21st CENTURY
实用规划教材

21世纪全国高等院校
环境系列实用规划教材

环境流体力学

赵宗升 主编

赠送
PUP6
电子课件

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

环境热动力学

21 世纪全国高等院校环境系列实用规划教材

环境流体力学

主　编　赵宗升

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书系统地介绍了环境流体力学的基本知识。全书分为9章：第1章为流体运动的基本概念和基本方程；第2章为旋转流体运动，主要阐述旋转作用对地球物理流体运动的影响、水平边界层、垂直边界层、Rossby波与风驱洋流、准地转方程等；第3章为分层流，即不考虑旋转作用，只考虑层化作用下的层化流体运动问题；第4章为旋转、层化流体运动，包括旋转、层化流体的静力平衡状态、运动方程的Boussinesq近似、Rossby波、斜压不稳定性、海洋与大气基本方程、海洋深度平均环流理论、海洋内波等；第5～8章为与湍流有关的内容，包括不稳定性与湍流的发生、湍流的统计理论、各向同性均匀湍流、湍流模拟；第9章为扩散与离散。

本书可作为环境科学、环境工程和其他相关专业的研究生课程教材或参考书，也可作为与环境相关专业的教学、科研、工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

环境流体力学/赵宗升主编. —北京：北京大学出版社，2009.8
(21世纪全国高等院校环境系列实用规划教材)
ISBN 978-7-301-15477-9

Ⅰ.环… Ⅱ.赵… Ⅲ.环境物理学—流体力学—高等学校—教材 Ⅳ.X12 X52

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第116549号

书　　名：环境流体力学
著作责任者：赵宗升　主编
责 任 编 辑：张　玮
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-15477-9/X·0035
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　http://www.pup6.com
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962
电 子 邮 箱：pup_6@163.com
印　刷　者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　20印张　460千字
2009年8月第1版　2009年8月第1次印刷
定　　价：35.00元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究　　**举报电话：010-62752024**
电子邮箱：fd@pup.pku.edu.cn

21世纪全国高等院校环境系列实用规划教材

编写指导委员会

顾　　问： 左玉辉（南京大学）

主　　任： 张远航（北京大学）

常务副主任： 邵　敏（北京大学）

副　主　任： （按姓名拼音排序）

董德明（吉林大学）
段昌群（云南大学）
韩宝平（中国矿业大学）
胡洪营（清华大学）
李光浩（大连民族学院）
全　燮（大连理工大学）
曾光明（湖南大学）

委　　员： （按姓名拼音排序）

陈孟林（广西师范大学）
程　刚（西安工程大学）
冯启言（中国矿业大学）
李润东（沈阳航空工业学院）
李小明（山东大学）
李　晔（武汉理工大学）
林　海（北京科技大学）
潘伟斌（华南理工大学）
彭书传（合肥工业大学）
邵　红（沈阳化工学院）
沈珍瑶（北京师范大学）
孙德智（北京林业大学）
王成端（西南科技大学）
夏北成（中山大学）
杨　军（北京航空航天大学）
赵　毅（华北电力大学）
郑西来（中国海洋大学）
周敬宣（华中科技大学）
朱灵峰（华北水利水电学院）
庄惠生（东华大学）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

丛书序

当今社会随着经济的高速发展，人民生活质量的普遍提高，人类在生产、生活的各个方面都在不断影响和改变着周围的环境，同时日益突出的环境问题也逐渐受到人类的重视。环境学科以人类—环境系统为其特定的研究对象，主要研究环境在人类活动强烈干预下所发生的变化和为了保持这个系统的稳定性所应采取的对策与措施。环境问题已经成为一个不可忽视的、必须要面对和解决的重大难题。多年来，党和国家领导人多次在不同场合提到了环境问题的重要性，同时对发展环境教育给予了极大的关注。为推进可持续发展战略的实施，我国的环境工作在管理思想和管理制度方面也都发生了深刻的变化，不仅拓宽了环境学科的研究领域急需的综合性学科，也使其成为科学技术领域最年轻、最活跃、最具影响的学科之一。

