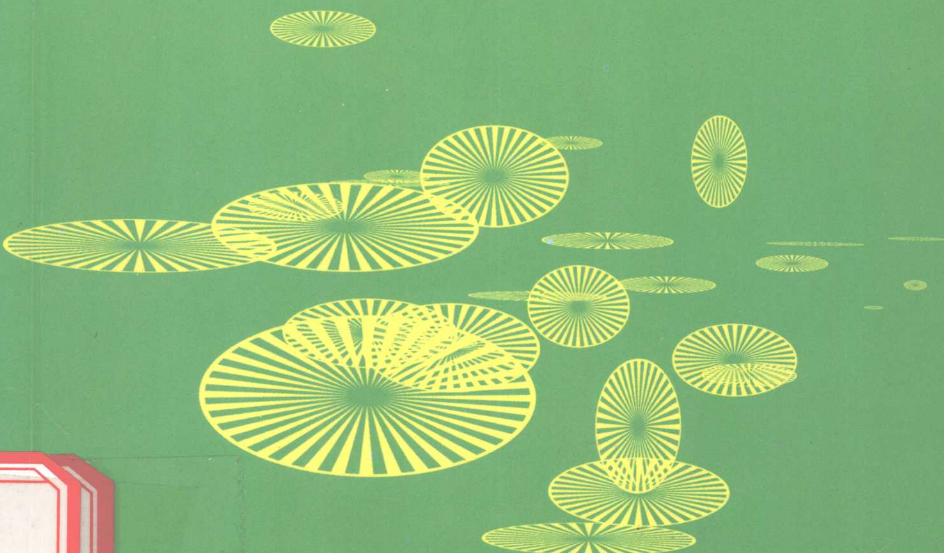
概率统计及其应用

主编　沙玉英　卓相来



石油大学出版社

概率统计及其应用

主　编　沙玉英　卓相来
副主编　孟新柱　蔺香运
沙　静　徐西祥

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计及其应用/沙玉英,卓相来主编. —东营:石油大学出版社,2004.9

高校教材

ISBN 7-5636-1914-3

Ⅰ.概… Ⅱ.沙… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 099510 号

书　　名:概率统计及其应用
主　　编:沙玉英　卓相来

责任编辑:郭纪明　徐　伟
封面设计:荣　治

出 版 者:石油大学出版社(山东 东营,邮编 257061)
网　　址:http://www.hdpu.edu.cn/~upcpress
电子信箱:erbians@mail.hdpu.edu.cn
排 版 者:石油大学出版社照排中心
印 刷 者:山东农业大学印刷厂
发 行 者:石油大学出版社(电话 0546-8391949)
开　　本:140×202　印张:9.375　字数:233 千字
版　　次:2004 年 10 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价:14.80 元

前　　言

根据我们多年的教学实践，依据高等院校本科教材的教学大纲，参照教育部制订的2004年全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》中相关课程的要求，我们编著了本教材.

本书共分两部分.概率论部分(第一章至第五章)为读者提供了理论基础；数理统计部分(第六章至第八章)介绍了参数估计和假设检验，其应用渗透在各自的内容之中.本书内容全面、选材精炼，题目具有启发性、趣味性和广泛性.编著中，我们突出了数学思想方法，加强了应用性与实践性.利用计算机软件解决概率统计问题的内容——概率统计实验收录在书末附录中.每章后的习题用“*”将基本题与较难题隔开，习题皆有答案.

本书由沙玉英(拟定编写提纲、统稿、第一章)、卓相来(第六、七章)、孟新柱(第二、三章)、蔺香运(第二、八章)、沙静(第四、五章)、徐西祥(有关概率统计实验)共同编著.在整个编著、出版过程中，教务处、基础部领导以及数学教研室的全体老师都给

予了大力支持，在此深表感谢！在本书编写的过程中，我们参考了大量的同类教材和资料，对这些图书和资料的作者，我们表示衷心的谢意.

本书是山东省试点课程教材，它可以作为高校工科及理科非数学专业本科生的教材，也可以作为考研复习的参考资料.

