

教育科研丛书·高等学校专用教材

高等数学 五字诀

岳西泉著

内蒙古人民出版社



高等数学五字诀

岳西泉 著

内蒙古人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学五字诀/岳西泉著. —呼和浩特:内蒙古人民出版社, 2006. 11

(教育科研丛书)

ISBN 7-204-08829-8

I. 高… II. 岳… III. ①高等数学—教学研究
②高等数学—教学法 IV. 013—42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 137434 号

教育科研丛书

- | | |
|------|----------------------------|
| 责任编辑 | 田建群 |
| 封面设计 | 杨 怡 |
| 出版发行 | 内蒙古人民出版社 |
| 地 址 | 呼和浩特市新城区新华东街祥泰大厦 |
| 印 刷 | 曲阜师范大学印刷厂 |
| 经 销 | 新华书店 |
| 开 本 | 850 × 1168 1/32 |
| 字 数 | 1571 千字 |
| 印 张 | 62.875 |
| 版 次 | 2006 年 11 月第 1 版 |
| 印 次 | 2006 年 11 月第 1 次印刷 |
| 印 数 | 1000 册 |
| 书 号 | ISBN 7-204-08829-8/Z · 494 |
| 定 价 | 150.00 元(全七册) |
-

如出现印装质量问题,请与我社联系。

联系电话:(0471)4971562 4971659

前言

高等数学是一门重要的基础课,需要做一定数量的习题来巩固“双基”知识,但又不能机械地死记硬背公式而陷入“题海”。

本书通过对精选例题、习题的讲解与提示,注重对基本概念、基本性质、基本方法的归纳和总结,并将重点难点知识以口诀的形式总结出来,使得读者能够较快地掌握高等数学的基本内容和解题规律。全书编写体现出以下三个显著特点:

1. 各章知识结构清晰,重点难点突出。

每章均给出本章的主要知识要点结构图示,并将重点难点突出显示。读者能够直观地理解各章主要概念、原理及其相互关系,把握知识网络结构。并注意融重点知识解题规律于一体,给以强调。

2. 知识点拨言简意赅、通俗易懂。

书中将高等数学中的所有重点概念、原理以通俗易懂的五字口诀形式进行了归纳整理,能使学生在较快的掌握教学大纲所要求的“双基”知识和解题规律。建议读者把本书的例题当习题,先自己做,不会时再看解答,这样会收到更好地学习效果。

3. 注重解题规律的归纳和总结。

几乎对所有的例题和习题都进行了注释,使得读者能够举一反三,灵活地将解题规律进行推广。本书对所有重要概念、定理都

给出了较为直观的描述,符合学生的认知特点,从而也有效地化解了学生学习中的难点.

本书由岳西泉编著.赵红革、王为洪、孔萍、石海峰、许乃伟、于丽老师参与编写部分内容或提出了许多好的建议,在此一并表示感谢.

本书主要针对在读高职高专、电大、函授等专科生,对一般高校本科生也很有参考价值,尤其对参加专升本的考生复习高等数学有重要参考作用.

由于作者的水平有限,书中不当之处在所难免,敬请读者和数学同仁批评指正.

编 者

2007.1

目 录

前言	1
第1章 函数极限与连续	1
1.1 本章主要知识结构图示	1
1.2 函数及性质	2
1.3 求极限的主要方法	7
1.4 函数的连续性	20
第2章 导数与微分	24
2.1 本章主要知识结构图示	24
2.2 导数的概念及意义	25
2.3 函数的微分	29
2.4 主要解题方法	32
第3章 导数的应用	44
3.1 本章主要知识结构图示	44
3.2 中值定理	45
3.3 洛必达法则	49
3.4 函数性态	53