环境学科是一门新兴的学科，并且还处在蓬勃发展之中，许多社会科学、自然科学和工程科学的部门已经积极地加入到了环境学科的研究当中，它们相互渗透、相互交叉，从而使环境学科变得更加宽广和多样化。为了更好地向社会展示环境学科的研究成果，进一步推进环境学科的发展，北京大学出版社于 2007 年 6 月在北京召开了《21 世纪全国高等院校环境系列实用规划教材》研讨会，会上国内几十所高校的环境专家学者经过充分讨论，研究落实了适合于环境类专业教学的各教材名称及其编写大纲，并遴选了各教材的编写组成员。

本系列教材的特点在于：按照高等学校环境科学与环境工程专业对本科教学的基本要求，参考教育部高等学校环境科学与工程教学指导委员会研究制定的课程体系和知识体系，面向就业，定位于应用型人才的培养。

为贯彻应用型本科教育由“重视规模发展”转向“注重提高教学质量”的工作思路，适应当前我国高等院校应用型教育教学改革和教材建设的迫切需要，培养以就业市场为导向的具备职业化特征的高等技术应用型人才，本系列教材突出体现教育思想和教育观念的转变，依据教学内容、教学方法和教学手段的现状和趋势进行了精心策划，系统、全面地研究普通高校教学改革、教材建设的需求，优先开发其中教学急需、改革方案明确、适用范围较广的教材。

环境问题已经成为人类最为关注的焦点，每位致力于环境保护的人士都在为环境保护尽自己最大的努力，同时还有更多的人加入到这个队伍中来，为人类能有一个良好的居住环境而共同努力。参与本系列教材编写的每一位专家学者都希望把自己多年积累的知识和经验通过书本传授给更多的有志于为人类—环境系统的协调和持续发展出一份力的同仁。

在本系列教材即将出版之际，我们要感谢参加本系列教材编写和审稿的各位老师所付出的辛勤劳动。我们希望本系列教材能为环境学科的师生提供尽可能好的教学、研究用书，我们也希望各位读者提出宝贵意见，以使编者与时俱进，使教材得到不断的改进和完善。

《21 世纪全国高等院校环境系列实用规划教材》
编写指导委员会
2008 年 3 月

序

环境流体力学作为环境科学的基础性学科在其发展的初始阶段，以污染物在近源区扩散为主要研究内容。自从1972年斯德哥尔摩人类环境会议，特别是1992年里约热内卢世界环境与发展大会以来，随着环境问题的发展，人们对环境的关注从局部当地的污染问题发展到污染物的远距离输送，再到全球性环境问题——臭氧空洞及气候变化。在这种背景下，环境科学工作者迫切需要大尺度地球物理流体力学方面的知识，环境流体力学需要吸收某些地球物理流体力学方面的知识，从而使我们可以深入理解和研究全球环境问题的本质。本书作者在长期的科学研究与教学实践中，敏锐地捕捉到了这一趋势，在环境流体力学与地球物理流体力学的融合方面进行了有益尝试。

全书共分9章：第1章流体运动的基本概念和基本方程，系统、全面地阐述了流体力学的基本概念、基本方程和基本方法，为流体力学知识的学习打下了基础。第2章旋转流体运动是地球物理流体力学的基础性问题，并对海洋流体力学问题给予特别的关注。第3章分层流阐述了简单分层流的基本问题，为小尺度分层流动问题的处理打下了基础。第4章旋转、层化流体运动导出了许多重要的地球物理流体力学的基本方程及其重要结果。鉴于自然环境中的流动多数为湍流，第5～8章对湍流问题进行了集中阐述，这几章主要介绍了：湍流的发生与不稳定性、Kolmogorov统计理论、在地球流体力学中特别重要的二维湍流问题；在各向同性湍流方面，介绍了谱空间动力学、三波相互作用定律与详细守恒和在地球流体力学中重要的螺旋度、拟涡能、再生拟涡能等概念；在湍流模拟方面，以计算流体力学基本思想开始，主要介绍了雷诺平均模拟和大涡模拟的基本内容，包括湍流模型的二阶矩封闭、K方程模型、$K-\varepsilon$方程以及海洋混合层模型等；在湍流的大涡模拟方面，介绍了直接数值模拟与大涡模拟的历史，各向同性滤波器，Navier - Stokes方程的过滤和亚格子的Smagorinsky模型。第9章扩散与离散，比较简明地阐述了分子扩散的微观随机行走分析，扩散方程，湍流扩散的拉格朗日法的研究成果：Taylor扩散理论，湍流扩散方程，剪切离散等内容。书中最后给出了较为重要的参考文献，为读者进一步研究和学习提供了支持。

