統計数学初步

中山大学数学力学系
統編数学教研室編著

中　山　大　学

1 9 6 0 年

献　给

康乐园人民公社

序

十九世紀以来，由于生产力和現代科学技术，特别是工业和近代物理的发展与要求，統計数学引起了人們广泛的兴趣和重視，得到了迅速的发展，并且大量地被应用到工农业生产、現代科学技术、經济、軍事部門和其他自然科学中去。可以預料，随着生产力和現代科学技术的飞跃发展，統計数学將日益显出其重要性。我国解放十年来，特別是經过1958年和1959年連續兩年大跃进，工农业生产和科学技术取得了輝煌的成就和迅速提高。党提出要在最短时期內把我国建設成为一个具有現代工业、現代农业、現代科学技术、現代国防的社会主义强国。这一光荣而又艰巨的任务也向統計数学工作者提出了极高的要求，同时也为統計数学在我国蓬勃发展开辟了广闊的天地。在这种形势下，尽可能普及这方面的知識，就应当提到日程上来。我們教研室全体同志为了响应党的关于工农羣众知識化及中国数学会第二次会議关于大力发展統計数学的号召，并为了迎接全国中、小学教学改革和我們康乐园人民公社的誕生，在短时期內，編出了这本普及本——統計数学初步。这一普及本之編出，完全証明了党的領导与羣众运动相結合这一方針的伟大胜利，也完全駁倒了所謂数学、科研不能大搞羣众运动之謬論，因为我們这本普及本之編出，就是在党的直接領导与关怀下，发动了本室的教师与部份同学，在这短短一个半月的課余时間中完成的。

本書只包括了統計数学中之概率論、数理統計、綫性规划三方面內容。至于統計数学中之其他部份內容，如排队論，博奕論、信息論、过程論等，由于时間匆促，不能一一在这里介紹。

統計数学在近年来大量地使用了現代数学中的种种最新工具。为使更多的同志能掌握这些知識，我們在这本普及本中，只要求讀者具有一般的微积分知識，便可順利閱讀。本書既适于自学又可以作为教材和实际工作者的統計数学手册之用。由于时間比較匆促，加上我們的水平有限，难免有許多錯誤，請各方面的同志們加以批評和指正，以便在重新修訂时能有更好的改进。

1960年7月

緒 論

辯証唯物主义者認为偶然性和必然性这兩个在語义上截然相反的概念都是客观地存在于自然界和社会中。否認偶然性的存在，認为世界上只有必然性，就会犯形而上学的錯誤。与之相反，如果認为世界上沒有必然性，人类社会的各种事件只是偶然的，則必然陷于唯心主义不可知論的泥坑。在承認了必然性和偶然性的客观存在之后，还应进一步認識他們之間的辯証关系。偶然性和必然性不是互相排斥的，而是互相联系的。恩格斯說得好：“被断定为必然的东西是由种种純碎的偶然所構成，而被認为偶然的东西，則是一种有必然性隐藏在里面的形式”。由于偶然現象和必然現象是客观存在的，因而各种現象的本質联系可能以兩种不同形式表現出来。一种是作为某一类相似的現象表現出来，它的作用直接表現在这一类的每个个别現象中，这种規律在自然科学中通常称为簡單規律。另一种是以統計学形式表現出来，这种規律称为統計規律。后者与前者有所不同，其特点在于：第一，它不直接地表現在某一总体的每个个别現象中，而只表現在整个总体中；第二，它不能完全决定个别現象的命运，它容許离开总体的总方向的偶然趋向，因为作为整体的因素的每个个别現象，虽然同整体一齐参加受統計規律支配的运动，但它在个体运动中还受着其他規律的作用。

統計数学是研究大量現象总体規律的学科，因而它所得的規律是統計規律，是平均数的規律。所謂大量現象即在这現象中有大量的个体，在每一时刻每个个体所处的狀态是偶然的，或随机的。例如气体由大量气体分子所組成，每个分子以很快的速度不断运动，在运动中互相碰撞，在每一时刻每个分子速度的大小和方向是完全偶然的。大量現象还有一种表現形式，即这时个体可能很少，如只有一个，但重复次数甚大，且每次出現的結果是偶然的。例如一个均匀的硬币每擲一次出現正面或反面是完全偶然的。侭管总体中每个个体出現的結果是完全偶然的，似乎不受任何規律支配，然而对总体来說是完全受某种規律所統治，所决定的。例如大量气体分子互相碰撞結果形成对器壁的压力；当擲硬币次数很大时，出現正反面的次数漸趋于稳定，接近各占一半。这种大量現象的規律——統計学規律，和簡單規律一样都反映現象本質的联系，都具有規律的基本屬性，即一般性，必然性，和客观性。

