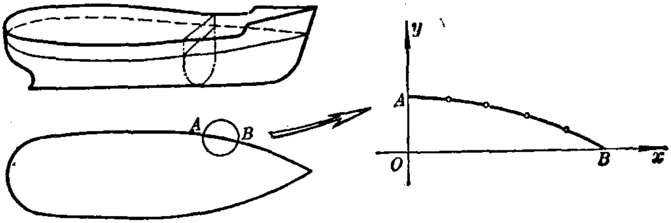

图 3

采用繁重的手工放样方法. 在无产阶级文化大革命的推动下，我国造船工人正在大力采用电子计算机的数学放样方法，这就要求把线型上的各点用其坐标表示，通过代数的方法精确地确定出所需要的线型来.

“水利是农业的命脉”. 如图 4，设计水库的溢洪道时，为了防止开闸泄洪时水流破坏闸门地基，采用挑流鼻坎使水流抛射到距闸门较远的地方，因此，设计中要根据水流中心线，

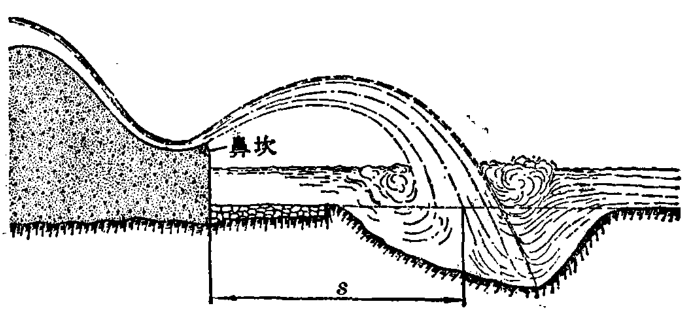

图 4

来计算水流抛射的水平距离．这条曲线是由点的运动形成的，计算时，必须求出动点坐标所满足的代数方程，即表示这条曲线的方程．

“形”和“数”结合，不仅便于研究曲线的性质，同时，在实践中人们也常常将数量关系用曲线来表示，这对数量关系的研究也有很大的帮助．

总之，学习解析几何，重要的是掌握“形”和“数”结合的方法，而其基本点就是坐标法，即通过设置坐标系，使点与一对数、曲线与方程联系起来。

第一章　曲线与方程

第一节　距离和定比分点

线段长度是一种基本几何量．因此，在用坐标法研究几何图形之前，先讨论利用坐标研究线段长度的方法．重点是计算两点间的距离和求中点坐标的方法．

距 离 公 式

物体的位移是既有大小又有方向的量．在解析几何中，表示这种有大小又有方向的量用有向线段．如图 1-1，设物体在 Ox 轴上作直线运动，它由 A 点到 B 点的位移，用有向线段 AB 表示；由 B 点到 A 点的位移，用有向线段 BA 表示．这两个位移大小相等、方向相反．

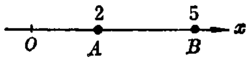

图　1-1

在数轴上的有向线段，可以用数量来表示．如图 1-1，在 Ox 轴上的有向线段 AB，它的大小就是有向线段的长度，即 3 个单位，它的方向和 Ox 轴的方向相同，我们用正数表示，即

$$AB=+3.$$

有向线段 AB 的大小和方向由 $+3$ 这个数完全表示出来了．同样，有向线段 BA 的长度也是 3，但方向和 Ox 轴相反，用负数表示，即

$$BA=-3.$$

因此，有向线段 AB 和 BA 有如下的关系：

$$AB=-BA.$$

既表示有向线段的大小、又表示有向线段方向的数，叫做有向线段的数量.

解析几何中的线段，常指有向线段. 对于有向线段，要注意两个字母的次序：写在前面的字母表示有向线段的起点，写在后面的字母表示有向线段的终点.