全书以大尺度流体力学问题贯穿始终，同时也关注内波、湍流等一些小尺度过程。本书取材广泛，内容由浅入深，适宜自学，是一本很好的环境流体力学及地球物理流体力学方面的入门性教科书和科研参考书。

解决人类共同面对的环境问题是一项长期而艰巨的任务，需要我们在理论和实践上不断探索。环境科学是一门交叉学科，还处于不断成长之中，它需要不断吸收和融合其他学科的营养，丰富自身的科学内涵。本书对环境流体力学的研究内容的扩展进行了大胆的尝试，吸收了许多地球物理流体力学的知识，这对于解决海洋与大气等大尺度环境问题尤显重要，同时也可能为环境科学工作者涉足全球变化问题研究提供了一个基础途径。相信本书的出版将对环境流力学的科研和教学起到积极推动作用。

刘鸿亮

2009年3月

前　言

环境问题是人类面临的几个大问题之一。气候变暖、水源短缺、环境污染都是人类需要解决和思考的问题。由于一方面大多数环境问题均发生在流体介质——水和空气中，另一方面环境问题的不断扩大、全球变化及其影响不断发展，大尺度环境问题越来越受到人们的重视，环境流体力学应运而生。环境流体力学学科分支形成于 20 世纪 50 年代，源于严重的环境污染事件，其以研究大气和水体中污染物的对流、扩散为主要研究内容。随着环境问题的不断扩展，广义的环境定义已为人们所采用——指人类和生物周围的介质及其状态。环境的内涵也在不断延伸，其内涵应包括气候、污染、灾害和生态诸多方面。随着环境问题的发展和人类对这一问题认识的深化，如提出可持续发展的概念，地球系统的概念等，环境流体力学研究范畴也在发生演变，从单纯的污染物扩散和输送，向大尺度地球物理流体力学问题扩展，以适应全球变化及污染物远距离输送等大尺度问题的要求。因此，环境流体力学自然就应该包括自然环境中的流体力学现象——大气和海洋运动。由于人口增长，经济发展和人们的物质、文化需求提高，21 世纪环境问题形势严峻，而其中许多环境问题的理解和解决都需要环境流体力学的知识。不仅如此，环境流体力学中还蕴涵着许多自然界乃至人类社会的普遍规律。因此，通过环境流体力学的学习，不仅可以使我们处理相关的环境流体力学问题，还可以给我们提供一个新的看问题的视角和方法。

本书是作者在中国环境科学研究院和北京交通大学的科研教学活动中逐渐形成的，并自 2002 年起在北京交通大学开设环境流体力学研究生课程，将部分地球物理流体力学引入环境流体力学之中，实现两者的融合，现经系统整理和充实，以《环境流体力学》为书名正式出版。