有些人認为：研究概率論是由于人类的无知，因而它所研究的东西是我們所不能知道的，或者是由于人类知識不足，因而当人类知識足够时，概率論就不需要了。然而辯証唯物主义者認为世界上一切事物都是能够被人們所認識。昨天沒有被人类所認識和掌握的东西，今天它可能被人們所認識，而今天人类还不能認識和掌握的东西，最后总有一天会被人們所掌握和認識。而認識的基础和眞理的标准是实践，人們对客观現实的認識的发展是沒有止境的。这是辯証唯物主义和唯心主义不可知論的根本分岐。

从另一方面来看，正如前面所說：統計数学是研究大量偶然現象的必然性規律的学科。由于偶然現象是客观存在的，因而統計規律也必然是客观存在的。不能認为統計規律之所以在科学中存在，只是由于統計規律背后的基本規律尙未被人所認識，是由于人类知識不足。因为統計学規律是总体的規律，簡單規律只是个别現象的运动和发展的規律，因而掌握了个别現象运动的規律决不等于掌握了总体运动的規律，例如假定我們已經知道每一分子运动的一

切簡單規律，这是否能够說組成物微体粒的整个总体的統計規律已被認識了呢？显然不能这样說。上述簡單規律只能决定某一个微粒的行动，但它不能决定整体微粒的行动。

統計数学在現代科学技术中占着重要的地位，是研究自然現象，处理現代工程技术，及公用事业問題的有力工具，它应用范围之广及威力之巨大已为大量事实，特別是1958年以来我国社会主义建設全面大跃进的过程中的事实所証明。如利用統計数学对大量产品进行检查，在生产过程中进行質量控制，在气象中的長期天气預报，判断藥物的疗效，研究高級神經活动，遙控遙測等，在此不一一枚举。但应用統計数学去研究客观世界某一現象时，首先应該注意从研究对象的具体情况和我們研究的目的出发。因为任一單一現象都包含有必然性因素和偶然性因素，任何一种規律都不單只受簡單規律或只受統計規律支配。从不同的方面来看，同一現象在其发展过程中既受統計規律，又受簡單規律的作用。因而只有充分弄清研究对象才能决定我們能否应用統計数学的方法去研究。在这里我們認为有兩种偏向是应該注意的：一种是誇大統計規律的作用，例如在水文現象中，洪水的变化情况可以看作一个随机变数，它的大小是完全偶然的，因而可以用統計数学的方法来研究总体的一般趋向。然而水文情况比較复杂，某时某地洪水的大小与当时当地降雨量及該流域条件之間都有严格的因果关系，水文中需要考虑某年某月某日的洪水的大小，这就不能用統計規律性来研究，而必須运用其他办法，如成因分析来找出水文現象中的因果关系。假如一个水文工作者仅在統計数学中兜圈子是十分錯誤的。另一种偏向則恰好相反，低估甚至否認統計数学的作用，这种偏向在前面所述統計規律性特点中已作了批判，这里不再贅述。

最后必須严肃指出一些資产阶級統計学家为了达到其掩盖資本主义社会之矛盾，痲痹人民羣众的斗爭，故意將一些社会現象的阶級根源加以抹煞，而用統計規律性加以解释，例如資本主义社会的周期性經济危机本是一种必然的現象，这是資本主义制度的本質决定的，但却有人别有用心地用統計数学方法来將它与太阳中之黑点联系起来，企图把經济危机說成是偶然的，来掩盖資本主义的丑惡本質，这是我們坚决反对和必須严肃批判的。

目　录

第三篇 綫性规划

第一篇 概率論

第一章 基本概念

§1 事件

在客观世界里，各种現象大体上可归結为兩种类型。一类現象是这样的：每当一定条件S实現时，某一事件必然发生或者必然不发生，我們称前者为必然事件而后者为不可能事件（对条件S而言）。另一类現象則是这样的：每当一定条件S实現时，某一事件可能发生也可能不发生，这事件我們称之为随机事件或偶然事件（对条件S而言）。以后，我們用Ω代表必然事件，0代表不可能事件。讓我們先来考察一个必然事件与不可能事件的例子：