在数轴上，有向线段 AB 的数量和 A、B 两点的坐标有密切的关系. 它恰好等于终点 B 的坐标减起点 A 的坐标，如图 1-1，有

$$AB=5-2=+3.$$

同样，BA 的数量恰好等于终点 A 的坐标减起点 B 的坐标，即

$$BA=2-5=-3.$$

一般地说，如果在 Ox 轴上，A 点的坐标是 x_1，B 点的坐标是 x_2（图 1-2），那么

$$\begin{aligned} AB&=x_2-x_1, \\ BA&=x_1-x_2. \end{aligned} \tag{1}$$

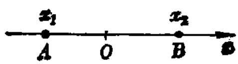

图 1-2

自己分析一下，不论 A、B 两点在 x 轴上的位置如何，(1) 式都成立.

有向线段 AB 的长度，用 $|AB|$ 表示，也叫做 A、B 两点的距离. $|AB|$ 不是负数. 如图 1-2，

$$|AB|=|x_2-x_1|. \tag{2}$$

显然，
$$|AB|=|BA|.$$

(1)、(2)是数轴上 AB 的数量和长度的计算公式.

在平面上，如果一条有向线段和坐标轴平行，它的数量仍旧可以用这条有向线段的两个端点的坐标表示出来. 如图1-3，有向线段AB的方向和 x 轴相同，它的数量为

$$AB=x_2-x_1,\quad (>0)$$

而有向线段 BA 的方向和 x 轴相反，它的数量为

$$BA=x_1-x_2.\quad (<0)$$

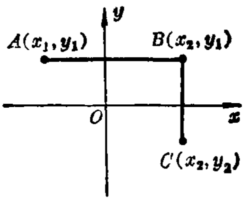

图 1-3

同样，有向线段 CB 和 BC 是平行于 y 轴的，方向一正一反，它们的数量为

$$CB=y_1-y_2,\quad (>0)$$

$$BC=y_2-y_1.\quad (<0)$$

当然，从有向线段的长度看，总有

$$|AB|=|BA|,$$

$$|CB|=|BC|.$$

现在来讨论平面上任意两点间的距离.

设$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$是平面上任意两个定点，如图1-4，求P_1、P_2 两点间的距离.

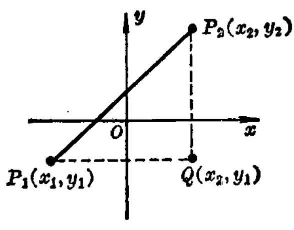

图 1-4

如图，过P_1、P_2 分别作 x 轴、y 轴的平行线，相交于 Q，那么 Q 点的坐标是(x_2, y_1). $\triangle P_1QP_2$ 是直角三角形，根据勾股定理，有

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2.$$

$$\because \quad |P_1Q|^2=|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2, \quad (为什么?)$$
$$|QP_2|^2=|y_2-y_1|^2=(y_2-y_1)^2,$$
$$\therefore \quad |P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

于是得到计算 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 两点间距离的公式

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{3}$$

显然，平面上任一点 $M(x, y)$ 到原点 $O(0, 0)$ 的距离

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{4}$$

问：如果 P_1、P_2 在平面上的其他位置，(3)式还对不对？为什么？

例 冲制如图 1-5 所表示的零件时，需要知道三孔中心的距离．已知三孔中心的坐标是 $A(-2, 4)$、$B(4, 0)$、$C(-5, 0)$，求三孔中心的距离．

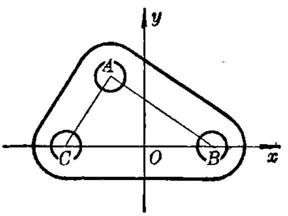

图 1-5

解：根据距离公式，

$$|BA|=\sqrt{(-2-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{52}=7.21,$$
$$|AC|=\sqrt{[-5-(-2)]^2+(0-4)^2}=\sqrt{25}=5.$$

至于距离 $|CB|$，由图显然有

$$|CB|=4-(-5)=9.$$

定比分点的坐标

已知平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，P 点分线段 P_1P_2 成线段 P_1P 和 PP_2，且两线段之比为 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$．那么，$P$ 的坐标 (x, y) 可以用 P_1、P_2 的坐标表示，P 叫做分线段 P_1P_2 为定比 λ 的定比分点．

如图 1-6, 过 P_1、P、P_2 分别作平行于坐标轴的垂线，它们和坐标轴的交点分别是 P'_1、P'、P'_2 和 P''_1、P''、P''_2，根据平行截割定理，可以知道

