

高等院校“十一五”精品规划教材

高等数学

杨福松 徐卫卫 主编



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等院校“十一五”精品规划教材

高等数学

杨福松 徐卫卫 主编



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的。

考虑到高职层次的特点,本书遵循“以应用为目的,理论知识以必需、够用为度”的原则。全书共分五章,包含函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用,不定积分和微分方程初步,定积分及其应用。

本书可供高职高专院校教学使用,以及有关院校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/杨福松,徐卫卫主编. —北京:中国水利水电出版社,2009

高等院校“十一五”精品规划教材

ISBN 978-7-5084-6784-9

I. 高… II. ①杨…②徐… III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 152237 号

书 名	高等院校“十一五”精品规划教材 高等数学
作 者	杨福松 徐卫卫主编
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址:www.waterpub.com.cn E-mail:sales@waterpub.com.cn 电话:(010)68367658(营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心(零售) 电话:(010)88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国人民大学出版社印刷厂
印 刷	北京海洋印刷厂
规 格	184mm×260mm 16 开本 8.75 印张 202 千字
版 次	2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
印 数	0001—3050 册
定 价	17.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

前 言

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作的重要组成部分。随着高等职业教育改革的不断深入和发展,高职教育层次的多样化、行业性和地域性等特征越显突出。为了适应新形势下高职高专教育发展的需要,根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,基于高职教育层次的特点和实际情况而编写了本教材。适用于三年制高职高专电力类和工程类专业,建议用 60 学时左右。教材主要包括:函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分和微分方程初步,定积分及其应用等。

在编写教材的过程中,我们详细调查了电力类、工程类专业对高数概念、运算、应用等方面的要求,力争使“以应用为目的,理论知识以必需、够用为度”的原则在教材中有所体现。因此,本教材不追求理论体系的完整性,概念、定理尽量通俗化,注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养,努力体现高职专科特色和电力专业特色。

本教材由杨福松、徐卫卫主编。其中,第一章由吴劲松编写,第二章由高斌编写,第三章由徐卫卫编写,第四章由杨福松编写,第五章由杨文杰编写。全书由杨福松统稿和定稿。

在教材编写过程中,得到学校的大力支持,部分专业教师对本书的编写提出了许多很好的建议,中国水利水电出版社的编辑为本书付出了辛勤的劳动,在此表示衷心地感谢。

由于我们水平有限,书中难免存在缺点和错误,敬请广大师生、读者批评指正。

编 者

2009 年 5 月

目 录

前言

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数	1
第二节 极限的概念	8
第三节 极限的运算	12
第四节 两个重要极限	16
第五节 函数的连续性	19
第二章 导数与微分	25
第一节 导数概念	25
第二节 导数运算法则	31
第三节 高阶导数	36
第四节 微分及其应用	37
第三章 导数的应用	43
第一节 函数的单调性及利用一阶导数求极值	43
第二节 函数的凹凸性、拐点及利用二阶导数求极值	48
第三节 函数图形的描绘	52
第四节 函数的最大、最小值及其应用问题	56
第四章 不定积分和微分方程初步	61
第一节 不定积分的概念和性质	61
第二节 换元积分法	67
第三节 分部积分法	78
第四节 微分方程初步	82
第五节 积分表的使用	90
第五章 定积分及其应用	94
第一节 定积分的概念	94
第二节 微积分基本公式	100
第三节 定积分的换元法与分部积分法	104
第四节 定积分的应用	109
附录 I 积分表	117
附录 II 习题答案与提示	125

第一章 函数、极限与连续

函数是近代数学的基本概念之一. 极限方法则是高等数学中研究问题的一种基本方法. 极限的思想与理论, 是整个高等数学的基础. 连续是函数的一个重要性态, 连续函数是高等数学研究的主要对象. 本章在复习函数有关知识的基础上, 着重介绍极限的概念和函数的连续性.

