工科基础课提高·应试系列

计算方法解题秘典

内容提要
典型题分析
习题及答案

封建湖
车刚明
编著

西北工業大學出版社

计算方法解题秘典

封建湖　车刚明　编著

书必须

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书主要为理工科大学本、专科学生、研究生学习“数值计算方法”而编写的。内容包括：误差知识、函数插值、函数逼近、数值积分与数值微分、方程求根、线性代数方程组的直接与迭代解法、矩阵特征值与特征向量的计算、常微分方程初值问题的数值解法等方面的典型习题的解题思路、分析与求解方法。

本书也可作为应用数学专业本科生和数学系其它专业学生学习计算方法课程的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

计算方法解题秘典/封建湖等编. 西安：西北工业大学出版社，2005.1

ISBN 7-5612-1072-8

Ⅰ. 计… Ⅱ. 封… Ⅲ. 计算方法—高等学校—解题 Ⅳ. O241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 023641 号

出版发行：西北工业大学出版社

通讯地址：西安市友谊西路 127 号 **邮编**：710072 **电话**：(029) 88493844

网 址：www.nwpup.com

印 刷 者：陕西向阳印务有限公司

开 本：850 mm×1 168 mm 1/32

印 张：9.125

字 数：229 千字

版 次：2005 年 1 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷

定 价：13.00 元

西北工业大学出版社

前　言

随着电子计算机的广泛普及与使用，数值计算方法课程已成为高等院校理工科各专业本专科学生的必修课，也是不少数学系以外的理工科硕士研究生的必修课。为了有效地帮助广大学生学好数值计算方法课程的基本理论和解题方法，我们根据多年的教学经验编写了本书。

全书共有八章。第一章为代数插值，包括拉格朗日插值、牛顿插值、埃尔米特插值以及三次样条插值；第二章函数逼近，主要涉及最佳一致逼近、最佳平方逼近、数据的曲线拟合以及正交多项式、最小二乘法等内容；第三章是数值积分与数值微分，重点放在数值积分上，内容包括牛顿-柯特斯求积公式、龙贝格求积方法以及高斯型求积公式；方程求根是第四章的内容，涉及二分法、简单迭代法、牛顿迭代法、弦割法及抛物线法等；第五章是线性代数方程组的直接解法；第六章是线性代数方程组的迭代解法，主要讨论了简单迭代法（雅可比法作为特例处理）、高斯-赛德尔迭代法和超松弛迭代法及其收敛性讨论；第七章是矩阵的特征值与特征向量的计算，包括乘幂法与反幂法、雅可比法、QR 方法及二分法等内容；第八章是常微分方程初值问题的数值解法，单步法主要涉及欧拉法及其变形、龙格-库塔法，多步法涉及到阿达姆斯法。对误差估计和稳定性也作了讨论。

每章一开始都给出了内容提要，以便统一记号和概念。然后对该章所涉及到的方法逐一给出数值算例，对所涉及的理论证明题，也用不少例题作了示范处理。除少量习题因意思清楚，方法确定而未给出分析外，大部分习题在解答之前都给出了分析。全

书共精选了近200道题，其中有的题目采用一题多解，以帮助读者掌握解题的思路和技巧，加深对所学内容的理解。为了加深理解，每章后均给出一定量的习题。

本书第一、二、三、四、七章由封建湖执笔，第五、六、八章由车刚明执笔，最后由封建湖、车刚明共同定稿。

限于水平，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2005年1月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章 误差知识

一、内容提要

1. 绝对误差与相对误差

设 $x^{(*)}$ 是真值 x 的近似值,称 $e(x^{(*)}) = x - x^{(*)}$ 为近似数 x^* 的绝对误差,当 $|e(x^{(*)})| \leqslant \varepsilon$ 时,则称 ε 为 $x^{(*)}$ 的一个绝对误差限.

称 $e_r(x^{(*)}) = \dfrac{x - x^{(*)}}{x}$ 为近似数 $x^{(*)}$ 的相对误差,如果 $|e_r(x^{(*)})| \leqslant \varepsilon_r$,则称 ε_r 为 $x^{(*)}$ 的一个相对误差限. 在实用中,常常也按 $\dfrac{x - x^{(*)}}{x^{(*)}}$ 来近似估计相对误差.