全书共 9 章：其中第 1 章为流体力学的基本概念和基本方程，为全书的阐述打下基础，并对流体力学的基本内容给予尽可能多地介绍；第 2～4 章主要论述大尺度的旋转、层化地球物理流体力学问题，其中第 2 章为旋转流体运动，介绍旋转坐标系下的流体力学现象，第 3 章为分层流，介绍无旋转的层化流体力学，第 4 章为旋转、层化流体运动与内波；第 5～8 章主要讨论湍流问题，其中第 5 章为湍流的发生与不稳定性，第 6 章为湍流的统计理论，第 7 章为各向同性均匀湍流，比较全面地介绍了各向同性湍流的内容，其中包括海洋和大气湍流运动的一些概念和问题，第 8 章为湍流模拟，主要介绍雷诺平均模拟和大涡模拟；第 9 章则是扩散与离散问题，为读者进行相关研究工作打下基础；全书的最后是主要参考文献。本书以大尺度的地球物理流体力学的环境意义为侧重点，其中许多处理问题的方法极具启发意义，相信对读者会大有裨益。本书出版的主要目的有两点，其一在于本书的内容具有入门的性质，其二在于希望引导读者阅读更深层次的内容。作为研究生教材，不仅要阐述知识，同时应该让学生了解知识是如何逐渐积累的、是多少代人努力和创造的结晶，使阐述的知识鲜活和生动起来，从而激发学生的创造热情。为做到这一点，本书对关键的知识点都尽量给出原始文献的出处。

本书在编写过程中得到了北京交通大学研究生院研究生教材建设基金和土建学院研究生教材编写基金的资助，同时得到了土建学院魏庆朝院长的长期理解与支持，中国工程院刘鸿亮院士对本书的编写工作也给予关心与支持并为本书作序；北京交通大学市政与环境工程系李小玥、吴亚男、赵旭东、魏小明、崔国生、崔青松等同学参与了书稿校对工作。我在此谨向提供资助、支持、帮助的领导和同仁表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中不足和错漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2009 年 3 月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 流体运动的基本概念和基本方程

流体是由流体分子组成的，并且分子之间是有空隙的。可以把这些分子看作质点，它们严格遵循牛顿运动定律，但是这一假设在量子力学中不是完全正确的。分子运动实际上是由量子力学方程控制，不过，量子效应常常是不重要的。在流体力学中不可能考虑其中分子动力学的精细性质，但是需要明确存在准确的具有本质性质的分子动力学，在理论上能够通过求解控制所有流体分子的方程预测整个流体的行为。由于很小体积的流体就含有大量的分子，因此，掌握每个分子的运动是不实际的，这就要求不得不考虑代表许多分子平均的动力学物理量。例如在位置(x, y, z)和时间t的速度$\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$可以定义为一种质量加权平均，即

$$\boldsymbol{u}(x, y, z, t)=\frac{\sum\limits_{i} m_{i} \boldsymbol{u}_{i}}{\sum\limits_{i} m_{i}} \tag{1-0-1}$$

式中的求和运算对以(x, y, z)为中心的小体积δV中的所有分子进行；m_i是第i个分子的质量；$\boldsymbol{u}_i$是其速度。但是上式的定义仅当体积δV既不太大也不太小的情况下才有意义。如果δV太小，其所含的分子太少而使平均没有意义；如果δV太大，平均将掩盖速度场的物理特征。事实上，式(1-0-1)的平均定义只有当$\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$在较大的尺度范围内独立于$\delta V$的大小时才有意义，即速度场显著变化的最小尺度$L$远大于分子之间的平均距离

$$L \gg \lambda \tag{1-0-2}$$

在海洋中，L典型的数值是数百毫米或略大一点，而λ仅为10^{-8}cm。这样，海水容易满足式(1-0-1)的必要条件式(1-0-2)。这个微观思想对于湍流的研究特别有用。

推导控制宏观变量$\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$的方法有两种。第一种称为平均方法，它是质点控制方程的直接平均。虽然通过该方法得出的方程是准确的，但是在数学上是不封闭的，需要进一步引入假设，这些进一步的假设要求动力学理论和非平衡态统计力学的方法。

第二种方法是假设流体质量连续分布于空间上，用与质点方程比拟的方法推导宏观方程，也就是连续介质力学的方法。这种方法的成功可以看出在20世纪初原子和分子的存在性被接受以前，流体力学已经是一个高度发展的领域。在本书一般遵循传统连续介质力学的方法，但粒子力学方法对于湍流研究可能更为重要，平均简化过程所遇到的困难是湍流研究中无法回避的。即使采用宏观的方法，也要在欧拉场理论和拉格朗日场理论之间做出选择。欧拉理论比较实用、简洁，被大多数场合所采用；而拉格朗日场理论将流体看做是粒子的一个连续场，是分子动力学思想在宏观上的自然扩展，更加全面和富有说服力。

