普通高等学校"十一五"规划教材

线性代数

——理工类数学基础

主 编 王亚辉 过 静

北京航空航天大学出版社

普通高等学校“十一五”规划教材

线性代数

——理工类数学基础

主　编　王亚辉　过　静

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是根据高等学校基础理论教学“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，按照国家教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》而编写的。

本书的内容为行列式、矩阵、线性方程组的理论、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等。每章均配有习题及自测题，书后附有参考答案。

本书可作为高等学校理工科各专业及高等专科学校、高职院校相应课程教材或教学参考书，也可作为各类成人教育相应课程教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：理工类数学基础/王亚辉，过静主编. —北京：北京航空航天大学出版社，2008.12

ISBN 978-7-81124-616-2

I.线… II.①王…②过… III.线性代数—高等学校—教材 IV.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 008210 号

线性代数

——理工类数学基础

主 编 王亚辉 过 静

责任编辑 李 青 李冠咏 李徐心

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话 010—82317024 传真 010—82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:11.25 字数:288 千字

2008 年 12 月第 1 版 2008 年 12 月第 1 次印刷 印数:4 000 册

ISBN 978-7-81124-616-2 定价:20.00 元

《线性代数——理工类数学基础》
教材编写委员会

主　编　王亚辉　过　静

副主编　程　洪　申忠明

　　　　卢　波　张璐璐

前　　言

数学是科学和技术的基础，数学在决定国家各级人才的实力方面起着日益重要的作用。

近年来，随着我国科学与经济的飞速发展，高等教育也进入了一个飞速发展的时期。高等教育的教学观念不断更新，教学改革不断深入。为了适应这一发展的需要，我们根据高等学校基础理论教学“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，按照国家教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》编写了这本《线性代数》教材。

在教材的编写过程中，我们力求概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨。例题、习题经过精选，具有代表性和启发性。

本教材由浅入深、由易到难，循序渐近地介绍了线性代数的基础理论，并注重理论联系实际，加强了概念与理论的背景和应用的介绍。主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组的理论、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换（可视课时选讲）等。每章均配有习题及自测题，书后附有参考答案。第 1 章、第 2 章和第 5 章由过静老师编写；第 3 章、第 4 章和第 6 章由王亚辉老师编写；程洪、申忠明、卢波和张璐璐四位老师参与了习题编制及解答等工作。

本书可作为高等学校理工科各专业及高等专科学校、高职院校相应课程教材或教学参考书，也可作为各类成人教育相应课程教材或教学参考书。

在编写本书的过程中，虽主观力求完善，但鉴于作者的水平和能力，书中难免会有缺点和错误，恳请同行和广大读者批评赐教。

编　者

2008 年 11 月

目　录

第 1 章　行列式

行列式是线性代数中的有用工具，在研究线性方程组的解以及研究矩阵的性质等问题时，都需要用到行列式，因此行列式是线性代数中的一个重要基础知识。本章主要介绍行列式的定义和行列式的计算方法。以及解线性方程组的克拉默法则。

1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

定义 1.1　由 2^2 个元素组成的式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式，并且规定二阶行列式的值为 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

例 1.1　求二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的值。

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4-2\times 3=-2$$

例 1.2　用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

其中，$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$。

解　分别用 a_{22} 和 a_{12} 乘以方程组两个方程的两端，再相减得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

分别用 a_{21} 和 a_{11} 乘以方程组两个方程的两端，再相减得

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}},\qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

所以解可以用二阶行列式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

1.1.2 三阶行列式

定义 1.2 由 3^2 个元素组成的式子 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式，规定三阶行列式的值为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

例 1.3 求三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 的值。

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\times2\times3+2\times1\times3+0\times2\times0-0\times2\times3-2\times2\times3-1\times1\times0=0$

从以上定义可以看出，二阶、三阶行列式实际上表示的是一个数，称为行列式的值。

1.2 *n* 阶行列式

1.2.1 排列及其逆序数

为了定义 n 阶行列式，先介绍排列的概念和排列的一些基本性质。

定义 1.3 由 n 个正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 n 级排列。

n 级排列实际上就是 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数任意排列组成的。

例如，3412 是一个 4 级排列，35124 是一个 5 级排列。

由排列知识，n 级排列的总数有 $n!$ 个。例如，3 级排列共有 $3!=6$ 个，它们是

$$123,132,213,231,312,321$$

定义 1.4 在一个 n 阶排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中，如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 前面，则称这一对数 i_s，i_t 构成一个逆序。一个排列中的逆序总数称为该排列的逆序数。排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$。如果 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为偶数，则称排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为偶排列；如果 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 为奇数，则称排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为奇排列。

