教育科研丛书·高等学校专用教材

高等数学 五字诀

岳西泉著

内蒙古人民出版社

高等数学五字诀

岳西泉 著

内蒙古人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学五字诀/岳西泉著.—呼和浩特:内蒙古人民出版社,2006.11

(教育科研丛书)

ISBN 7-204-08829-8

Ⅰ.高… Ⅱ.岳… Ⅲ.①高等数学—教学研究 ②高等数学—教学法 Ⅳ.013—42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 137434 号

教育科研丛书

责任编辑	田建群
封面设计	杨 怡
出版发行	内蒙古人民出版社
地　　址	呼和浩特市新城区新华东街祥泰大厦
印　　刷	曲阜师范大学印刷厂
经　　销	新华书店
开　　本	850×1168 1/32
字　　数	1571 千字
印　　张	62.875
版　　次	2006 年 11 月第 1 版
印　　次	2006 年 11 月第 1 次印刷
印　　数	1000 册
书　　号	ISBN 7-204-08829-8/Z·494
定　　价	150.00 元(全七册)

如出现印装质量问题,请与我社联系。

联系电话:(0471)4971562 4971659

前　言

高等数学是一门重要的基础课,需要做一定数量的习题来巩固“双基”知识,但又不能机械地死记硬背公式而陷入“题海”.

本书通过对精选例题、习题的讲解与提示,注重对基本概念、基本性质、基本方法的归纳和总结,并将重点难点知识以口诀的形式总结出来,使得读者能够较快地掌握高等数学的基本内容和解题规律.全书编写体现出以下三个显著特点:

1. 各章知识结构清晰,重点难点突出.

每章均给出本章的主要知识要点结构图示,并将重点难点突出显示.读者能够直观地理解各章主要概念、原理及其相互关系,把握知识网络结构.并注意融重点知识解题规律于一体,给以强调.

2. 知识点拨言简意赅、通俗易懂.

书中将高等数学中的所有重点概念、原理以通俗易懂的五字口诀形式进行了归纳整理,能使学生较快的掌握教学大纲所要求的“双基”知识和解题规律.建议读者把本书的例题当习题,先自己做,不会时再看解答,这样会收到更好地学习效果.

3. 注重解题规律的归纳和总结.

几乎对所有的例题和习题都进行了注释,使得读者能够举一反三,灵活地将解题规律进行推广.本书对所有重要概念、定理都

给出了较为直观的描述，符合学生的认知特点，从而也有效地化解了学生学习中的难点.

本书由岳西泉编著. 赵红革、王为洪、孔萍、石海峰、许乃伟、于丽老师参与编写部分内容或提出了许多好的建议，在此一并表示感谢.

本书主要针对在读高职高专、电大、函授等专科生，对一般高校本科生也很有参考价值，尤其对参加专升本的考生复习高等数学有重要参考作用.

由于作者的水平有限，书中不当之处在所难免，敬请读者和数学同仁批评指正.

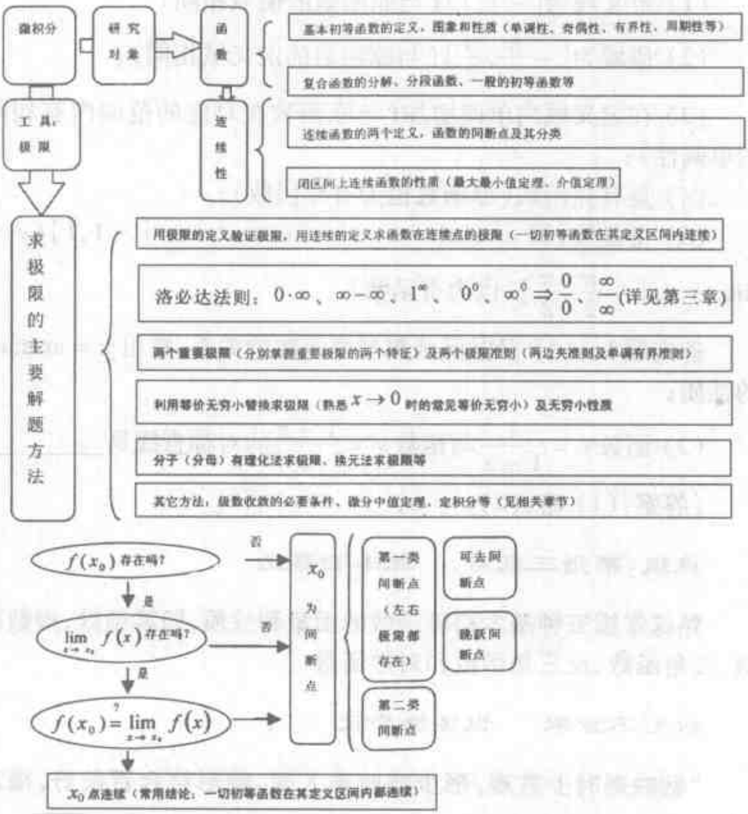
编　者

2007. 1

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

1.1　本章主要知识结构图示(黑体字部分为重点内容)