在标准大气压力及溫度$t°C$（$0<t<100$）的情况下（条件），水一定处于液体狀态（必然事件），而不能处于气体或固体狀态（不可能事件）。

以下再来举几个偶然事件的例子：

（例1）当擲一个質量均匀的硬币（条件），它可能出現正面（事件），也可能出現反面，因而它是一个偶然事件。

（例2）某电話总局，在时間t內（条件）发生5次呼喚（事件）是一个偶然事件，因为在时間t內，可能发生0次，1次，2次，…，n次，…呼喚。

（例3）某射手用小口径步枪（条件）进行射击，而命中第十环（事件）是一个偶然事件，因为某射手命中第十环，他不但依賴于該射手的射击技术，而且还依賴于其他的偶然因素如风速、視差等，因而虽然条件不变，但每次射击之前，人們不能肯定他是否一定命中第十环。

我們說所有現象可大体上归納为上述兩种类型，絕不是意味着它們二者之間存在着不可超越的鴻沟，恰恰相反，在它們变化发展过程中是可以相互滲透，相互轉化的。正如恩格斯所說："被断定为必然的东西，是种种純粹的偶然所構成的，而被認为是偶然的东西，則是一种有必然性隐藏在里面的形式"。（恩格斯："費尔巴哈与德国古典哲学的終結"1959年人民出版社，第34頁）

如緒言中所指出：偶然事件是概率論最基本的研究对象，今后为簡便起見，簡称为事件。事件与事件之間是存在某些关系，这些关系，在我們今后的論述中是会常遇到的，为此我們首先来研究它們。

1）事件的包含及相等：

設有事件A及B，若A发生則B必发生，便称事件B包含事件A，并記作

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A;$$

倘若事件A包含B，同时事件B亦包含A，則称事件A与B相等，我們記作

$$A=B.$$

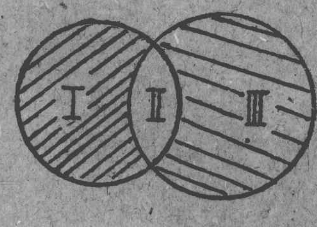
2）事件的并与差：

对于任意兩事件A及B，我們用$A+B$代表它們的并，即A与B中至少有一个发生的事件。

設有事件A及B，由A发生而B不发生所組成的事件，称为A与B之差，以$A-B$表之。

3）事件的交：

設有事件A及B，A与B同时发生的事件，称之为A与B之交，以AB表之。



（例4）設有一个射手向形如右图的目标射击，令A表示命中第Ⅰ与Ⅱ区域的事件，B表示命中第Ⅱ与Ⅲ区域的事件，則$A+B$表示命中第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ区域的事件，$A-B$表示命中第Ⅰ区域的事件，AB表示命中第Ⅱ区域的事件。

（附注）幷与交的概念不难推广到有限个事件的情形。設有事件A_1，A_2，A_3，……，A_n，我們用$A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n$或$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$表示它們的幷，即A_1，A_2，……，A_n中至少有一发生的事件。

由A_1，A_2，……，A_n同时发生所組成的事件称之为A_1，A_2，……，A_n之交，記作

$$A_1A_2\cdots\cdots A_n\text{或}\prod_{i=1}^{n}A_i\text{。}$$

4）事件不相容性：

ⅰ）我們說事件A与B是互不相容的，如果A与B不可能同时发生，亦即$AB=\emptyset$。

ⅱ）我們說事件A_1，A_2，…，A_n是兩兩互不相容的，如果对于这n个事件A_1，A_2，……，A_n中的任何兩个事件都是互不相容的，亦即当$i\neq j$时，$A_iA_j=\emptyset\begin{pmatrix}i=1,2,\cdots\cdots,n\\ j=1,2,\cdots\cdots,n\end{pmatrix}$

5）对立事件：

設有事件A，A不发生的事件称之为A的对立事件或互补事件，以$\overline{A}$表之，于是有$A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\emptyset$。