第一节 函 数

一、函数的概念

在一个自然现象或工程技术问题中, 往往同时有几个变量在变化着, 它们并不是孤立地变化着, 而是相互联系并遵循着一定的变化规律, 例如: 圆的面积问题中, 考虑圆的面积 A 与它们的半径 r 之间的相依关系. 大家知道, 它们之间符合如下公式:

$$A = \pi r^2$$

当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时, 由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

又如自由落体运动问题中, 设物体下落的时间为 t , 落下的距离为 s . 假定开始下落的时刻为 $t=0$, 那么 s 与 t 之间的相依关系符合如下公式:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

式中: g 为重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$, 那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时, 由上式就可以确定 s 的相应数值.

虽然以上两个例子所涉及的变量的实际意义不同, 但是它们都反映了两个变量之间的相互依赖的关系, 这种相依关系由一种对应法则来确定, 根据这种对应法则, 当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时, 另一个变量就有确定的值与之对应, 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设有一非空实数集 D , 如果存在一个对应法则 f , 使得对于每一个 $x \in D$, 按照 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的一个函数. 记作 $y=f(x)$.

其中 x 为自变量, y 为因变量, 习惯上称 y 是 x 的函数, D 称为定义域. 当自变量 x 取定义域 D 内的某一定值 x_0 时, 按对应法则 f 所得的对应值 y_0 , 称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值, 记作 $f(x_0)$, 即 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当自变量 x 取遍 D 中的数, 所有对应的函数值 y 构成的集合称为函数的值域, 记作 M , 即

$$M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

函数 $y=f(x)$ 中, 表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母, 例如“ φ ”, “ ϕ ”等, 这时函数

就记作 $y=\varphi(x)$, $y=\phi(x)$ 等.

由函数定义可知, 定义域与对应法则一旦确定, 则函数就唯一确定了. 因此, 我们把函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素. 如果两个函数的定义域、对应法则均相同, 那么可以认为这两个函数是同一函数. 反之, 如果两要素中有一个不同, 则这两个函数就不是同一函数.

例如: $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $\phi(x)=1$, 因为 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, 即这两个函数的对应法则相同, 而且定义域均为 R , 所以它们是相同的函数.

又如 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\phi(x)=x+1$, 虽然 $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$, 但由于这两个函数的定义域不同, 所以这两个函数不是同一函数.

在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的, 如圆的面积问题中, 定义域 $D=(0, +\infty)$; 自由落体运动问题中, 定义域 $D=[0, T]$.

在数学中, 有时不考虑函数的实际意义, 而抽象地研究用解析式表达的函数, 这时可约定: 函数的定义域就是自变量能够取到的使解析式有意义的一切实数值. 例如函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域就是闭区间 $[-2, 2]$, 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 就是开区间 $(-1, 1)$.

人们通常用不等式、区间或集合形式表示定义域. 其中有一种不等式, 以后常遇到, 满足不等式

$$|x-x_0|<\delta \quad (\delta>0)$$

的一切 x , 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $N(x_0, \delta)$, 它的几何意义表示: 以 x_0 为中心, δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ [如图 1-1(a)].

对于不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 称为点 x_0 的 δ 空心邻域, 记作 $N(\dot{x}_0, \delta)$ [如图 1-1(b)].

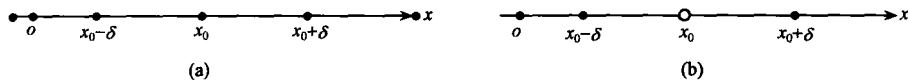


图 1-1

如果自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值有且只有一个, 则称这种函数为单值函数, 否则称之为多值函数. 本书的函数若没有特殊说明, 都是指单值函数.

【例 1-1】 已知 $f(x)=x^2-x-1$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-x)$.

解 $f(0)=0^2-0-1=-1$;

$f(1)=1^2-1-1=-1$;

$f(-x)=(-x)^2-(-x)-1=x^2+x-1$.

【例 1-2】 求下列函数的定义域.

$$(1) y=\frac{4}{x^2-1}; \quad (2) y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1).$$

解 (1) $x^2-1\neq 0$, $x\neq \pm 1$, 所以定义域为 $x\in(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$;

$$(2) \begin{cases} 6+x-x^2\geq 0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\leq x\leq 3 \\ x>-1 \end{cases}, \text{ 所以定义域为 } x\in(-1, 3].$$

通常函数可以用 3 种不同的形式来表示:表格法、图形法和解析法(或称公式法). 3 种形式各有其优点和不足,实际问题中往往把 3 种形式结合起来使用.