2. 有效数字

将近似数 $x^{(*)}$ 表示为

$$x^{(*)} = \pm 10^m (0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots a_p) \quad (a_1 \neq 0,\ p \leqslant \infty)$$

其中 a_1 是1到9中的数字,$a_2, a_3, \cdots$ 均为0到9中的数字. 如果误差 $x - x^{(*)}$ 满足

$$|x - x^{(*)}| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

则说近似数 $x^{(*)}$ 至少具有 n 位有效数字,分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 如果 $n = p$,则说 $x^{(*)}$ 是有效数.

3. 有效数位与误差的关系

设近似数 $x^{(*)}$ 具有 n 位有效数字,则有

$$|\mathrm{e}_r(x^{(*)})| \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

有效数字的位数 n 越多，则 $x^{(*)}$ 的绝对误差与相对误差越小．

4．数值运算的误差估计

设 $x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \cdots, x_n^{(*)}$ 分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的近似值，则 $y^{(*)} = f(x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \cdots, x_n^{(*)})$ 是函数值 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的近似值．函数值的误差与自变量的误差有如下近似关系

$$\mathrm{e}(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^{(*)}} \mathrm{e}(x_i^{(*)})$$

$$\mathrm{e}_r(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^{(*)}} \frac{x_i^{(*)}}{y^{(*)}} \mathrm{e}_r(x_i^{(*)})$$

这里 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \cdots, x_n^{(*)})$．

5．数值运算应遵循的原则

(1) 要避免相近的两个数相减；

(2) 要避免绝对值相对很小的数作分母；

(3) 要防止大数“吃”小数，即防止绝对值相差很大的两个数相加或相减；

(4) 要尽量简化计算步骤，减小运算次数；

(5) 要使用数值稳定的计算公式．

二、典型题分析

例 1-1　设近似数 $x^{(*)} = 0.0670$ 是“四舍五入”得到的．试确定其有效数字的位数，并说明 $x^{(*)}$ 是否为有效数．

分析　本题只需按有效数字的定义严格判断．

解　因为 $x^{(*)} = 0.0670$ 是“四舍五入”得来的，所以 $x^{(*)}$ 的绝对误差限不超过 $x^{(*)}$ 最末位的半个单位，即

$$|\mathrm{e}(x^{(*)})| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

也可写为

$$|\mathrm{e}(x^{(*)})| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-1-3}$$

于是由定义可知，$x^{(*)}$ 具有三位有效数字，分别是 6，7，0.

由于 $x^{(*)}$ 从第一个非零数字开始，以后各位数字均为有效数字，故近似数 $x^{(*)}$ 是有效数.

注　由本例题不难进一步判断，任何“四舍五入”所得的近似数均为有效数.

例 1-2　试问真值 $x = 2.62$ 的近似数 $x^{(*)} = 2.58$ 是否为有效数？

解　因为

$$|x - x^{(*)}| = 0.04 < 0.05 = \frac{1}{2} \times 10^{-1} = \frac{1}{2} \times 10^{1-2}$$

所以由定义易知近似数 $x^{(*)} = 2.58$ 具有两位有效数字，分别是 2，5.

由于 8 不是有效数字，故 $x^{(*)}$ 不是有效数.

例 1-3　试确定$\frac{22}{7}$作为 π 的近似值具有几位有效数字？

解　因为

$$\frac{22}{7} = 3.142857\cdots$$

$$\pi = 3.141592\cdots$$

所以

$$|\pi - \frac{22}{7}| = 0.001264\cdots < 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$|\pi - \frac{22}{7}| < \frac{1}{2} \times 10^{1-3}$$

由有效数字的定义可知$\frac{22}{7}$作为 π 的近似值具有三位有效数字.