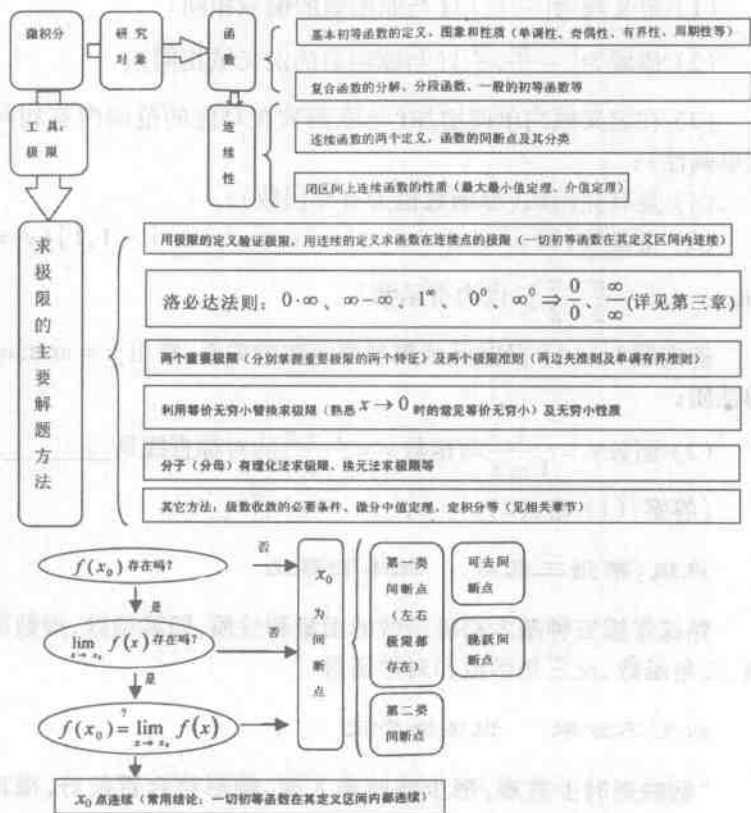
第4章 不定积分	64
4.1 本章主要知识结构图示	64
4.2 概念和性质	65
4.3 基本积分公式	66
4.4 第一类换元积分法	69
4.5 第二类换元积分法	72
4.6 分部积分法	75
4.7 几种特殊类型函数的积分	79
第5章 定积分	87
5.1 本章主要知识结构图示	87
5.2 定积分的概念、性质	88
5.3 定积分的换元法	97
5.4 定积分的分部积分法	100
5.5 广义积分	104
5.6 综合举例	106
第6章 定积分的应用	112
6.1 本章主要知识结构图示	112
6.2 微元法	113
6.3 平面图形的面积	115
6.4 体积	120
*6.5 平面曲线的弧长	124
*6.6 定积分在物理学中的应用	126
6.7 综合举例	129

第7章 常微分方程	132
7.1 本章主要知识结构图示	132
7.2 概念与性质	133
7.3 可分离变量方程	135
7.4 一阶线性微分方程	136
7.5 高阶(含二阶)微分方程	138
*7.6 微分方程应用	142
7.7 综合举例	145
第8章 无穷级数	148
8.1 本章主要知识结构图示	148
8.2 概念和性质	149
8.3 数项级数及其审敛法	156
第9章 空间解析几何	168
9.1 本章主要知识结构图示	168
9.2 向量及其运算	169
9.3 空间直线与平面	173
9.4 空间曲线与曲面	183
第10章 多元函数微分学	186
10.1 本章主要知识结构图示	186
10.2 二元函数、极限与连续	187
10.3 偏导数与全微分	190
*10.4 多元函数微分学的几何应用	200
10.5 多元函数的极值	204

第 11 章 重积分	208
11.1 本章主要知识结构图示	208
11.2 二重积分的计算	209
11.3 三重积分及其算法	218
11.4 综合举例	219
附录 1 高等数学专升本模拟试题一	221
高等数学专升本模拟试题一参考答案	224
附录 2 高等数学专升本模拟试题二	230
高等数学专升本模拟试题二参考答案	233
附录 3 高等数学专升本模拟试题三	237
高等数学专升本模拟试题三参考答案	239
附录 4 高等数学专升本模拟试题四	246
高等数学专升本模拟试题四参考答案	249
附录 5 高等数学专升本模拟试题五	254
高等数学专升本模拟试题五参考答案	257
附录 6 2007 年山东省学分互认和专升本高等数学 (公共课)考试要求	259

第1章 函数、极限与连续

1.1 本章主要知识结构图示(黑体字部分为重点内容)



1.2 函数及性质

例1 指出反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的性质

解 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 的反函数为 $y = \sin x$,

$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 再根据反函数与原函数的图象关于直线 $y = x$ 的对称关系, 就可立即得到反正弦函数的以下性质:

(1) 定义域为 $[-1, 1]$ (与原函数的值域相同);

(2) 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (与原函数的定义域相同);

(3) 在定义域内单调增加 (与原函数在对应的范围内有相同的单调性);

(4) 是有界函数 (原函数也为有界函数);

(5) 奇函数, 即 $\arcsin(-x) = -\arcsin x, x \in [-1, 1]$ ($y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 也为奇函数)

备选题 1.1(1) 根据反函数与原函数的关系, 指出 $y = \arctan x$ 的性质;

(2) 函数 $y = \frac{1}{1+x}$ 与函数 $y = \frac{1-x}{x}$ 的对称直线是_____.