例 1.4 在 4 级排列 3421 中，3,4,2 在 1 的前面，构成 3 对逆序，3,4 在 2 的前面构成 2 对逆序，共有 5 对逆序；因此 $\tau(3421)=5$，并且 3421 为奇排列。

定义 1.5 在一个排列中，如果交换其中某两个数的位置，而其余各数的位置不变，就得到一个新的排列，这样的变换称为一个对换。例如，对 4 级排列 3421 施以对换 $1\leftrightarrow2$，得到排列 3412。

关于 n 阶排列，可以证明下面两个结论：

定理 1.1 排列经过一次对换后，其奇偶性得到改变。

证 先证相邻两个数对换的情形：设排列

(1) $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$

(2) $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$

当 $a < b$ 时，对换后 $\tau(1)$ 增加 1，$\tau(2)$ 不变，故 $\tau(1) = \tau(2) + 1$；

当 $a > b$ 时，对换后 $\tau(1)$ 不变，$\tau(2)$ 减少 1，故 $\tau(2) = \tau(1) + 1$。所以排列(1)与(2)的奇偶性相反。

再证对换不相邻的两个数的情形：设排列

(1) $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$

(2) $a_1 \cdots a_l b_1 \cdots b_m a b c_1 \cdots c_n$

(3) $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$

(1) → (2)经过 m 次相邻对换；

(2) → (3)经过 $m+1$ 次相邻对换；

(1) → (3)经过 $2m+1$ 次相邻对换，所以 $\tau(3)$ 与 $\tau(1)$ 的奇偶性相反。

即排列(1)与排列(3)奇偶性相反。

定理 1.2 在全部 n 阶排列中（$n \geqslant 2$），奇偶排列各半，即均为 $\frac{n!}{2}$。

1.2.2 n 阶行列式

分析二阶行列式不难发现，它是 2＝2! 项的代数和，每项为在行列式中位于不同行、不同列的 2 个数的乘积，且有一半带正号，一半带负号。三阶行列式是 6＝3! 项的代数和，每项为在行列式中位于不同行、不同列的 3 个数的乘积，且一半带正号，一半带负号。类似地给出 n 阶行列式的定义。

定义 1.6 由 n^2 个元素组成的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，a_{ij} 为行列式的第 i 行第 j 列的元素。i 称为行指标，j 称为列指标，且行列式的值为所有取自不同行、不同列的 n 个数的乘积，即

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的代数和。其中，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时，项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 带正号；当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列时，项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和。

例 1.5 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

表示的是 $4! = 24$ 项的代数和，每一项都是取自不同行、不同列的 4 个元素的乘积。例如 $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$ 是其中的一项，由于 $\tau(1423) = 1+1 = 2$，故它带的符号是正号；$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 是其中的一项，由于 $\tau(1324) = 1$，故它带的符号是负号；而 $a_{12}a_{24}a_{32}a_{41}$ 不是其中的一项，因为第二列取了两个元素 a_{12} 和 a_{32}。

从 n 阶行列式的定义，可以看出：

(1)当 $n = 1$ 时，一阶行列式就是数 a_{11}，即 $|a_{11}| = a_{11}$（$|a_{11}|$ 不能理解成 a_{11} 的绝对值）。

(2) $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为 n 阶行列式的一般项。一般项中行指标按自然顺序排列，列指标为任意的 n 级排列，这一项的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，所以 n 阶行列式共有 $n!$ 项，且正、负各占一半。

(3)由对称性，不难发现

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

因为把取自不同行、不同列的 n 个元素列指标按自然顺序排列，行指标是一个 n 级排列，然后由其行下标组成的 n 级排列的奇偶性决定这一项的符号。当为偶排列时带正号，当为奇排列时带负号。易知 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ 也是行列式中的取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积。

(4) 由定义 1.6，可知 n 阶行列式实际上代表的是一个数，求出一个行列式代表的数就称为计算行列式。

例 1.6 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$。

解 根据定义 1.6，可知 D 的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，其中只要有一个元素为零，则该项为零。由于第 1 行的非零数为 $a_{11} = 1, a_{14} = 1$，所以 $j_1 = 1,4$。同理得 $j_2 = 2,3, j_3 = 2,3, j_4 = 1,4$。因此，$j_1, j_2, j_3, j_4$ 能组成的排列有 1234，1324，4231，4321，从而

$$D = (1\times2\times1\times1) - (1\times3\times1\times1) - (1\times2\times1\times2) + (1\times3\times1\times2) = 1$$

例 1.7 计算 n 阶上三角行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$。

解 根据 n 阶行列式的定义，有

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在上式中，n 个数的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 只有当 $j_n=n$ 时才不为零，即 $j_{n-1}=n-1$，$j_{n-2}=n-2$，$\cdots$，$j_2=2$，$j_1=1$。所以