例 1-4　设 $x_1^{(*)}, x_2^{(*)}$ 分别是 x_1, x_2 的近似值. 试证乘积 $x_1^{(*)} x_2^{(*)}$ 的绝对误差与相对误差有如下近似表达式

$$e(x_1^{(*)}x_2^{(*)}) \approx x_2^{(*)}e(x_1^{(*)}) + x_1^{(*)}e(x_2^{(*)})$$

$$e_r(x_1^{(*)}x_2^{(*)}) \approx e_r(x_1^{(*)}) + e_r(x_2^{(*)})$$

分析 本题中的两个近似关系式都涉及到了自变量 $x_1^{(*)}$，$x_2^{(*)}$ 的误差与函数值 $x_1^{(*)}x_2^{(*)}$ 的误差，而近似公式

$$e(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^{(*)}} e(x_i^{(*)})$$

$$e_r(y^{(*)}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^{(*)}} \frac{x_i^{(*)}}{y^{(*)}} e_r(x_i^{(*)})$$

反映的正是自变量的误差与函数值的误差之间的近似关系，所以取二元函数 $y = f(x_1, x_2) = x_1x_2$，并应用上述两个近似公式就容易得到所要证明的近似表达式．

证 取 $f(x_1, x_2) = x_1x_2$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$$

应用上述近似公式，有

$$e(x_1^{(*)}x_2^{(*)}) \approx x_2^{(*)}e(x_1^{(*)}) + x_1^{(*)}e(x_2^{(*)})$$

$$e_r(x_1^{(*)}x_2^{(*)}) \approx \frac{x_2^{(*)}x_1^{(*)}}{x_1^{(*)}x_2^{(*)}}e_r(x_1^{(*)}) + \frac{x_1^{(*)}x_2^{(*)}}{x_1^{(*)}x_2^{(*)}}e_r(x_2^{(*)})$$

即

$$e_r(x_1^{(*)}x_2^{(*)}) \approx e_r(x_1^{(*)}) + e_r(x_2^{(*)})$$

例 1-5 设 $x_1^{(*)}$，$x_2^{(*)}$ 分别是 x_1，x_2 的近似值（$x_2^{(*)} \neq 0$）．试证商 $\dfrac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}$ 的绝对误差与相对误差有如下近似表达式

$$e\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right) \approx \frac{x_2^{(*)}e(x_1^{(*)}) - x_1^{(*)}e(x_2^{(*)})}{(x_2^{(*)})^2}$$

$$e_r\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right) \approx e_r(x_1^{(*)}) - e_r(x_2^{(*)})$$

分析 与例 1-4 的分析相同，只是这里应取二元函数 $f(x_1,$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$.

解　设 $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{x_2}$,则

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{1}{x_2}\quad,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=-\frac{x_1}{x_2^2}$$

于是由近似公式

$$\mathrm{e}(y^{(*)})\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^{(*)}}\mathrm{e}(x_i^{(*)})$$

得

$$\mathrm{e}\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right)\approx\frac{1}{x_2^{(*)}}\mathrm{e}(x_1^{(*)})-\frac{x_1^{(*)}}{(x_2^{(*)})^2}\mathrm{e}(x_2^{(*)})$$

即

$$\mathrm{e}\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right)\approx\frac{x_2^{(*)}\mathrm{e}(x_1^{(*)})-x_1^{(*)}\mathrm{e}(x_2^{(*)})}{(x_2^{(*)})^2}$$

又由近似公式

$$\mathrm{e}_r(y^{(*)})\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^{(*)}}\frac{x_i^{(*)}}{y^{(*)}}\mathrm{e}_r(x_i^{(*)})$$

有

$$\mathrm{e}_r\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right)\approx\frac{1}{x_2^{(*)}}\frac{x_1^{(*)}}{\dfrac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}}\mathrm{e}_r(x_1^{(*)})-\frac{x_1^{(*)}}{(x_2^{(*)})^2}\frac{x_2^{(*)}}{\dfrac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}}\mathrm{e}_r(x_2^{(*)})$$

整理后得

$$\mathrm{e}_r\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right)\approx\mathrm{e}_r(x_1^{(*)})-\mathrm{e}_r(x_2^{(*)})$$

例 1-6　设 $x^{(*)}$ 为 x 的近似值. 试证 $\sqrt[n]{x^{(*)}}$ 的相对误差约为自变量 $x^{(*)}$ 的相对误差的 $\dfrac{1}{n}$ 倍.

分析　与例 1-4 的分析相同,不过这里应取函数 $f(x)=\sqrt[n]{x}$.