在例2中，时間t內“发生一次呼喚”，“发生2次呼喚”，……，“发生n次呼喚”，是兩兩互不相容的事件，“不发生呼喚”和“至少发生一次呼喚”是相互对立的事件。

§2 概率的概念

1）頻率

緒言中，我們已指出概率論的任务就是要揭示大量偶然現象的規律性，因而在一定条件下，对某种偶然現象仅作一次或兩次的少量观察，这是无法获得这种規律的。为了得出这种規律性，我們要在同一条件下，进行多次重复的实驗（观察），每次实驗里我們所感兴趣的事件A可能出現也可能不出現，設在n次实驗里，事件A出現k次。事件出現的次数k与所进行实驗的总数n之比，称为在n次实驗中事件A出現的頻率，以μ表之：

$$\mu=\frac{\text{事件A出現次数}}{\text{实驗的总次数}}=\frac{k}{n}\text{。}$$

在例3中，若这射手在同一条件下进行射击300次，而命中第十环的次数为225次，則我們便說該射手在300次射击中命中第十环的頻率μ为

$$\mu=\frac{255}{300}\text{。}$$

在例1中，若我們作多次重复的抛擲，这硬币擲出正面的頻率为：

$$\text{擲出正面的頻率} = \frac{\text{擲出正面的次数}}{\text{擲硬币的次数}}$$

經驗証明，在同一条件下，对某种偶然事件进行多次重复的实驗，当实驗次数很多时，偶然事件(随机事件)出現的頻率是稳定的。实驗次数愈多，則上述事件出現的頻率的稳定性便更为显著。就以擲硬币为例，当拋擲的次数很多时，出現正面的頻率就近于$\frac{1}{2}$，卽大約在全部总拋擲次数中，拋出正面及反面的次数各占一半。从下表所列出的数据更雄弁地証实这一点：

实驗者	擲錢次数	擲出正面次数	擲出正面頻率
蒲丰	4040	2048	0.5080
K_1 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K_1 皮尔逊	24000	12012	0.5005

2）概率

我們从上面清楚地看到在一定条件下，某偶然事件的出現与否是不能在一次实驗之前給以肯定的回答。但是在不变的情况下，对它进行多次重复的实驗，这事件出現的頻率便会在某一固定数値附近摆动，这固定数値我們称之为摆动中心。当实驗次数愈多时，事件出現的頻率与摆动中心的接近愈显著。

在一定条件下，作大量重复实驗的过程中，偶然事件出現的頻率所显現的稳定性，就是大量偶然現象里所隐藏的必然性，它是在一定条件下偶然事件本身所固有的客观規律性，是不为人們主观願望所能改变的。为了对此作量的描写，我們称事件A出現的頻率所围繞的摆动中心为A出現的概率，或称为A的概率，并記作P（A）。

例如擲一均匀硬币，令A表示擲出正面这一事件，則有

$$P(A)=\frac{1}{2}。$$

3）概率的性質

从概率的定义出发，我們可以得到如下的重要性質：

性質一：事件A的概率一定滿足$0 \le P(A) \le 1$；

性質二：必然事件的概率为1：$P(\Omega)=1$，不可能事件的概率为零：$P(\emptyset)=0$；

性質三：設事件A、B是互不相容的，則有$P(A+B)=P(A)+P(B)$。事实上，假設对某一現象进行大量实驗，在n次实驗中，出現事件A有a_1次，B有a_2次。由于A、B互不相容，故事件$A+B$共出現a_1+a_2。由于

$$A+B\text{发生的頻率}=\frac{a_1+a_2}{n}=\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}=A\text{发生的頻率}+B\text{发生的頻率}。\text{所以}$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)。$$

（例5）在第1、2、3、4四路公共汽車經过的車站有一位乘客在等候着第1路与第2路汽車，假定各路汽車經过这个車站的次数平均是一样的，求首先到站的汽車是这个乘客所需路綫汽車的概率。

解：令A表示第1路汽車首先到站的事件；

B表示第2路汽車首先到站的事件；

而C表示那位乘客所需要路綫汽車首先到站的事件。

显然$C=A+B$。

由题設A、B是互不相容事件，且$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，利用上述事件概率性質三，便有

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}。$$

我們可以將事件概率性質三加以推广：

設有n个兩兩互不相容的事件A_1，A_2，…，A_n，而事件A是它們之并：$A=A_1+A_2+\cdots+A_n$，則

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)。$$

这命題之所以成立，其理由与上述$n=2$的情形相仿，在此不再贅述。这里我們要特别注意，当利用性質三来解决一些具体問題时，这性質中关于兩事件互不相容的假設是很重要的，当这假設不满足时，便会使我們导出謬誤的結論。

（例6）假設甲乙兩射手在同样条件下进行射击，而甲乙兩射手命中的概率分别为0.9、0.8，如果兩个射手同时发射，問命中目标的概率是多少（兩顆子弹之一中了目标就認为命中。）