虽然我们对本书的编著付出了辛勤的汗水，但由于水平所限，书中难免会有疏漏和谬误，恳请专家同仁指正、读者批评.

编　者

2004 年 7 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

自然界和人类社会主要存在着两类不同的现象.一类是在一定的条件下必然发生,例如,在没有外力作用的条件下,做匀速直线运动的物体必然继续做匀速直线运动,同性电荷不相互吸引,等等.这类在一定条件下必然发生的现象称为**确定性现象**.另一类现象的发生呈现出偶然性.例如,在相同条件下抛同一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上;一个射手向同一目标射击,各次弹着点的位置不尽相同,并且每颗子弹弹着点的确切位置射击之前无法预测,这种在个别试验中时而出现这种结果、时而出现那种结果的现象称为**随机现象**.

在大量的重复试验或观察中,人们发现随机现象的发生与否具有某种规律性,这种固有的规律性称之为**统计规律性**.概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

第一节　样本空间与随机事件

(一) 随机试验

在科学研究和工程技术中,我们经常要在相同条件下重复进行很多次试验,这种试验尽管是在相同条件下进行的,但各次试验结果却不一定相同,它具有以下特点:

1°　可以在相同条件下重复进行;

2° 试验所有可能发生的结果(不止一个)是已知的;

3° 每次试验的结果到底是其中的哪一个,试验前不能确定.

具有上述三个特点的试验称为**随机试验**,简称**试验**,记作 E.

例1 抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况.这个试验可以在相同条件下重复进行,试验所有可能的结果有两个:"字"或"徽花",即 H 或 T,可以记成集合 $S_1=\{H,T\}$,但在抛掷之前不能确定掷出来的是 H 还是 T.

例2 将一枚硬币抛掷三次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.这个试验也可以在相同条件下重复进行(每一次是抛掷三下),试验所有可能的结果为集合 $S_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$,但在抛掷之前不能确定是其中的哪个结果.

例3 在一个形状为旋转体的均匀陀螺的圆周上,均匀地刻上区间 $[0,3)$ 内的诸数字.旋转这个陀螺,当它停下时,把圆周与桌面接触处的刻度记下来.多次做这种试验,每次的刻度是区间 $[0,3)$ 内的一个数,即所有可能的结果为集合 $S_3=\{x\mid 0\leqslant x<3\}$,但在旋转之前不能确定陀螺停下时接触点的刻度是 $[0,3)$ 区间内的哪一个数.

例4 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.这也是一个随机试验,所有可能的结果为集合 $S_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

还可以举出其他一些随机试验的例子.以后我们所说的试验都是指随机试验.

(二)样本空间

随机试验 E 的所有可能的结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记作 S.前面四个例子中的 S_1,S_2,S_3,S_4 分别是相应试验的样本空间.样本空间中的元素,即试验的每个结果称为**样本点**.

（三）随机事件

在随机试验中，可能出现也可能不出现的结果称为随机事件. 在例2中，"第一次出现H面"；在例3中，"陀螺的圆周与桌面的刻度在区间内"等等，都是随机事件. 这里，我们主要从集合论的角度来研究随机事件这一概念. 当然两者本质上是同一回事.

在例2中，若试验结果为"第一次出现H面"，我们可以用集合$A=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$来表示，显然集合A是样本空间S_2的子集；而S_2的子集$B=\{HHH,TTT\}$则表示"三次出现同一面"这样的结果. 一般，我们把随机试验的样本空间S的子集称为**随机事件**，简称**事件**，用字母A，B，C等表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的某一个样本点出现时，称这一事件发生了. 如，在例2中，当且仅当子集A中的一个样本点出现时，就说事件"第一次出现H面"发生了.

因任一非空集合至少有两个子集：它自身与空集$\varnothing$. 所以样本空间S作为它自身的子集，称为**必然事件**，在每次试验中它必然发生，用S表示. 空集不包含任何样本点，它也是样本空间的子集，称为**不可能事件**，它在每次试验中一定都不发生，用$\varnothing$表示.