(答案: (1) 略; (2) $y = x$)

点拨: 幂指三反对 基本初等函

熟练掌握五种基本初等函数的图象和性质, 即幂函数、指数函数、三角函数、反三角函数和对数函数

数形不分家 识图性质记

“数缺形时少直观, 形少数时难入微, 数形结合百般好, 隔离

分家万事休”——华罗庚

反函数与原函数 对称性质联

- ① 反函数的定义域等于原函数的值域;
- ② 反函数的值域等于原函数的定义域;
- ③ 反函数与原函数的图象关于直线 $y = x$ 对称;
- ④ 反函数与原函数在对应的范围内有相同的单调性

四种反三角函数在微积分中有较多应用,可利用上述关系理解记忆,重点掌握反三角函数的值域.

例2 设 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数,且它们可以构成复合函数 $f[f(x)]$ 、 $g[f(x)]$ 、 $f[g(x)]$ 、 $g[g(x)]$,求其中的奇函数.

解 按奇偶性定义得: $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$,

所以 $f[f(-x)] = f[-f(x)] = -f[f(x)]$;

$g[f(-x)] = g[-f(x)] = g[f(x)]$;

$f[g(-x)] = f[g(x)]$, $g[g(-x)] = g[g(x)]$,

所求奇函数是 $f[f(x)]$.

备选题 2.1 判断下列函数的奇偶性

$$(1) y = \frac{|x|}{x}(x+3)^0;$$

$$(2) y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$(3) y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (双曲正弦函数)}$$

(答案:(1) 非奇非偶函数. 提示:定义区间不对称)(2) 奇函数

(3) 奇函数)

备选题 2.2 $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$, 且 $g[g(x)] > g[f(x)] > f[g(x)]$, 求 x 的取值范围. (答案: $0 < x < 1$)

点拨:奇变偶不变 对称区间判

即:对任意的 $x \in D, f(-x) = \begin{cases} -f(x), & \text{奇函数} \\ f(x), & \text{偶函数} \end{cases}, D$ 为对称区间

例3 判断函数的单调性 (1) $y = \lg 5^x$; (2) $y = \arctan \frac{1}{x}$.

解 (1) 函数 $y = \lg 5^x$ 由 $y = \lg u, u = 5^x$ 复合而成, 可以得到:
 $y = \lg u \uparrow, u = 5^x \uparrow \Rightarrow y = \lg 5^x \uparrow$

即 $y = \lg u$ 与 $u = 5^x$ 同增 $\Rightarrow y = \lg 5^x$ 单增

此题也可变形按 $y = (\lg 5)x$ 判断)

(2) 函数 $y = \arctan \frac{1}{x}$ 由 $y = \arctan u, u = \frac{1}{x}$ 复合而成, 可以得到:

当 $x \in (-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 时,

$y = \arctan u \uparrow, u = \frac{1}{x} \downarrow$ 单调性相反 $\Rightarrow y = \arctan \frac{1}{x}$ 单调减少

备选题 3.1 判断函数的单调性 (1) $y = 3^{2-5x}$;

$$(2) y = \frac{1}{x} - \log_2 \frac{1+x}{1-x}$$

(答案: (1) $y = 3^{2-5x} \downarrow$ (2) $x \in (0, 1), x \in (-1, 0) \downarrow$ 提示: 先判断 $y_1 = -\log_2 \frac{1+x}{1-x} = \log_2 \frac{1-x}{1+x}$ 的单调性)

备选题 3.2 用函数单调性的定义证明 $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调增加

$$(\text{略证: } \forall x_1 < x_2 \in (-\infty, \frac{1}{2}), f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{1-2x_2}} -$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x_1}} = \dots = \frac{2(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-2x_2} \cdot \sqrt{1-2x_1} (\sqrt{1-2x_2} + \sqrt{1-2x_1})} > 0)$$

点拨: 同向单调增 反向函数减

复合函数的单调性及函数单调性的定义, 均可按这一口诀记忆

即: 对任意的 $x_1 < x_2 \in (a, b)$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加

对任意的 $x_1 < x_2 \in (a, b)$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$,

则称 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调减少

例 4 指出下列函数的复合过程

(1) $y = \sin^2(3x - 2)$; (2) $y = \arccos[\sin^2(3 + \sqrt{x})]$

解 (1) $y = \sin^2(3x - 2)$ 由 $y = u^2, u = \sin v, v = 3x - 2$ 复合而成

(2) $y = \arccos[\sin^2(3 + \sqrt{x})]$ 由 $y = \arccos u, u = v^2, v = \sin w, w = 3 + \sqrt{x}$ 复合而成.