在定义域的不同范围内用不同的式子表示的一个函数,称为分段函数.

例如,函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数,它就是一个分段函数,其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$, 其图形如图 1-2 所示. 对于任何实数 x , 有: $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$.

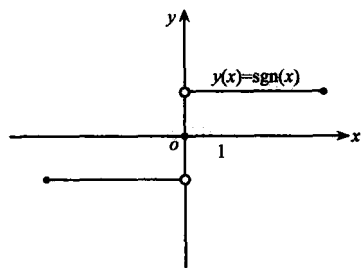


图 1-2

【例 1-3】 已知分段函数:

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

试求: (1) 函数的定义域, 值域;

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f(3)$;

(3) 画出函数的图形.

解 (1) 函数的定义域为 $D = [0, +\infty)$, 值域为 $W = [0, +\infty)$.

(2) 因为 $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $1 \in [0, 1]$,

所以 $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$; $3 \in (1, +\infty)$, 所以 $f(3) = 1 + 3 = 4$.

(3) 根据函数的定义, 在 $[0, 1]$ 上, 函数的图形为曲线 $y = 2\sqrt{x}$, 在 $(1, +\infty)$ 上, 函数的图形为直线 $y = 1 + x$, 该函数的图形如图 1-3 所示.

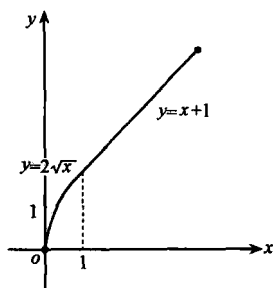


图 1-3

【例 1-4】 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$.

例如 $\left[\frac{4}{9}\right] = 0, [\sqrt{2}] = 1, [\pi] = 3, [-1] = -1, [-3.6] = -4$.

把 x 看成自变量, 则函数 $y = [x]$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \mathbb{Z}$, 其图形为阶梯曲线, 在 x 为整数处发生跳跃, 跃度为 1, 此函数称为取整函数.

二、函数的性质

1. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, 若对 (a, b) 内的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加; 若当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调减少, 区间 (a, b) 称为单调区间.

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义, 若对于任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $y=f(x)$ 为偶函数; 若有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

在直角坐标系中, 奇函数与偶函数的定义域必定关于原点对称, 且偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称.

3. 有界性

若存在一个正数 M , 使得对任意的 $x \in (a, b)$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内有界. 如果这样的 M 不存在, 就称函数在 (a, b) 上无界; 这就是说, 对于任意的正数 M , 总存在 $x_1 \in (a, b)$, 使得 $|f(x_1)| > M$, 那么函数在 (a, b) 上无界.

如 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义, 若存在一个正实数 T , 对于任意的 $x \in D$, 恒有 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

通常所说的周期函数的周期, 是指它们的最小正周期. 如 $y=\sin x$ 的周期是 2π , $y=\tan x$ 的周期是 π , $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$.

三、反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M . 如果对于每一个 $y \in M$, 有唯一的一个 $x \in D$ 与之对应, 并使 $y=f(x)$ 成立, 则得到一个以 y 为自变量, x 为因变量的函数, 称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$.

显然, $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 M , 值域为 D . 由于习惯上自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 所以 $y=f(x)$ 的反函数可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

例如 $y=\sqrt{x}$ 的反函数是 $y=x^2 (x>0)$, 其定义域就是 $y=\sqrt{x}$ 的值域 $[0, +\infty)$, 值域是 $y=\sqrt{x}$ 的定义域 $[0, +\infty)$, 如图 1-4(a) 所示.

在同一直角坐标系中, 函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1-4(b) 所示.