解 设 $f(x)=\sqrt[n]{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$，由近似关系式

$$e_r(y^{(*)})\approx f'(x^{(*)})\frac{x^{(*)}}{f(x^{(*)})}e_r(x^{(*)})$$

易得

$$e_r(\sqrt[n]{x^{(*)}})\approx\frac{1}{n}(x^{(*)})^{\frac{1}{n}-1}\frac{x^{(*)}}{(x^{(*)})^{\frac{1}{n}}}e_r(x^{(*)})$$

亦即

$$e_r(\sqrt[n]{x^{(*)}})\approx\frac{1}{n}e_r(x^{(*)})$$

例 1-7 设近似数 $x_1^{(*)}=0.001$ 和 $x_2^{(*)}=-3.105$ 均为有效数，试分别求

$$x_1^{(*)}+x_2^{(*)},\quad x_1^{(*)}x_2^{(*)},\quad x_1^{(*)}/x_2^{(*)}$$

的绝对误差限与相对误差限.

分析 首先应确定 $x_1^{(*)}$ 和 $x_2^{(*)}$ 各自的绝对误差限，再由近似公式

$$e(y^{(*)})\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^{(*)}}e(x_i^{(*)})$$

确定函数值 $x_1^{(*)}+x_2^{(*)}$，$x_1^{(*)}x_2^{(*)}$ 和 $x_1^{(*)}/x_2^{(*)}$ 的绝对误差限，最后由定义求它们的相对误差限，也可以由例 1-4 中的公式求乘积与商的相对误差限.

解 因为 $x_1^{(*)}=0.001$ 和 $x_2^{(*)}=-3.105$ 为有效数，故它们的绝对误差分别不超过 $x_1^{(*)}$ 和 $x_2^{(*)}$ 最末位的半个单位，即

$$|e(x_1^{(*)})|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3},\quad |e(x_2^{(*)})|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

从而

$$|e_r(x_1^{(*)})|=\frac{|e(x_1^{(*)})|}{|x_1^{(*)}|}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times10^{-3}}{0.001}=0.5$$

$$|e_r(x_2^{(*)})| = \frac{|e(x_2^{(*)})|}{|x_2^{(*)}|} \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{3.105} \leqslant 1.610\ 31\times 10^{-4}$$

(1) 对 $x_1^{(*)}+x_2^{(*)}$，易得

$$|e(x_1^{(*)}+x_2^{(*)})| = |e(x_1^{(*)})+e(x_2^{(*)})| \leqslant$$
$$|e(x_1^{(*)})| + |e(x_2^{(*)})| \leqslant$$
$$\frac{1}{2}\times 10^{-3} + \frac{1}{2}\times 10^{-3} = 10^{-3}$$

$$|e_r(x_1^{(*)}+x_2^{(*)})| = \frac{|e(x_1^{(*)}+x_2^{(*)})|}{|x_1^{(*)}+x_2^{(*)}|} \leqslant$$
$$\frac{10^{-3}}{3.104} \leqslant 0.032\ 216\ 5\%$$

(2) 对 $x_1^{(*)}x_2^{(*)}$，由例 1-4 中的公式可得

$$|e(x_1^{(*)}x_2^{(*)})| \approx |x_2^{(*)}e(x_1^{(*)}) + x_1^{(*)}e(x_2^{(*)})| \leqslant$$
$$|x_2^{(*)}||e(x_1^{(*)})| + |x_1^{(*)}||e(x_2^{(*)})| \leqslant$$
$$3.105\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} + 0.001\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} =$$
$$1.553\times 10^{-3}$$

$$|e_r(x_1^{(*)}x_2^{(*)})| = \frac{|e(x_1^{(*)}x_2^{(*)})|}{|x_1^{(*)}x_2^{(*)}|} \approx$$
$$\frac{|x_2^{(*)}e(x_1^{(*)}) + x_1^{(*)}e(x_2^{(*)})|}{|x_1^{(*)}x_2^{(*)}|} \leqslant$$
$$\frac{1.553\times 10^{-3}}{3.105\times 10^{-3}} \leqslant 50.016\ 2\%$$