备选题 4.1 指出下列函数的复合过程

(1) $y = \cos^3 \sqrt{2-x}$; (2) $y = 2^{-3^x}$.

(答案: (1) $y = \cos^3 \sqrt{2-x}$ 由 $y = u^3, u = \cos v, v = \sqrt{w}, w = 2-x$ 复合而成.

(2) $y = 2^{-3^x}$ 由 $y = 2^u, u = -v, v = 3^x$ 复合而成).

备选题 4.2 (1) 设 $f(x) = \sin x, g(x) = \begin{cases} x - \pi, & x \leq 0 \\ x + \pi, & x > 0 \end{cases}$, 则

$f[g(x)]$ 等于_____;

(2) $f(x+2) = 2^{x^2+4x}$, 求 $f(x-2)$.

答案: (1) $-\sin x$, (2) $2^{x^2-4x} - x + 4$, 提示: 先配方(或变量替换) 求出 $f(x)$, 再代入求出 $f(x-2)$).

点拨: 复合会分解 从外向里看

不重更不漏 层层分解全

为了方便后面的求导运算, 按照从外向里的顺序, 一层一层的分解复合函数. 是本章重点, 应熟练掌握

例 5 求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} + \ln(1+x)$ 的定义域.

解 由题意可得
$$\begin{cases} x^2-9 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 3 \\ x \neq 3 \\ x > -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in (3, +\infty)$

备选题 5.1 (1) $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 试求

$f(x+a) + f(x-a)$, ($a > 0$) 的定义域;

(2) 求 $f(x) = \lg(1-\lg x)$ 的定义域.

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$,

则函数 $g(x) = f(x^2) + f(x+4)$ 在 _____ 上有意义.

(答案: (1) 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 定义域是 $[a, 1-a]$; 当 $a = \frac{1}{2}$

时, 定义域是 $\{\frac{1}{2}\}$; 当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 定义域是空集; (2) $(0, 10)$;

(3) $[-2, 0]$ 提示: 注意所给分段函数的定义域为 $[0, 4]$).

备选题 5.2 判断下列函数是否为相同的函数

(1) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y = x+1$;

(2) $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$;

(3) $y = x$ 与 $y = x(\cos^2 x + \sin^2 x)$.

(答案:(1)不同;(2)相同;(3)相同)

点拨:对应定义域 两个要素看

判断两个函数是否为相同的函数时,先判断定义域是否一致.如定义域相同时,再判断对应关系是否相同

1.3 求极限的主要方法

例6 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \tan^3(2^x \lg x)$.

解 容易看出,初等函数 $f(x) = \tan^3(2^x \lg x)$ 在 $x = 1$ 处连续 ($x = 1$ 代入 $f(x)$ 有意义,即 $x = 1$ 是其定义区间内的点),

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \tan^3(2^x \lg x) = f(1) = 0$.

备选题6.1(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ x+k, & x \geq 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续,则 $k =$ _____.

(2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\tan x}$.

(答案:(1) e 提示:根据 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 求解;(2)2. 提示:化简后再代入计算)

点拨:连续先代入 计算莫耽误

一切初等函数在其定义区间内都连续.当 x_0 为初等函数 $f(x)$ 定义区间内的点时,直接代入计算函数值即可,即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

注意:一般分段函数是非初等函数,求分段点处的极限时不能直接代入.

例7 求(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{x^2}$.

解 (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0$;

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x-e^x)'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

备选题 7.1 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan x}{1 - \cos x}$; (2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$. (0^0) 型.

(答案: (1) 2 提示: 用洛必达法则或等价替换 (2) 1 提示: $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} = e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$).

点拨: 二试洛必达 七型主方法

对“ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ ”型未定式极限, 一般可应用洛必达法则求解, 详见第三章

例8 求极限 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5$ (也可用等价无穷小替换法)

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot (\sqrt{x+1}+1) = 8.$$

备选题 8.1 (1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}; (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$