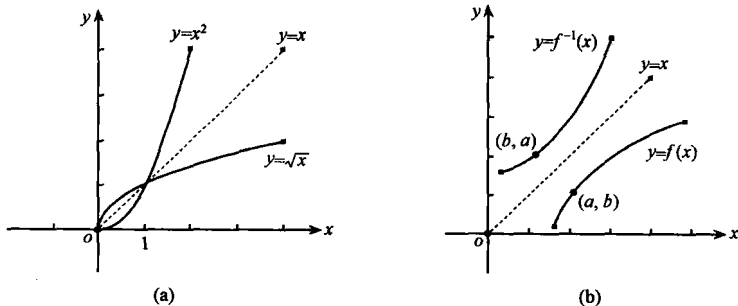


图 1-4

四、初等函数

1. 基本初等函数

下列 6 种函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数 $y=c$ (c 为常数), 其图形为一条平行或重合于 x 轴的直线.

(2) 幂函数 $y=x^a$ (a 为实数), 其在第一象限内的图形如图 1-5 所示.

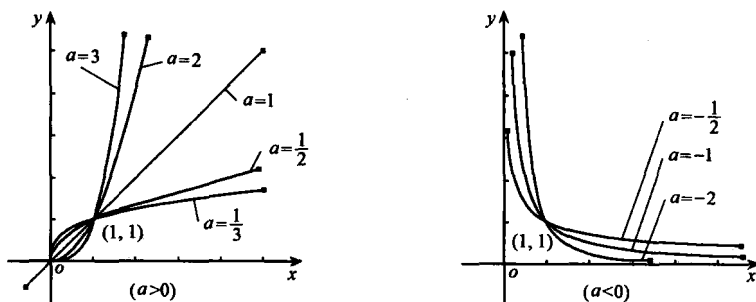


图 1-5

(3) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$), 定义域为 R , 值域为 $(0, +\infty)$, 图形如图 1-6(a) 所示.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$), 定义域 $(0, +\infty)$, 值域为 R , 图形如图 1-6(b) 所示.

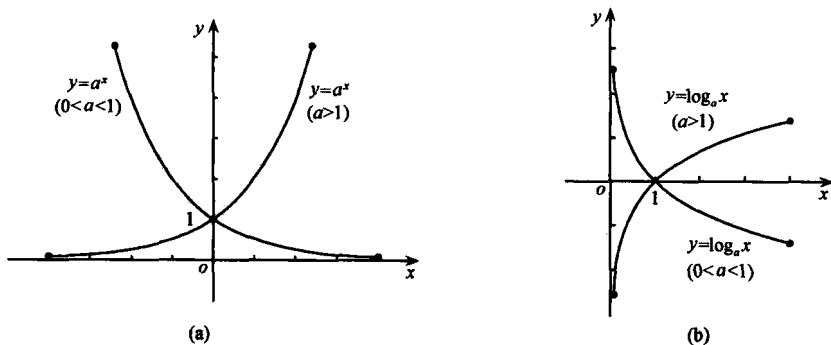


图 1-6

(5) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$. 其中正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域都为 R , 值域都为 $[-1, 1]$, 正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \in R, \text{且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$, 值域为 R , 这 3 个函数的图形如图 1-7 所示.

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$, 其中反正弦函数 $y=\arcsin x$ 与反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域都为 $[-1, 1]$, 值域分别为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 和 $[0, \pi]$ 反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域 R , 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 这 3 个函数的图形如图 1-8 所示.