1.1 流体运动的描述方法

1.1.1 欧拉法和拉格朗日法

欧拉法是在流体流动的空间中，描述空间各点$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(x, y, z)$上流体通过它时的运动

状态，也就是空间各点上各种流动特征参量的分布。这些参量是空间坐标和时间的函数。流体运动变量为时空坐标的函数，包括速度 $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$、压强 $p(x, y, z, t)$、密度 $\rho(x, y, z, t)$、温度 $T(x, y, z, t)$、含有物浓度 $c(x, y, z, t)$等。

欧拉法就是研究确定包含有时间变化的矢量场和标量场，统称流场，可以利用数学上场论的知识。

在流体力学的研究中一般采用的是欧拉法，在个别问题（如扩散）中需要用拉格朗日法。拉格朗日法以研究个别流体微粒的运动为基础，通过对各个微粒运动的研究来获得整个流体的运动规律。对于直角坐标系，以初始时刻 $\tau=0$ 流体微粒的坐标 $\boldsymbol{a}=(a, b, c)$作为区分微粒的标志，称为拉格朗日变数。任何时刻 $\tau=t$、以(a, b, c)标记的任意微粒在空间的位置是拉格朗日变数和时间的函数，即

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(a, b, c, \tau) \tag{1-1-1}$$

微粒标记坐标在流场中连续变化，但每个流体微粒上的(a, b, c)的值在流体微粒运动的过程中保持不变。流体微粒是指流体连续介质的一个微小单元，不是流体的一个分子。微粒的速度和加速度可由上式对时间 τ 的一阶偏导数和二阶偏导数得到。但是，我们要清楚时间符号 τ 意味着微分算子 $\partial/\partial\tau$ 保持(a, b, c)固定不变。但欧拉法中的 $\partial/\partial t$ 意味着(x, y, z)保持不变。$\partial A/\partial\tau$ 是任意量 A 由随流体微粒运动的观测者测量的变化速度，即

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}\equiv\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} \tag{1-1-2}$$

是通常的全导数。它将欧拉法和拉格朗日法联系起来。

可以认为标记空间有坐标(a, b, c)，而位置空间有坐标(x, y, z)，则流体运动式(1-1-1)是在这两个空间之间依赖于时间的变换。我们也可以认为标记变量(a, b, c)是在位置空间的曲线坐标，则流体的运动拖动这些曲线坐标通过位置空间。

可以任意地给标记变量(a, b, c)赋值。通常，$\boldsymbol{a}$ 被赋予在参考时间 $\tau=0$ 时对应的流体微粒的 $\boldsymbol{x}$-位置坐标。也可以给 $\boldsymbol{a}$ 赋予不同的值，不管标记坐标如何确定，流体微粒在运动过程中保持其(a, b, c)值不变。

欧拉坐标和拉格朗日坐标下的导数可以通过微分法则联系起来

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}=\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tau}+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tau}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\tau}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\tau} \tag{1-1-3}$$

任意量 A 可以认为是(x, y, z, t)或是(a, b, c, τ)的函数。但是根据定义，(x, y, z)的全导数为速度的分量

$$\boldsymbol{u}\equiv\left(\frac{\partial x}{\partial\tau}, \frac{\partial y}{\partial\tau}, \frac{\partial z}{\partial\tau}\right)\equiv(u, v, w) \tag{1-1-4}$$

式(1-1-3)成为

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}=\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tau}+u\frac{\partial A}{\partial x}+v\frac{\partial A}{\partial y}+w\frac{\partial A}{\partial z}=\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tau}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla A \tag{1-1-5}$$

式中，∇为一矢性微分算子，即 Hamilton 算子

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1-1-6}$$

方程式(1-1-5)就是全导数公式。对于物理量速度 $\boldsymbol{u}$，有

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\tau}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+u\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}+v\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}+w\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial z}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$$