解：令A表示甲射手命中目标的事件；

B表示乙射手命中目标的事件；

C表示甲乙射手中至少有一个命中的事件。

显然$C=A+B$。

倘若不再仔細分析事件A、B是否互不相容而应用性質三，則$P(C)=P(A)+P(B)=0.9+0.8=1.7$。至于$P(C)$的計算方法，我們以后將会講到。

性質四：設有兩事件A和B，其中A包含B，那么有等式

$$P(A-B)=P(A)-P(B)。$$

事实上，由于$A\supset B$，因此等式$A=(A-B)+B$成立，又由于$(A-B)$与B是互不相容的，故由性質三得：

$$P(A)=P(A-B)+P(B)，$$

即 $$P(A-B)=P(A)-P(B)。$$

性質五：設A、B为任意兩个事件，則$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

証：因为 $A+B=A+(B-AB)$，

故 $P(A+B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

§3 条件概率，乘法法則，事件的独立性

1）．条件概率、乘法法則

我們先考察下面的例子：有兩个工厂生产灯泡。第一个厂供应全部消費品的70%，而第二个厂供应30%。在每一百个灯泡中，第一个厂平均有83个标准品，而第二个厂仅有63个标准品。从这些已知情况，我們容易算出消費者購到标准灯泡的概率为0.77（即在100个灯泡中，有77个是标准品。）但是，如果这些产品全由第一个厂供应的，那么消費者購到标准灯泡（事件A）的概率就为0.83了。

从上例中看到，同一事件——購买到标准灯泡（事件A）的概率在不同的条件下，有着不同的結果。消費者購到标准灯泡的概率为0.77，是沒有附加条件得到的；如果已知灯泡是由第一厂供給的（事件B）条件下，消費者購买到标准灯泡的概率就为0.83。为了区别起見，我們把后者称为已知事件B发生时，事件A的条件概率，且以符号$P(A/B)$表示之，于是有

$$P(A)=0.77, \quad P(A/B)=0.83,$$

对于P（A），我們所考虑的对象是全部消費灯泡，而对于P（A/B）則考虑其中的一部分（即由第一个厂生产的消費灯泡）。例如，全部消費灯泡共有10000个，則有7000个由第一厂生产的，有3000个由第二厂生产的；在屬于第一厂的7000个产品中有5810个是标准品，故

$$P(A/B)=\frac{5810}{7000}=\frac{5810/10000}{7000/10000}=\frac{P(AB)}{P(B)}。$$

現在我們来引进条件概率的一般定义：

設事件B的概率大于0，即P（B）>0，則对任何事件A，定义

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1}$$

p（A/B）称为已知事件B发生时，事件A的条件概率，（1）式也可以改写为：

$$P(AB)=P(B)P(A/B) \tag{2}$$

注意如P（B）＝0 則P(A/B）无意义。但如果我們了解0乘无意义的数仍为0，則在P(B)＝0时，（2）式仍成立。等式（2）称为乘法法則。

对于乘法法則，我們还可推广到一般的情形，即

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{3}$$

事实上，

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_n)&=P(A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})\\&=P(A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_{n-1}/A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})\\&=\cdots\\&=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})\end{aligned}$$

今举一例来說明乘法法則的簡單应用：

（例7）設某工厂所生产的产品有98%被認为是合規格的，而在每100件合規格产品中平均有90件是一等品，求該厂生产一等品的概率。

解：令A表示产品是合規格的事件，B表示产品是一等品的事件，由于一等品又必須同时是合規格的，因此P（AB）就是該工厂生产一等品的概率。

由題設，P（A）＝0.98，P（B/A）＝0.9，故

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=0.98\times0.9=0.882\sim0.88。$$

2).事件的独立性

在試驗由不同机器生产的兩束紗的强度时看到，对于第一束紗，某种長度的样品承受得住一定的标准載荷的概率是0.84，而对于第二束的概率是0.78，求取自不同的兩束紗的兩个样品都承受得住标准載荷的概率。

我們把取自第一束紗的样品承受得住标准載荷的事件記作A，把第二束的类似事件記作B，所求的概率，由乘法法則

$$P(AB)=P(A)P(B/A),$$

由于第二束紗的样品承受得住标准載荷的概率与第一束紗的样品的强度无关，故从条件概率的意义看来，显然应該有

$$P(B/A)=P(B)=0.78,$$

由此可得

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.84\times0.78=0.6552$$

考虑了上述的特例后，我們現在来引进事件的独立性的定义：我們称二事件A、B为相互独立，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)。$$