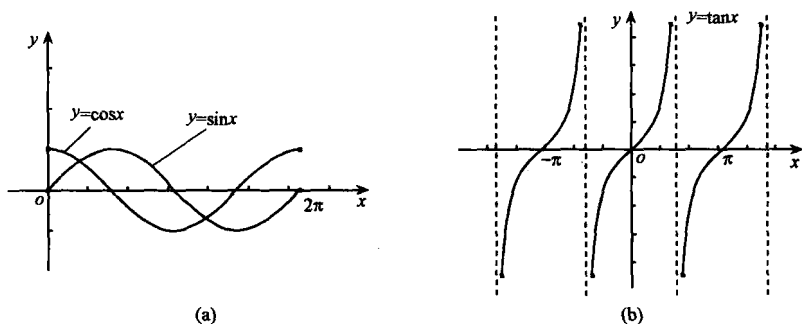


图 1-7

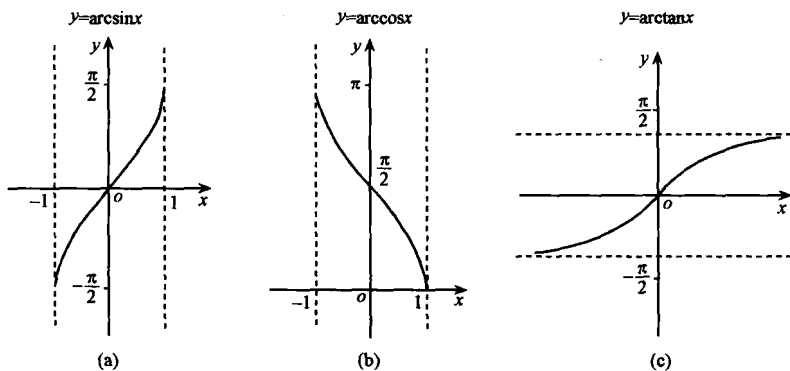


图 1-8

2. 复合函数

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u=\phi(x)$ 的值域为 M_ϕ , 若 $M_\phi \cap D_f \neq \emptyset$, 则将 $y=f[\phi(x)]$ 称为 $y=f(u)$ 与 $u=\phi(x)$ 复合而成的复合函数, u 称为中间变量, x 为自变量.

如函数 $y=\ln u, u=x^2+1$, 因为 $u=x^2+1$ 的值域 $[1, +\infty)$ 包含在 $y=\ln u$ 的定义域 $(0, +\infty)$ 内, 所以 $y=\ln(x^2+1)$ 是 $y=\ln u$ 与 $u=x^2+1$ 复合而成的复合函数.

注意: (1) 并不是任何两个函数都可以复合的, 如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合. 因为 $u=2+x^2$ 的值域为 $[2, +\infty)$, 而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 所以对于任意的 x 所对应的 u , 都使 $y=\arcsin u$ 无意义;

(2) 复合函数还可推广到由 3 个及以上函数的有限次复合.

【例 1-5】 指出下列函数的复合过程:

$$(1) y = \sqrt[3]{2x+1};$$

$$(2) y = \ln \tan \frac{x}{2}.$$

解 (1) $y = \sqrt[3]{2x+1}$ 是由 $y = \sqrt[3]{u}$ 与 $u = 2x+1$ 复合而成的;

(2) $y = \ln \tan \frac{x}{2}$ 是有 $y = \ln u, u = \tan v, v = \frac{x}{2}$ 复合而成的.

【例-6】 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 求 $f(\ln x)$ 的定义域.

解 由 $-1 \leq \ln x \leq 1$ 得

$$\frac{1}{e} \leq x \leq e$$

所以 $f(\ln x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

3. 初等函数

定义 1.4 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合, 且可用一个解析式表示的函数, 称为初等函数.

有些函数, 在其定义域内, 当自变量在不同范围内取值时, 要用不同的解析式表示, 这类函数称为分段函数, 分段函数中有些是初等函数, 有些是非初等函数.

【例 1-7】 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x & x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$, 求 $f(-2)$,

$f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$, 并作出函数图形.

解 $f(-2) = 2^x|_{x=-2} = \frac{1}{4}$; $f(0) = 2^x|_{x=0} = 1$;

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (1-x)|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

$$f(2) = 1|_{x=2} = 1.$$

图形如图 1-9 所示.

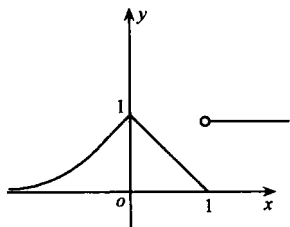


图 1-9

五、建立函数关系举例

运用函数解决实际问题, 通常先要找到这个实际问题中的变量与变量之间的依赖关系, 然后把变量间的这种依赖关系用数学解析式表达出来 (即建立函数关系), 最后进行分析、计算.