(3) 对 $x_1^{(*)}/x_2^{(*)}$，同样由例 1-4 中的公式得

$$\left|e\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right)\right| \approx \left|\frac{x_2^{(*)}e(x_1^{(*)}) - x_1^{(*)}e(x_2^{(*)})}{(x_2^{(*)})^2}\right| \leqslant$$
$$\frac{|x_2^{(*)}||e(x_1^{(*)})| + |x_1^{(*)}||e(x_2^{(*)})|}{|x_2^{(*)}|^2} \leqslant$$
$$\frac{1.553\times 10^{-3}}{3.105^2} \leqslant 1.610\ 83\times 10^{-4}$$

$$\left|e_r\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right)\right| = \frac{|e(x_1^{(*)}/x_2^{(*)})|}{|x_1^{(*)}/x_2^{(*)}|} \leqslant$$

$$\frac{1.61083\times 10^{-4}}{0.001/3.105} \leqslant 50.016\,2\%$$

注 本题有两点需要注意：一是求和的相对误差时尽量不要使用估计式 $|e_r(x_1^{(*)}+x_2^{(*)})| \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2}|e_r(x_i^{(*)})| = 0.5$，这是由于 $|e_r(x_1^{(*)})| \leqslant 0.5$ 和 $|e_r(x_2^{(*)})| \leqslant 1.6103\times 10^{-4}$ 相差太大，同时由于 $x_1^{(*)}$ 和 $x_2^{(*)}$ 不同号时该估计式一般并不成立，所以应尽量使用相对误差的定义计算 $|e_r(x_1^{(*)}+x_2^{(*)})|$，以获得尽可能小的相对误差限；另一个是 $x_1^{(*)}x_2^{(*)}$ 和 $x_1^{(*)}/x_2^{(*)}$ 的相对误差限结果相同，这是由于本题只能算出 $e_r(x_1^{(*)})$ 和 $e_r(x_2^{(*)})$ 的绝对值的上界，而并不知道 $e_r(x_1^{(*)})$ 和 $e_r(x_2^{(*)})$ 本身的近似值，从而由例 1-4 中的公式可知

$$\left|e_r\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right)\right| \approx |e_r(x_1^{(*)}) - e_r(x_2^{(*)})| \leqslant |e_r(x_1^{(*)})| + |e_r(x_2^{(*)})|$$

$$|e_r(x_1^{(*)}x_2^{(*)})| \leqslant |e_r(x_1^{(*)}) + e_r(x_2^{(*)})| \leqslant |e_r(x_1^{(*)})| + |e_r(x_2^{(*)})|$$

因此，在绝对误差限的意义下，有

$$\left|e_r\left(\frac{x_1^{(*)}}{x_2^{(*)}}\right)\right| \approx |e_r(x_1^{(*)}x_2^{(*)})|$$

例 1-8 设近似数 $x^{(*)} = 1.557$ 是某真值 x 经“四舍五入”所得，试估计 $\ln x^{(*)}$ 的绝对与相对误差限．

分析 本题容易求得自变量 $x^{(*)}$ 的绝对与相对误差限，而 $\ln x^{(*)}$ 的误差是函数值的误差，所以应该考虑使用函数值的误差与自变量的误差的如下关系式

$$e(y^{(*)}) \approx f'(x^{(*)})e(x^{(*)})$$

$$e_r(y^{(*)}) \approx \frac{f'(x^{(*)})x^{(*)}}{f(x^{(*)})}e_r(x^{(*)})$$

解 因为 $x^{(*)} = 1.557$ 由“四舍五入”得来，故

$$|e(x^{(*)})| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$|e_r(x^{(*)})| = \frac{|e(x^{(*)})|}{|x^{(*)}|} \leqslant 3.211\,304\times 10^{-4}$$

设 $y = f(x) = \ln x$，由上述关系式容易求得

$$|\mathrm{e}(\ln x^{(*)})| \approx \left|\frac{1}{x^{(*)}}\mathrm{e}(x^{(*)})\right| \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{1.557} \leqslant 3.211\ 304\times 10^{-4}$$

$$|\mathrm{e}_r(\ln x^{(*)})| = \left|\frac{\mathrm{e}(\ln x^{(*)})}{\ln x^{(*)}}\right| \leqslant \frac{3.211\ 304\times 10^{-4}}{\ln 1.557} \leqslant 0.072\ 529\ 1\%$$