不难証明，如果A、B相互独立，且$P(B)\neq0$，則$P(A/B)=P(A)$。

也就是說，已知B发生时，A的条件概率和$P(A)$沒有区别。

由事件独立性的定义，易見不可能事件或必然事件与任何事件相互独立。

若事件A与B是相互独立，則按事件独立性的定义不难推知B与A相互独立，$\overline{A}$与B相互独立及$\overline{A}$与$\overline{B}$互相独立（其中$\overline{A}$、$\overline{B}$分别表示事件A与B事件的对立事件）。事实上，假設事件A与B相互独立，則

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$$

同理 $$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=P(B)[1-P(A)]=P(B)P(\overline{A}),$$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}-\overline{A}B)=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=P(\overline{A})[1-P(B)]=P(\overline{A})P(\overline{B})。$$

在上面仅討論了兩事件的独立性，这可推广到任意有限多个事件上去：

对于事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，我們說它們是相互独立的，如果对于任何 $1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n$，$(1\leq r\leq n)$有：

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_r})。$$

显然，若$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$，相互独立，則

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)。$$

利用事件独立性往往有助于我們寻求某些事件的概率，讓我們回到§2例6中去。显然，甲射手能否射中目标与乙射手是否射中目标是毫无关系的。因此事件A和B就是相互独立的。要使甲、乙射手同时发射而命中目标（事件C），只須下面三种情形之一实現：

1). 甲射手射中目标（事件A）同时乙射手不射中目标（事件$\overline{B}$）；

2). 甲射手不射中目标（事件$\overline{A}$）同时乙射手射中目标（事件B）；

3). 甲射手射中目标（事件A）同时乙射手射中目标（事件B），

因此

$C=A\overline{B}+B\overline{A}+AB$，且事件$A\overline{B}$，$B\overline{A}$，AB是兩兩不相容的。

据題設 $P(A)=0.9$，$P(B)=0.8$。

而 $P(\overline{A})=1-P(A)=0.1$，$P(\overline{B})=1-P(B)=0.2$。

由于事件A与B独立，因之A与$\overline{B}$独立；B与$\overline{A}$独立，按事件独立性定义及事件概率性質三有

$$P(C)=P(A\overline{B})+P(A\overline{B})+P(AB)$$
$$=P(\overline{A})P(B)+P(\overline{B})P(\overline{A})+P(A)P(B)$$
$$=0.9\times0.2+0.8\times0.1+0.6\times0.8=0.98。$$

这就是說，甲乙兩射手在每100次同时发射中，平均命中目标98次。

再举一个在軍事上較为有代表性的例子：

（例 8）假設用步枪射击飞机，其击中的概率等于$P=0.004$，試求用250枝步枪同时各射一弹而击中飞机的概率。

因为以一枝步枪射击而不中的概率为$1-P=0.996$，且每枝步枪发射是否击中是彼此独立的，故250枝步枪同时射击不中的概率是：

$$(1-P)^{250}=(0.996)^{250}=0.37.$$

于是所求击中飞机的概率为：

$$1-(1-P)^{250}=1-0.37=0.63.$$

因此虽然一支步枪发射能击中飞机的概率是微乎其微（0.004），但是在大量的步枪同时射击时，飞机被击中的概率就非常大了。

3）．全概率公式及貝叶斯公式

在这一节里讓我們求兩个在实际应用及理論上都极为重要的公式。

假設事件B能与n个兩兩互不相容事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$之一并且也只能与其中之一同时出現，就是說：

$$B=\sum_{i=1}^{n} BA_i$$

这里只要i取不同之值i'，i''时，事件$BA_{i'}$与$BA_{i''}$就互不相容，按概率性質三的推論我們便有：

$$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n).$$

再利用乘法法則我們得到：

$$P(B)=P(B_1)P(B/A_1)+P(B_2)P(B/A_2)+\cdots+P(B)P(A_n) \quad (4)$$

等式（4）称为全概率公式。現在举一例說明它的具体应用。

（例 9）設有三个工厂生产电灯泡，第一个厂供应全部消費品40%，第二个工厂供应40%，第三个工厂供应20%。而第一厂生产标准品的概率是0.95，第二个厂的概率是0.8，第三厂的概率是0.85，求消費者买到合标准的灯泡的概率。

解：令 A_1表示灯泡由第一厂生产的事件；

A_2表示灯泡由第二厂生产的事件；

A_3表示灯泡由第三厂生产的事件；

B表示灯泡是标准品的事件，

由題設

$$P(A_1)=0.4,\ P(A_2)=0.4,\ P(A_3)=0.2,$$

$$P(B/A_1)=0.95,\ P(B/A_2)=0.8,\ P(B/A_3)=0.85.$$

按全概率公式知所求概率为：

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)\\&\quad P(B/A_3)\\&=0.4\times0.95+0.4\times0.8+0.2\times0.85\\&=0.475+0.32+0.17\\&=0.87.\end{aligned}$$