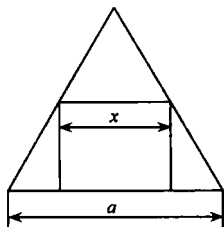


图 1-10

【例 1-8】 如图 1-10, 从边长为 a 的正三角形铁皮上剪一个矩形, 设矩形的一条边长为 x , 周长为 P , 面积为 A , 试分别将 P 和 A 表示为 x 的函数.

解 设矩形的另一条边长为 $\frac{a-x}{2} \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}(a-x)}{2}$, 该矩形周长:

$$P = \sqrt{3}(a-x) + 2x = (2-\sqrt{3})x + \sqrt{3}a, \quad x \in (0, a);$$

矩形面积:

$$A = \frac{\sqrt{3}(a-x)}{2} \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{2}ax - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2, \quad x \in (0, a).$$

【例 1-9】 电力部门规定, 居民每月用电不超过 $30 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 时, 每千瓦时电按 0.5 元收

费,当用电超过 $30\text{kW}\cdot\text{h}$ 但不超过 $60\text{kW}\cdot\text{h}$ 时,超过的部分每千瓦时按 0.6 元收费,当用电超过 $60\text{kW}\cdot\text{h}$ 时,超过部分按每千瓦时 0.8 元收费,试建立居民月用电费 G 与月用电量 w 之间的函数关系.

解 当 $0 \leq w \leq 30$ 时, $G = 0.5w$

当 $30 < w \leq 60$ 时, $G = 0.5 \times 30 + 0.6 \times (w - 30) = 0.6w - 3$

当 $w > 60$ 时, $G = 0.5 \times 30 + 0.6 \times 30 + 0.8 \times (w - 60) = 0.8w - 15$

$$\text{所示 } G = f(w) = \begin{cases} 0.5w & 0 \leq w \leq 30 \\ 0.6w - 3, & 30 < w \leq 60. \\ 0.8w - 15 & w > 60 \end{cases}$$

习 题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \frac{1}{2x - x^2};$

(2) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2};$

(3) $y = \ln(1 - x^2);$

(4) $y = \arcsin 2x.$

2. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$, 求 $f(-1), f(0), f(1)$ 的值, 并作出函数的图形.

3. 求下列函数的反函数:

(1) $y = 3x + 1;$ (2) $y = 1 - \ln x;$ (3) $y = \frac{x-1}{x+1}.$

4. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = x^2 \sin x;$ (2) $y = \sin x + \cos x;$

(3) $y = x^2 + 2\cos x;$ (4) $y = \frac{e^{-x} - 1}{e^x + 1}.$

5. 分析下列复合函数的结构, 并指出它们的复合过程:

(1) $y = \sqrt{x^2 + 1};$ (2) $y = e^{\sin x};$

(3) $y = \cos^2(x - 1);$ (4) $y = \lg \sin(x + 1).$

6. 把一个直径为 50 厘米的圆木截成横截面为长方形的方木, 若此长方形截面的一条边长 x 厘米, 截面面积为 A 平方厘米, 试将 A 表示成 x 的函数, 并指出其定义域.

第二节 极限的概念

一、数列的极限

先看下面两个按一定次序排列的一系列数:

(1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$

$$(2) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

人们称它们为数列, 分别记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

现在来考察 n 无限增大时, 这两个数列的变化趋势. 为清楚起见, 可把这两个数列的前 n 项: $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别在数轴上表示出来 (如图 1-11, 图 1-12 所示).

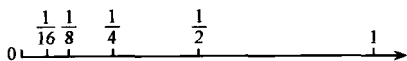


图 1-11

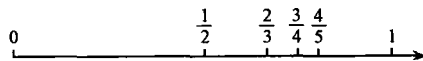


图 1-12

由图 1-11 可以看出, 当 n 无限增大时, 表示 $x_n = \frac{1}{2^n}$ 的点逐渐密集在点 $x=0$ 的右侧, 且 $x_n = \frac{1}{2^n}$ 无限接近于 0; 由图 1-12 可以看出, 当 n 无限增大时, 表示 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 的点逐渐密集在点 $x=1$ 的左侧, 且 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 无限接近于 1.