例 1-9　设计算圆面积 A 时要求相对误差不超过 0.01%，试问对该圆半径 R 测量时允许产生的绝对误差不应超过多少？

分析　面积 A 与半径 R 之间具有函数关系，所以本题涉及的仍然是一个函数的误差与自变量的误差之间的关系问题，因此应考虑使用关系式

$$\mathrm{e}_r(A^{(*)}) \approx \left(\frac{A'}{A}\right)_{R=R^{(*)}} R^{(*)}\mathrm{e}_r(R^{(*)})$$

解　因为 $A = \pi R^2$，$A' = 2\pi R$，所以由上式得

$$|\mathrm{e}_r(A^{(*)})| \approx \left|\frac{2\pi R^{(*)}}{\pi(R^{(*)})^2}R^{(*)}\mathrm{e}_r(R^{(*)})\right| = 2\,|\mathrm{e}_r(R^{(*)})|$$

由 $2\,|\mathrm{e}_r(R^{(*)})| \leqslant 0.01\%$ 知 $|\mathrm{e}_r(R^{(*)})| \leqslant 0.005\%$. 所以测量半径 R 时绝对误差限大约不应超过 0.005%.

例 1-10　测量一矩形的长和宽分别为 100 ± 0.01 cm 和 50 ± 0.01 cm，试求该矩形面积的绝对误差限.

分析　面积 y 是长 x_1 和宽 x_2 的二元函数，所以应使用函数的误差与自变量的误差间的关系式

$$\mathrm{e}(y^{(*)}) \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x^{(*)}}\mathrm{e}(x_1^{(*)}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x=x^{(*)}}\mathrm{e}(x_2^{(*)})$$

解　设 $y = f(x_1, x_2) = x_1x_2$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$，$\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$，于是由上式知

$$\mathrm{e}(y^{(*)}) \approx x_2^{(*)}\mathrm{e}(x_1^{(*)}) + x_1^{(*)}\mathrm{e}(x_2^{(*)})$$

代入 $x_1^{(*)}=100\ \text{cm}$, $x_2=50\ \text{cm}$, $|e(x_1^{(*)})|\leqslant 0.01\ \text{cm}$, $|e(x_2^{(*)})|\leqslant 0.01\ \text{cm}$,则得面积 $y^{(*)}=x_1^{(*)}x_2^{(*)}$ 的绝对误差限

$$\begin{aligned}|e(y^{(*)})| &\approx |x_2^{(*)}e(x_1^{(*)})+x_1^{(*)}e(x_2^{(*)})|\leqslant\\ &|x_2^{(*)}||e(x_1^{(*)})|+|x_1^{(*)}||e(x_2^{(*)})|\leqslant\\ &50\times 0.01+100\times 0.01=1.5\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

例 1-11 已知自由落体运动的距离 S 与时间 t 的关系为 $S=\frac{1}{2}gt^2$. 假设重力加速度 g 的取值准确,试证明当时间 t 增加时,距离的绝对误差在增加,而相对误差在减少.

分析 与例 1-9 类似.

证 设 $t^{(*)}$ 为时间 t 的近似值,则距离的近似值为 $S^{(*)}=\frac{1}{2}g(t^{(*)})^2$. 由关系式

$$e(S^{(*)})\approx S'(t^{(*)})e(t^{(*)})$$

$$e_r(S^{(*)})\approx\frac{S'(t^{(*)})}{S(t^{(*)})}e(t^{(*)})$$

可知

$$e(S^{(*)})\approx gt^{(*)}e(t^{(*)})$$

$$e_r(S^{(*)})\approx\frac{2}{t^{(*)}}e(t^{(*)})$$

显然当 $t^{(*)}$ 的误差恒定时,绝对误差 $e(S^{(*)})$ 随时间的增加而增加,而相对误差 $e_r(S^{(*)})$ 随时间的增加而减少.

例 1-12 设有递推算法

$$y_n=y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}\quad(n=1,2,\cdots)$$

若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$(五位有效数字),试求 $y_n^{(*)}$ 的绝对误差,并说明这个计算过程是否稳定.

解 容易推得

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com