这就是說，消費者每买到100灯泡中約有87个是合标准的。如果我們保持推导等式（4）时的一切假設，按乘法法則对于任意事件A_i与B我們有

$$P(A_iB)=P(B)P(A_i/B)=P(A_i)P(B/A_i)$$

因此

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)}$$

利用全概率公式（4）我們求得：

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+\cdots+P(A_n)P(B/A_n)}$$

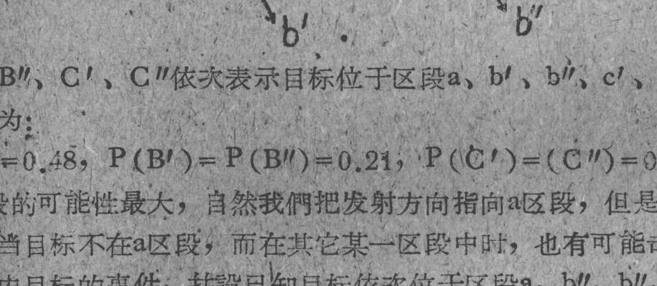
$$=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B/A_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n)。\qquad(5)$$

这样得到的公式（5）称为貝叶斯公式，有时也称为事后概率（假設概率）公式。

在实际生活中，我們往往会遇着这样的問題，假設事件B可以在种种不同条件下出現，关于这些条件的性質可以作n个假設：A_1、A_2、……、A_n，按某些理由，我們在实驗之前知道这些假設的概率$P(A_i)$，也知道在假設A_i下事件B出現的概率$P(B/A_i)$，做一次其中事件B的确出現的实驗，这应該引起对假設A_i的概率的重新估計，而且貝叶斯公式正是在数量上完滿的解决这个問題。

如在炮兵实习时，往往要进行所謂"試射"。其目的是要确定某些射击条件（如目标的位置，瞄准正确性等）的知識，以便測定这些条件对射击有效性的影响。

（例10）假設某炮兵向分布在直綫MN区段上的目标进行射击（如下图），我們把MN分成五个不大的区段a、b′、b″、c′、c″。假定我們不知道目标的确切位置，但依据某資料，我們却能預知目标落在这五个区段中各段的概率。



現在以A′、B′、B″、C′、C″依次表示目标位于区段a、b′、b″、c′、c″的事件，并設这些事件相应的概率为：

$$P(A)=0.48,\ P(B')=P(B'')=0.21,\ P(C')=(C'')=0.05。$$

由于目标落在a区段的可能性最大，自然我們把发射方向指向a区段，但是射击上不可避免产生偏差，故此虽然当目标不在a区段，而在其它某一区段中时，也有可能击中它。

再以K表示击中目标的事件，并設已知目标依次位于区段a、b″、b″、c′、c″中而击中目标的条件概率各为：

$$P(K/A)=0.56,\ P(K/B')=0.18,\ P(K/B'')=0.16,$$

$$P(K/C')=0.06,\ P(K/C'')=0.02。$$

假定射击已进行过，并且目标被击中了（即事件K已发生）。在这样条件下，現在要求重新估計目标落在a、b′、b″、c′、c″各区段的概率，这个問題是有意义的，它可以使我們对假設条件作进一步的認識，据貝叶斯公式立刻可得到所求概率分别为：

$$P(A/K)=\frac{P(A)P(K/A)}{P(A)P(K/A)+P(B')P(K/B')+P(B'')P(K/B'')+P(C')P(K/C')+P(C'')P(K/C'')}$$

$$=\frac{0.2688}{0.34}\approx0.8,$$

同理有：

$$P(B'/K)=\frac{0.0378}{0.34}\approx 0.1,\qquad P(C'/K)=\frac{0.003}{0.34}\approx 0.008,$$

$$P(B''/K)=\frac{0.034}{0.34}\approx 0.09,\qquad P(C''/K)=\frac{0.061}{0.34}\approx 0.002。$$