上述两个数列具有相同的变化特征, 即当 n 无限增大时, 它们都无限接近于一个确定的常数. 对于具有这样特征的数列, 我们给出定义.

定义 1.5 如果当 n 无限增大时, 数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A , 则把常数 A 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限 (也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A) 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \text{ 或当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } x_n \rightarrow A.$$

因此, 上述数列 (1) 有极限为 0, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$; 数列 (2) 有极限为 1, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

【例 1-10】 观察下面数列的变化趋势, 并写出它们的极限.

$$(1) x_n = \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$(2) x_n = \frac{n+1}{n};$$

$$(3) x_n = \frac{1}{(-3)^n};$$

$$(4) x_n = 4.$$

解 (1) $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ 的项依次为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, 当 n 无限增大时, x_n 无限接近于 0, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0;$$

(2) $x_n = \frac{n+1}{n}$ 的项依次为 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$, 当 n 无限增大时, x_n 无限接近于 1, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1;$$

(3) $x_n = \frac{1}{(-3)^n}$ 的项依次为 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$, 当 n 无限增大时, x_n 无限接近于 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-3)^n} = 0;$$

(4) $x_n = 4$ 为常数数列, 无论 n 取怎样的正整数, x_n 始终为 4, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 4$.

一般地, 一个常数数列的极限等于这个常数本身, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c (c \text{ 为常数}).$$

需要指出的是,并不是所有数列都有极限,如数列 $x_n = 2^n$,当 n 无限增大时, x_n 也无限增大,不能无限接近于一个确定常数,所以它没有极限. 又如数列 $x_n = (-1)^n$,当 n 无限增大时, x_n 在 -1 和 1 这两个数上来回摆动,不能无限接近于一个确定常数,所以它也没有极限.

对于没有极限的数列,则称该数列的极限不存在,亦称该数列发散.

二、函数的极限

对于函数的极限,根据自变量的不同变化过程分两种情况介绍.

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $y = f(x)$ 的极限

当自变量 x 的绝对值无限增大时,记作 $x \rightarrow \infty$.

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$ 在 $|x| > a$ 时有定义(a 为某个正实数),如果当自变量 x 的绝对值无限增大时,函数 $y = f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A ,则称常数 A 为当 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $y = f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A (\text{或当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A).$$

需要指出的是, $x \rightarrow \infty$ 表示 x 既取正值而无限增大(记作 $x \rightarrow +\infty$),同时又取负值而其绝对值无限增大(记作 $x \rightarrow -\infty$). 显然,函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限与在 $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 时的极限存在以下关系:

定理 1.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

【例 1-11】 讨论下列函数当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限.

$$(1) y = \frac{1}{x}; \quad (2) y = 2^x; \quad (3) y = \arctan x.$$

解 (1) 由反比例函数的图形及性质可知,当 $|x|$ 无限增大时, $\frac{1}{x}$ 无限接近于 0, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0;$$

(2) 由指数函数的图形及性质可知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$ 不存在;

(3) 由反正切函数的图形及性质可知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时,函数 $y = f(x)$ 的极限

当自变量 x 无限接近于某一定值 x_0 时,记作 $x \rightarrow x_0$.

定义 1.7 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $N(\dot{x}_0, \delta)$ 内有定义,如果当 x 无限趋近于 x_0 时, $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A ,则称常数 A 为当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或当 } x \rightarrow x_0, f(x) \rightarrow A$$

如函数 $y=2^x$, 从图 1-13 可看出, 当 x 从 1 的左、右两旁无限趋近于 1 时, 曲线 $y=2^x$ 上的点 M 与 M' 都无限接近于点 $N(1, 2)$, 即函数 $y=2^x$ 的值无限接近于常数 2, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} 2^x = 2$.

需要指出的是:

(1) 由于现在考察的是当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势, 所以定义中并不要求 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义;

(2) $x \rightarrow x_0$ 表示自变量 x 从 x_0 的左、右两旁同时无限趋近于 x_0 .