我们称由一个样本点所组成的单点集为**基本事件**. 如，例1的试验有两个基本事件$\{H\}$和$\{T\}$；例3中的试验有无数个基本事件$\{x\}(0\leqslant x<3)$.

（四）事件间的关系及运算

从集合论的角度定义的事件是一个集合，因此事件间的关系及运算与集合之间的关系及运算是一致的，了解这一点，便于掌握目前所研究的问题. 下面给出事件间的关系及运算，其中S为试验E的样本空间，A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$是S的子集.

1° 若$A\subset B$，则称事件A是事件B的**子事件**，即事件A发生

必然导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$，称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$.

2° $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，即事件 A 与事件 B 至少有一个发生.

称 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 即 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

3° $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，即事件 A 与事件 B 都发生，$A\cap B$ 也记作 AB.

称 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 即 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

4° $A-B=\{x|x\in A$ 但 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，即事件 A 发生而事件 B 不发生.

5° 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互斥事件**，即事件 A 与事件 B 不能都发生. 如果一组事件 $A_1,A_2,\cdots$，任意两个都互斥，则称这组事件两两互斥，显然基本事件是两两互斥的.

当事件 A,B 互斥时，它们的和事件 $A\cup B$ 可记作 $A+B$.

6° 若 $A\cup B=S$ 并且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互逆事件，即事件 A,B 必然有一个发生并且只有一个发生. A 的逆事件记作 $\overline{A}$，有 $\overline{A}=B,\overline{B}=A$. 显然 $A+\overline{A}=S,A\cap\overline{A}=\varnothing$. $\overline{A}$ 发生表示 A 的逆事件发生，因此 $A-B=A\cap\overline{B}$.

事件之间的运算下列关系式成立：

交换律：$A\cup B=B\cup A$；

$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

一般地，有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

例5　检查某些圆柱形产品时，它的长度及底面圆的直径都合格才算产品合格. 用

A 表示事件“直径合格”，

B 表示事件“长度合格”，

C 表示事件“产品合格”.

那么$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 分别表示 A,B,C 的逆事件，其含义依次为“直径不合格”、“长度不合格”、“产品不合格”，并且

1°　“直径不合格”必然导致“产品不合格”，因此“直径不合格”是“产品不合格”的子事件，即$\overline{A}\subset\overline{C}$，也有$\overline{B}\subset\overline{C}$.

2°　“产品不合格”是“直径不合格”与“长度不合格”的和事件：$\overline{C}=\overline{A}\cup\overline{B}$，即“直径不合格” 与“长度不合格”至少有一个发生.

3°　“产品合格”是“直径合格”与“长度合格”的积事件：$C=A\cap B$，即“直径合格”并且“长度合格”.

4°　“直径合格但长度不合格”记为 D，则 D 是“直径合格”与“长度合格”的差事件：$D=A-B$，即事件 A 发生而 B 不发生.

5°　“产品合格”的逆事件是“产品不合格”；

“产品合格” 与“直径不合格”不能都发生，它们是互斥的，从而有$C\cap\overline{A}=\varnothing$；

“产品合格”与“长度不合格”也是互斥的：$C\cap\overline{B}=\varnothing$.

例 6　设 A,B,C 是任意三个随机事件，则以下命题中正确的是(　　)

(A)$(A\cup B)-B=A-B$;

(B)$(A-B)\cup B=A$;

(C)$(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$;

(D)$A\cup B=(A\overline{B})\cup(B\overline{A})$.

解 由于

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=(A\overline{B})\cup(B\overline{B})=A\overline{B}=A-B,$$

故选(A). 其余三个都不正确,原因在于

$$(A-B)\cup B=(A\overline{B})\cup B=(A\cup B)(B\cup\overline{B})=A\cup B;$$

$$(A\cup B)-C=(A\cup B)\overline{C}=(A\overline{C})\cup(B\overline{C})=(A-C)\cup(B-C);$$

$$A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup(AB)=(A\overline{B})\cup(B\overline{A})\cup(AB).$$

第二节 古典概型 概率的古典定义

除了必然事件和不可能事件以外,一个事件在一次试验中发生与否带有很大的偶然性,即它可能发生也可能不发生;但是在大量重复试验中,人们发现事件发生的可能性的大小可以用[0,1]区间上的一个数字来刻画,这个数字称为事件发生的概率. 本节介绍在实践中应用比较广泛的古典概型问题.