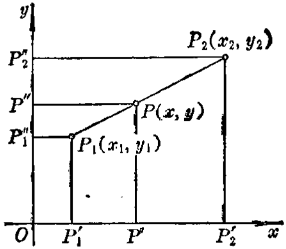

图 1-6

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P'_1P'}{P'P'_2}.$$

$\because$ $$P'_1P'=x-x_1,$$

$$P'P'_2=x_2-x,$$

$\therefore$ $$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$

$\therefore$ $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

类似地有 $$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此，把连结 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的线段 P_1P_2 分成定比 λ 的点 P 的坐标是

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{5}$$

例 1 已知 $P_1(-1, -6)$ 和 $P_2(3, 0)$ 两个点，P 点分线段 P_1P_2 成两段，$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{1}{3}$，求 P 点的坐标.

解: $$x=\frac{-1+\frac{1}{3}\times 3}{1+\frac{1}{3}}=0, \quad y=\frac{-6+\frac{1}{3}\times 0}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{9}{2}.$$

所以，P 点的坐标是$\left(0, -\frac{9}{2}\right)$.

例 2 **把上例的 P_1P_2 延长到 P，使** $|P_2P|=\frac{1}{3}|P_1P_2|$，求 P 点的坐标.

解： 设 P 点的坐标是 (x, y)，把 P_2 看做 P_1P 的分点，那么有 $\frac{P_1P_2}{P_2P}=3$. 所以

$$\begin{cases} 3=\frac{-1+3x}{1+3}, \\ 0=\frac{-6+3y}{1+3}. \end{cases}$$

解方程组，得 $x=\frac{13}{3}$，$y=2$，所以，P 点的坐标是$\left(\frac{13}{3}, 2\right)$.

特别，当 P 是 P_1P_2 的中点时，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=1$，所以，连接 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的中点坐标是：

$$\begin{cases} x=\frac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\frac{y_1+y_2}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

例 3 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(3, 7)$、$B(5, -1)$、$C(-2, -5)$，求中线 CD 的长度(图 1-7).

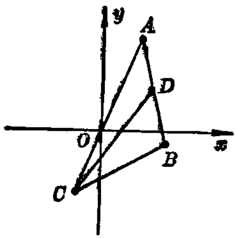

图 1-7

解： 先求 AB 边中点 D 的坐标 (x, y). 用中点坐标公式(6)，得

$$x=\frac{3+5}{2}=4, \quad y=\frac{7+(-1)}{2}=3.$$

再用距离公式(3)，得

$$|CD|=\sqrt{[4-(-2)]^2+[3-(-5)]^2}=\sqrt{100}=10.$$

例 4　设在 $P_1(1,2)$ 点和 $P_2(7,5)$ 点处分别有质点，各重 5 克和 15 克，求这两个质点的重心的坐标.

解：如图 1-8，两质量对于重心 G 的力矩应该相等，即

$$5|P_1G|=15|GP_2|.$$

$$\therefore\quad \frac{|P_1G|}{|GP_2|}=\frac{15}{5}=\frac{3}{1},$$

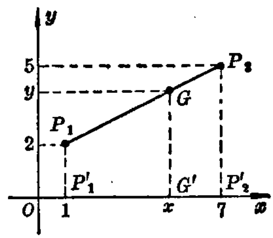

图　1-8

即重心 G 将 P_1、P_2 的连线分成两段，其比为 3:1.

设 G 点横坐标为 x. 如图，应有 $P'_1G'=3G'P'_2$，即

$$x-1=3(7-x).$$

解得

$$x=\frac{22}{4}=5.5.$$

同法可得 G 点的纵坐标

$$y=\frac{17}{4}=4.25.$$

求得所给两质点的重心在 $G(5.5, 4.25)$ 点处.

例 5　设在 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 和 $P_3(x_3, y_3)$ 点处，分别有质量为 m 的质点(图 1-9)，求这三个质点的重心 P 的坐标.

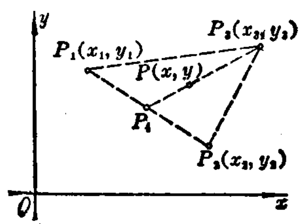

图　1-9

解：我们先求在 P_1、P_2