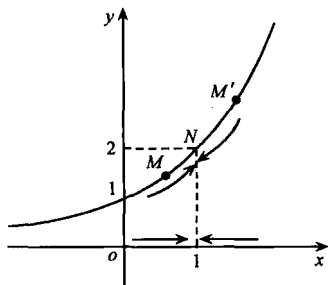


图 1-13

【例 1-12】 考察当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $y = \frac{x^2-1}{x+1}$ 的变化趋势, 并求 $x \rightarrow -1$ 时的极限.

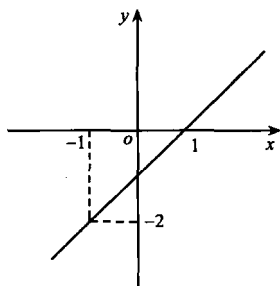


图 1-14

解 从函数 $y = \frac{x^2-1}{x+1} = x-1 (x \neq -1)$ 的图形(图 1-14)可知, 当 x 从左、右两旁同时无限趋近于 -1 时, 函数 $y = \frac{x^2-1}{x+1} = x-1 (x \neq -1)$ 的值无限趋近于常数 -2 , 所以

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2$$

定义 1.8 设函数 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ (或 $(x_0, x_0+\delta)$) 内有定义, 若当自变量 x 从 x_0 的左(右)近旁无限趋近于 x_0 , 记作 $x \rightarrow x_0^-$ ($x \rightarrow x_0^+$) 时, 函数 $y=f(x)$ 无限接近于一个确定的常

数 A , 则称常数 A 为 $x \rightarrow x_0$ 时的左(右)极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0-0) = A, (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0+0) = A).$$

极限与左、右极限之间有以下结论:

定理 1.2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

【例 1-13】 讨论下列函数当 $x \rightarrow 0$ 时的极限.

$$(1) f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}; \quad (2) f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ 1-x & x < 0 \end{cases}.$$

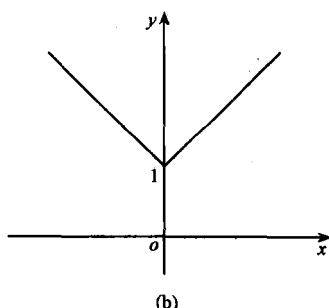
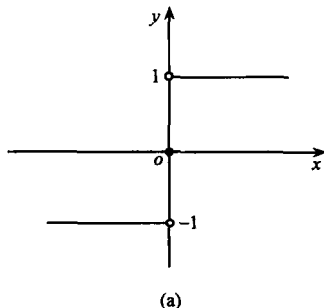


图 1-15

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$, 所以根据定理 1.2, $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ 不存在. $\operatorname{sgn}(x)$ 称为符号函数, 见图 1-15(a).

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = 1$, 所以根据定理 1.2, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 如图 1-15(b).

习 题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势, 并判断极限是否存在, 若存在, 指出其极限值.

$$(1) x_n = 1 + n; \quad (2) x_n = 2 + \frac{1}{n};$$

$$(3) x_n = \frac{1}{n^2}; \quad (4) x_n = 1 + (-1)^n.$$

2. 考察下列函数当 $x \rightarrow 2$ 时的变化趋势, 并求出其当 $x \rightarrow 2$ 时的极限.

$$(1) y = 2x + 1; \quad (2) y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

3. 讨论下列函数当 $x \rightarrow 0$ 时的极限.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 0 \\ 0 & x = 0; \\ e^x & x > 0 \end{cases} \quad (2) f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

第三节 极限的运算

一、极限的四则运算

定理 1.3 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = cA, (c \text{ 为常数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

说明:

(1) 上述运算法则对于 $x \rightarrow \infty$ 时的情形也是成立的; 而且法则(1)与(3)可以推广到有限个具有极限的函数的情形.

(2) 由于数列可以看作定义在正整数集上并依次取值的函数, 所以数列极限可以看作是一种特殊的函数极限. 因此, 对于数列极限也是有类似的四则运算法则.

【例 1-14】求 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3)$.