1.2 函数及性质

例1 指出反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的性质

解 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的反函数为 $y = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,再根据反函数与原函数的图象关于直线 $y = x$ 的对称关系,就可立即得到反正弦函数的以下性质:

(1) 定义域为$[-1,1]$(与原函数的值域相同);

(2) 值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$(与原函数的定义域相同);

(3) 在定义域内单调增加(与原函数在对应的范围内有相同的单调性);

(4) 是有界函数(原函数也为有界函数);

(5) 奇函数,即 $\arcsin(-x) = -\arcsin x, x \in [-1,1]$($y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,也为奇函数)

备选题1.1(1) 根据反函数与原函数的关系,指出 $y = \arctan x$ 的性质;

(2) 函数 $y = \frac{1}{1+x}$ 与函数 $y = \frac{1-x}{x}$ 的对称直线是________.

(答案:(1) 略;(2) $y = x$)

点拨:幂指三反对　基本初等函

熟练掌握五种基本初等函数的图象和性质,即幂函数、指数函数、三角函数、反三角函数和对数函数

数形不分家　识图性质记

“数缺形时少直观,形少数时难入微,数形结合百般好,隔离

分家万事休”—— 华罗庚.

反函与原函　对称性质联

① 反函数的定义域等于原函数的值域；

② 反函数的值域等于原函数的定义域；

③ 反函数与原函数的图象关于直线 $y = x$ 对称；

④ 反函数与原函数在对应的范围内有相同的单调性

四种反三角函数在微积分中有较多应用，可利用上述关系理解记忆，重点掌握反三角函数的值域.

例 2　设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数 $f[f(x)]$、$g[f(x)]$、$f[g(x)]$、$g[g(x)]$，求其中的奇函数.

解　按奇偶性定义得：$f(-x) = -f(x)$，$g(-x) = g(x)$，

所以 $f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)]$；

$g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)]$；

$f[g(-x)] = f[g(x)]$，$g[g(-x)] = g[g(x)]$，

所求奇函数是 $f[f(x)]$.

备选题 2.1　判断下列函数的奇偶性

(1) $y = \dfrac{|x|}{x}(x+3)^0$；

(2) $y = \lg(x + \sqrt{x^2+1})$；

(3) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$（双曲正弦函数）

（答案：(1) 非奇非偶函数. 提示：定义区间不对称 (2) 奇函数 (3) 奇函数）

备选题 2.2　$f(x) = 2^x$，$g(x) = 4^x$，且 $g[g(x)] > g[f(x)] > f[g(x)]$，、求 x 的取值范围.（答案：$0 < x < 1$）

点拨：奇变偶不变　对称区间判

即：对任意的$x \in D$，$f(-x)=\begin{cases}-f(x)，奇函数\\ f(x)，偶函数\end{cases}$，$D$为对称区间

例3　判断函数的单调性(1)$y=\lg 5^x$；(2)$y=\arctan\dfrac{1}{x}$.

解　(1)函数$y=\lg 5^x$由$y=\lg u$，$u=5^x$复合而成，可以得到：

$y=\lg u\uparrow$，$u=5^x\uparrow \Rightarrow y=\lg 5^x\uparrow$

即$y=\lg u$与$u=5^x$同增$\Rightarrow y=\lg 5^x$单增

此题也可变形按$y=(\lg 5)x$判断)

(2)函数$y=\arctan\dfrac{1}{x}$由$y=\arctan u$，$u=\dfrac{1}{x}$复合而成，可以得到：

当$x\in(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$时，

$y=\arctan u\uparrow$，$u=\dfrac{1}{x}\downarrow$ 单调性相反$\Rightarrow y=\arctan\dfrac{1}{x}$单调减少

备选题3.1　判断函数的单调性(1)$y=3^{2-5x}$；

(2)$y=\dfrac{1}{x}-\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$

(答案：(1)$y=3^{2-5x}\downarrow$(2)$x\in(0,1)$，$x\in(-1,0)\downarrow$ 提示：先判断$y_1=-\log_2\dfrac{1+x}{1-x}=\log_2\dfrac{1-x}{1+x}$的单调性)

备选题3.2　用函数单调性的定义证明$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$在$(-\infty,\dfrac{1}{2})$上单调增加

(略证：$\forall x_1<x_2\in(-\infty,\dfrac{1}{2})$，$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x_2}}-$

$\frac{1}{\sqrt{1-2x_1}} = \cdots = \frac{2(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-2x_2}\cdot\sqrt{1-2x_1}(\sqrt{1-2x_2}+\sqrt{1-2x_1}} >$
0)

点拨：同向单调增　反向函数减

复合函数的单调性及函数单调性的定义，均可按这一口诀记忆

即：对任意的 $x_1 < x_2 \in (a,b)$，都有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加

对任意的 $x_1 < x_2 \in (a,b)$，都有 $f(x_1) > f(x_2)$，

则称 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少

例 4　指出下列函数的复合过程

(1) $y = \sin^2(3x-2)$；(2) $y = \arccos[\sin^2(3+\sqrt{x})]$

解　(1) $y = \sin^2(3x-2)$ 由 $y = u^2, u = \sin v, v = 3x-2$ 复合而成

(2) $y = \arccos[\sin^2(3+\sqrt{x})]$ 由 $y = \arccos u, u = v^2, v = \sin w, w = 3+\sqrt{x}$ 复合而成.