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，n 阶下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 1.8　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$。

解　D 的一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中，只有当 $j_1=n$，$j_2=n-1$，$\cdots$，$j_n=1$ 时不为零，而 $n(n-1)\cdots 1$ 排列的逆序数为 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n-1)}{2}$，所以

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

1.3　行列式的性质

当行列式的阶数较高时，利用定义来计算行列式，显然很麻烦，为了简化行列式的计算，需要研究行列式的性质，这些性质对行列式理论本身有着重要的意义，在其他学科中也有着广泛的应用。

定义 1.7　将行列式 D 的行写成列，列写成行所得的行列式称为 D 的转置行列式，记作 D^T，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，则\ D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由行列式的定义，可得出如下性质：

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^T$。

由性质 1 可知，行列式中有关行成立的性质，对列也成立，反之亦然。

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 如果行列式有两行(列)完全相同，则行列式等于零。

性质 3 行列式的某一行(列)的公因子可以提到行列式符号的外面，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD$$

推论 1 当行列式中有一行(列)的元素全为零时，则此行列式的值为零。

推论 2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值为零。

性质 4 如果行列式的某一行(列)的所有元素都是两个数的和，则此行列式的值等于两个行列式的和。这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行(列)的元素与原行列式相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的某一行(列)的各元素乘以数 k 后加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+ka_{i1} & a_{s2}+ka_{i2} & \cdots & a_{sn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以上性质都可以由行列式的定义得到证明。

由例 1.7 可知三角形行列式的值等于对角线上元素的乘积，因此利用行列式的性质将一个行列式化为三角形行列式就可以很快求出行列式的值，这就是化三角形法计算行列式。

利用行列式的性质将行列式化为三角形行列式，主要是对行列式做三种变换：①交换行列式的两行（列）；②用一个非零数乘以行列式的某行（列）；③用一个非零的数乘以行列式的某行（列）加到另外一行（列）上去。这三种变换记为 $r_i \leftrightarrow r_j$（表示第 i 行与第 j 行交换），kr_i（表示第 i 行乘以数 k），$r_i + kr_j$（表示第 j 行乘以 k 加到第 i 行上），列变换为 $c_i \leftrightarrow c_j$，kc_i，$c_i + kc_j$。

例 1.9　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$。

解　利用行列式的性质，有

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + (-2)r_1]{r_3 + r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 + 3r_2]{r_3 + r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + (-1)r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

例 1.10　计算 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$。

解

$$D_n \xlongequal[i = 2,3,\cdots,n]{r_1 + r_i} \begin{vmatrix} [x+(n-1)a] & [x+(n-1)a] & \cdots & [x+(n-1)a] \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i = 2,3,\cdots,n]{r_i + (-a)r_1} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例 1.11 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&1&0&\cdots&0\\3&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$。

解

$$D_n\xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_1-jc_j}\begin{vmatrix}1-(2^2+\cdots+n^2)&2&3&\cdots&n\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1-(2^2+\cdots+n^2)$$

1.4 行列式按行(列)展开

在计算行列式时，有时希望将高阶行列式转化为一些较低阶的行列式，在这一节将介绍一种降阶的方法，行列式的按行(列)展开。

定义 1.8 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素按原来相对顺序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

如果记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式($i,j=1,2,\cdots,n$)。

例 1.12 设四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&1&0&2\\1&-1&0&3\\1&4&-1&0\\2&1&0&0\end{vmatrix}$$

那么，元素 $a_{12}=1$ 的余子式 $M_{12}=\begin{vmatrix}1&0&3\\1&-1&0\\2&0&0\end{vmatrix}=-3\times(-1)\times2=6$，代数余子式

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-6$$

下面，再看看二阶和三阶行列式的计算公式可以发现：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}\,(i = 1,2,3)\end{aligned}$$

事实上，对 n 阶行列式有以下定理。

定理 1.3　n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, i = 1,2,\cdots,n,$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, j = 1,2,\cdots,n。$$

定理 1.3 称为行列式的按行(列)展开定理，通过这个定理可以将行列式的阶数降低一阶。

推论　行列式某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积的和等于零。

综合定理 1.3 和它的推论得到

$$a_{i1}A_{s1} + a_{i2}A_{s2} + \cdots + a_{in}A_{sn} = \begin{cases} D, i = s \\ 0, i \neq s \end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1t} + a_{2j}A_{2t} + \cdots + a_{nj}A_{nt} = \begin{cases} D, j = t \\ 0, j \neq t \end{cases}$$

例 1.13　利用展开定理计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$。

解　$D = \begin{vmatrix} 16 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二列展开}} (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$