如果随机试验具有下列特征:

1° 试验所有可能的结果只有有限个,不妨设为 n 个,并记它们为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$,试验的样本空间 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$;

2° 两两互斥的诸基本事件 $\{e_1\},\{e_2\},\cdots,\{e_n\}$ 出现的可能性相等.

称这种试验为**古典概型**.

对于古典概型,由于各个基本事件发生的可能性相同,即有

$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})$,并且

$$\begin{aligned}1&=P(S)=P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\&=P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})\end{aligned}$$

$=nP(\{e_i\}),i=1,2,\cdots,n.$

因此，$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})=\frac{1}{n}$.

这样，如果事件 A 包含的试验结果的个数为 k 个，即 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$，试验所有可能的结果为 n 个，即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件的个数}}{S\text{ 包含的基本事件的总个数}}.$$

概率的这种定义称为概率的古典定义.

由概率的古典定义可以推得下面的定理.

定理(加法定理)　两个互斥事件 A_1 与 A_2 的和事件的概率，等于事件 A_1 与 A_2 的概率之和，即

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

推论1　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

推论2　若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

下面举例对古典概率进行计算.

例1　将一枚硬币抛三次，设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”，事件 A_2 为“至少一次出现正面”，求 $P(A_1)$、$P(A_2)$.

解　由第一节例 2 知 $S_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$，试验结果的总个数为 8 个.

事件 $A_1=\{HTT,TTH,THT\}$包含 3 个结果. 因此

$$P(A_1)=\frac{3}{8};$$

事件 A_2 的逆事件$\overline{A_2}$为“三次都不出现正面”：$\overline{A_2}=\{TTT\}$，因此

$$P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

当样本空间的元素较多时，不必将 S 中的元素一一列出，只要求出 S 与事件 A 中所包含的试验结果的个数即可.

例 2 从一批由 90 件正品、3 件次品组成的产品中，接连抽取两件产品，(1) 第一次抽取的产品不放回，再从剩余的产品中取第二件，这种取法叫**不放回抽样**. (2) 第一次抽取产品观察其特征(正品还是次品)后放回去，再取第二次，这种取法叫**放回抽样**. 试就(1)、(2)两种情形，求第一次取得次品并且第二次取得正品的概率.

解 (1)不放回抽样

样本空间 S 中包含的试验结果的总个数，也就是"接连取两件产品"的取法共有 $C_{93}^1C_{92}^1$种.

设"第一次取得次品并且第二次取得正品"为事件 A，

"第一次取得次品并且第二次取得正品"的取法有 $C_3^1C_{90}^1$种，于是

$$P(A)=\frac{C_3^1C_{90}^1}{C_{93}^1C_{92}^1}=\frac{45}{1426}.$$

(2) 放回抽样

仿(1)，可得所求的概率为

$$p=\frac{C_3^1C_{90}^1}{C_{93}^1C_{93}^1}=\frac{30}{961}.$$

注 C_n^m 也写作$\binom{n}{m}$.

例 3 从 0，1，2，…，9 这 10 个数中任意选出 3 个不同的数字，设"3 个数字中不含 0 和 5"为事件 A_1，"3 个数字中不含 0 或 5"为事件 A_2，试求 $P(A_1)$、$P(A_2)$.

解 "从这 10 个数中任取 3 个数字"共有取法 C_{10}^3种，

如果取得的 3 个数字中不含 0 和 5，则这 3 个数字必须在其余的 8 个数字中取得，所以

"3 个数字中不含 0 和 5"的取法有 C_8^3 种，从而

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$