备选题 4.1　指出下列函数的复合过程

(1) $y = \cos^3\sqrt{2-x}$；(2) $y = 2^{-3^x}$.

(答案：(1) $y = \cos^3\sqrt{2-x}$ 由 $y = u^3, u = \cos v$,

$v = \sqrt{w}, w = 2-x$ 复合而成.

(2) $y = 2^{-3^x}$ 由 $y = 2^u, u = -v, v = 3^x$ 复合而成).

备选题 4.2　(1) 设 $f(x) = \sin x, g(x) = \begin{cases} x-\pi, x \leqslant 0 \\ x+\pi, x > 0 \end{cases}$，则 $f[g(x)]$ 等于________；

(2) $f(x+2) = 2^{x^2+4x}$，求 $f(x-2)$.

答案:(1) $-\sin x$,(2)$2^{x^2-4x}-x+4$,提示:先配方(或变量替换)求出$f(x)$,再代入求出$f(x-2)$).

点拨:复合会分解　　从外向里看

不重更不漏　　层层分解全

为了方便后面的求导运算,按照从外向里的顺序,一层一层的分解复合函数.是本章重点,应熟练掌握

例5　求函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}+\ln(1+x)$的定义域.

解　由题意可得$\begin{cases}x^2-9\geqslant 0\\ x-3\neq 0\\ 1+x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -3\text{ 或 }x\geqslant 3\\ x\neq 3\\ x>-1\end{cases}$

$\Rightarrow x\in(3,+\infty)$

备选题5.1　(1)$y=f(x)$的定义域是$[0,1]$,试求$f(x+a)+f(x-a)$,$(a>0)$的定义域;

(2)求$f(x)=\lg(1-\lg x)$的定义域.

(3)设函数$f(x)=\begin{cases}x+1,0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2,1<x\leqslant 4\end{cases}$,

则函数$g(x)=f(x^2)+f(x+4)$在________上有意义.

(答案:(1)当$0<a<\dfrac{1}{2}$时,定义域是$[a,1-a]$;当$a=\dfrac{1}{2}$时,定义域是$\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$;当$a>\dfrac{1}{2}$时,定义域是空集;(2)$(0,10)$;(3)$[-2,0]$提示:注意所给分段函数的定义域为$[0,4]$).

备选题5.2　判断下列函数是否为相同的函数

(1)$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与$y=x+1$;

(2)$y=|x|$与$y=\sqrt{x^2}$;

(3) $y = x$ 与 $y = x(\cos^2 x + \sin^2 x)$.

(答案:(1) 不同;(2) 相同;(3) 相同)

点拨:对应定义域　两个要素看

判断两个函数是否为相同的函数时,先判断定义域是否一致.如定义域相同时,再判断对应关系是否相同

1.3　求极限的主要方法

例 6　计算$\lim\limits_{x\to1}\tan^3(2^x\lg x)$.

解　容易看出,初等函数$f(x) = \tan^3(2^x\lg x)$在$x = 1$处连续($x = 1$代入$f(x)$有意义,即$x = 1$是其定义区间内的点),

所以$\lim\limits_{x\to1}\tan^3(2^x\lg x) = f(1) = 0$.

备选题 6.1(1) 若函数$f(x) = \begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, x<0\\ x+k, x\geqslant 0\end{cases}$,在$x = 0$处连续,则$k =$ ________.

(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin2x}{\tan x}$.

(答案:(1)e 提示:根据$\lim\limits_{x\to0}f(x) = f(0)$求解;(2)2. 提示:化简后再代入计算)

点拨:连续先代入　计算莫耽误

一切初等函数在其定义区间内都连续.当 x_0 为初等函数 $f(x)$ 定义区间内的点时,直接代入计算函数值即可,即

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$.

注意:一般分段函数是非初等函数,求分段点处的极限时不能直接代入.

例 7　求(1) 求$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$；(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x-e^x}{x^2}$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x-e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x-e^x)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-e^x}{2}=-\frac{1}{2}$.

备选题 7.1(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\arctan x}{1-\cos x}$;2) 求$\lim\limits_{x\to0}x^x$. (0^0) 型.

(答案:(1)2 提示:用洛必达法则或等价替换(2)1 提示:$x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}=e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$).

点拨:二试洛必达　七型主方法

对"$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^∞、0^0、∞^0"型未定式极限,一般可应用洛必达法则求解,详见第三章

例 8　求极限(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5\sin5x}{5x}=5$(也可用等价无穷小替换法)

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sqrt{x+1}-1}=4\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin4x}{4x}\cdot(\sqrt{x+1}+1)=8$.

备选题 8.1　(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.