式中，$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$是当地加速度；$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ 为迁移加速度。全导数算子

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right) \tag{1-1-7}$$

1.1.2 关于 Hamilton 算子

Hamilton 为一矢性算子，作用于标量 φ，则$\nabla\varphi$ 表示梯度，是一个矢量，也记为 gradφ；作用于矢量 A，则$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 表示散度，是一个标量，也记为 div $\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}$ 表示张量，则记为$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\mathrm{Div}\,\boldsymbol{A}$；$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 表示旋度，是一个矢量，记为 rot$\boldsymbol{A}$ 或 curl$\boldsymbol{A}$。

梯度 gradφ 为 φ 变化率最大的方向，其大小为这个最大变化率的数值；散度为矢量 $\boldsymbol{A}$ 通过界面 ΔS 的通量并除以对应的微元体的体积 ΔV；旋度即为最大环量面密度。

1.2 雷诺输运定理

欧拉法需要对控制体进行分析，而拉格朗日法需要对系统或流体微粒进行分析。因为质量守恒、动量守恒和能量守恒等物理定律是直接应用于系统的，所以应将物理定律从系统转化到控制体，这需要通过所谓雷诺输运定理来完成。首先应推导一个关于由边界$A(t)$围成的任意运动体 $V(t)$的定理。

雷诺输运定理：设 $Q(t)$是单位体积流体的某种性质，则

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V(t)}Q\mathrm{d}V=\iiint_{V(t)}\frac{\partial Q}{\partial t}\mathrm{d}V+\oint\!\!\oint_{A(t)}Q\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}A \tag{1-2-1}$$

$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为边界表面单位法向量。

考虑任意体积元 V(见图 1－1)在流场中运动并发生变形，流体只通过开放表面进入流体元，随着流体元的运动，体积依赖性质(如密度)可能在空间和时间上变化，可将体积依赖性质的变化表示为如下全导数

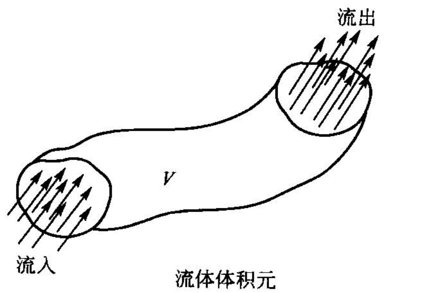

图 1－1 任意的流体体积元

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V(t)}Q\mathrm{d}V&=\lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\iiint_{V(t+\delta t)}Q(t+\delta t)\mathrm{d}V-\iiint_{V(t)}Q(t)\mathrm{d}V\right]\right\}\\&=\lim_{\delta t\to 0}\left\{\frac{1}{\delta t}\left[\iiint_{V(t+\delta t)}Q(t+\delta t)\mathrm{d}V-\iiint_{V(t)}Q(t+\delta t)\mathrm{d}V\right]+\right.\\&\qquad\left.\frac{1}{\delta t}\left[\iiint_{V(t)}Q(t+\delta t)\mathrm{d}V-\iiint_{V(t)}Q(t)\mathrm{d}V\right]\right\}\end{aligned} \tag{1-2-2}$$

式(1－2－2)可以进一步写成更为紧凑的形式，即

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V(t)}Q\mathrm{d}V=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\iiint_{V(t+\delta t)-V(t)}Q(t+\delta t)\mathrm{d}V+\iiint_{V(t)}\frac{\partial Q}{\partial t}\mathrm{d}V \tag{1-2-3}$$

系统的体积在运动的过程中是变化的。微分元则可以表示为净流入微元的流体体积

$$\mathrm{d}V=\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\delta t\mathrm{d}A \tag{1-2-4}$$

式中，$\boldsymbol{u}$ 是流速；$\hat{\boldsymbol{n}}$ 是单位法向量；$\mathrm{d}A$ 是表面积微元。这样式(1－2－3)可以写为

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com