这些数据表明在射击进行后結果击中了目标的条件下，目标落在a区段的事后概率約0.8，而落在b′、b″、c′、c″区段的事后概率依次約为：

0.1、0.09、0.008、0.002等。

貝叶斯公式不仅在試射理論中而且在人們生活实践及科学活动的其他領域里（如医学、商业部門等）也有着广泛的应用。

第二章　随机变数与分布函数

§1.随机变数

在第一章里，我們已經遇到不少这样的一种变量，它們的数值不可能事先确定，而是受偶然因素的影响而改变。例如：

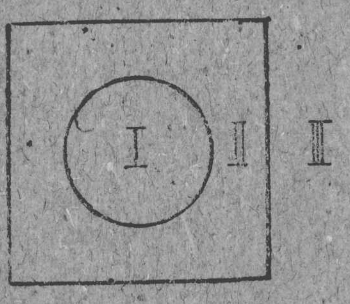
例1：电話用戶在某一段时間內对电話总机的呼喚次数是不一定的，它随着偶然的情况而取不同的数值。

例2：在同样的瞄准具和不变条件下，观察某一門大炮向同一目标的多次发射，我們会发現炮弹落于不同的地点。炮弹的着落点至炮位距离是帶偶然性質的。

例3：生長在某一地区的小麦粒的重量不会等于一个固定的数，它是受麦穗生長地区的土壤質量，麦粒的阳光条件，灌溉情况等不可能完全精确估計的因素所影响，所以麦粒重量也帶偶然性質的。

在上述諸例中，我們都遇到这样的一个变数，它是在偶然因素的影响下能取种种不同的数值。要事先預言这变数取什么值是办不到的，它是随着每次試驗以偶然方式变化着。这样一类的变数，我們称之为随机变数。对于一个随机变数，我們不仅仅要知道它可能取些什么数值，而更重要的是以怎样的概率来取这些数值。我們再来看一个例子：

例4：設某射手向如右图所示的靶子进行射击，而射入区域Ⅰ的就得3分，射入区域Ⅱ的就得1分，射入区域Ⅲ的得0分。那么，在每次发射时所得的分数就是随机变数，而此随机变数的可能值是0、1、3。設p_0，p_1，p_3分别表示取0，1，3的概率，我們知道，对于所有的射手，此随机变数的可能值都是一样的，但是对于不同的射手，取0，1，3的概率就会有所区别，这些区别表征了射手的射击技术。例如，对于技术非常好的某射手可能是$p_3=0.8$，$p_1=0.2$，$p_0=0$；对于技术中等的某射手$p_3=0.3$，$p_2=0.5$，$p_0=0.2$；对于技术較差的某射手，$p_3=0.1$，$p_1=0.3$，$p_0=0.6$。



于是，我們得出这样的結論：要完善地表征出随机变数，必須知道：

1). 随机变数能取些什么值（取值范围）；

2). 随机变数以怎样的概率取这些值。

当給出随机变数的一切可能值(取值范围)以及它取这些数值的概率时，我們便說是給出

了这个随机变数的分布率（分布）。以后，我們采用希臘字母ξ，η等来表示随机变数。

§2. 分布函数及其性質

从上一节一系列关于随机变数的例中，我們可以看到，随机变数的取值范围是各式各样的。例如，在例4中，随机变数所能取值的范围是0、1、3；在例1中，随机变数所能取值的范围都为0、1、2、3、4……。在例2与例3中，随机变数的取值是連續地变化着。例1、例4类型的随机变数，称为具有离散型分布的随机变数。一般地，我們可用下表的形式来表达这种类型的随机变数的分布率

X_1	X_2	…………	X_n
P_1	P_2	…………	P_n

或

X_1	X_2	……	X_n	…………
P_1	P_2	……	P_n	…………

表中的第一行表示随机变数所能取的一切值，而第二行表示取这些值的相应的概率。在例4中，我們有：

对于技术好的某射手

0	1	3
0	0.2	0.8

对于技术中等的某射手

0	1	3
0.2	0.5	0.3

对于技术較差的某射手

0	1	3
0.6	0.3	0.1

要表明非离散型的随机变数(例如例2例3所举的)的概率分布規律，一般来說要复杂得多。在非离散型的分布中，最常見的一种就是下述的类型：随机变数ξ取任一固定值的概率为0，而它的值落在一个无穷小区間（x，$x+dx$）的概率为：

$$f(x)dx$$

其中$f(x)$为一非負的函数，也就是說，ξ的值落在某区間（a，b）的概率为：

$$P\ (a<\xi<b)=\int_a^b f(x)dx。$$

对于在这种情形下，我們說ξ具有連續型的分布，$f(x)$称为对应的密度函数，显然$f(x)$应滿足条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$