樊博头考研系列

2010

全国硕士研究生入学统一考试

数学辅导讲义

（经济类）

■ 苏德矿 陈维新 黄柏琴 主编

- 由名校名师精心打造
- 深入解读综考大纲
- 考试辅导系统、概括、重点突出
- 模拟试题针对性强、命中率高

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国硕士研究生入学统一考试

数学辅导讲义(经济类)

苏德矿　陈维新　黄柏琴　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试数学辅导讲义．经济类/苏德矿，陈维新，黄柏琴主编．—杭州：浙江大学出版社，2009.5

ISBN 978-7-308-06693-8

Ⅰ.全… Ⅱ.①苏…②陈…③黄… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第052384号

全国硕士研究生入学统一考试·数学辅导讲义(经济类)

苏德矿　陈维新　黄柏琴　主编

责任编辑　徐素君

出版发行　浙江大学出版社

(杭州天目山路148号　邮政编码310028)

(网址:http://www.zjupress.com)

排　　版　杭州中大图文设计有限公司

印　　刷　杭州杭新印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　31.75

字　　数　1052千

版 印 次　2009年5月第1版　2009年5月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-06693-8

定　　价　50.00元

前言

硕士研究生入学考试是具有选拔性质的水平考试，采用的是优胜劣汰的录取方式。为此，考试真题既要有难度又要有区分度，对于考研的数学试题来说，这种特征尤为明显。每年都有为数不少的考生数学得零分，但每年也都会有考生数学得满分。从 0 分到 150 分，天壤之别，缘由何在？

为此我们要探讨数学，特别是考研数学的得分之道。首先，对数学而言理解比记忆更重要，因为做数学题先要有思路，后才能动手去解答，可以说数学题是先"想"出来，后"做"出来的。数学要记忆，但光靠记忆是远远不够的。记忆所得往往是形式上"死"的知识，不会变通，题目稍有变化就束手无策。数学要理解，对本质的深入理解才是活的知识，以灵活应对变化才是取胜之道。其次数学试题最富有变化，且不说新题型层出不穷，即使是老题型也是不断地翻新，从这一点上讲，考研的数学题每年每道题都是新的。故光靠死记硬背就有被拒之门外之忧，那么打开考研数学大门的钥匙何在？

如果把历年来考研的数学试题全部搜集出来，并作深入细致的分析研究，再对照教育部制定的历年（考研）考试大纲，就会发现，虽说数学试题表述形式千变万化，但万变不离其宗。这个宗说得抽象一点就是这门课程的核心内容，说得具体一点就是诸如高等数学用微分中值定理证明方程根的存在性、证明适合某种条件下 ξ 的等式、证明不等式；线性代数中解含参数的线性方程组、向量的线性关系、矩阵的对角化；概率统计中随机现象及其规律性的描述（概率，概率分布，特征数）等典型题型。如果你能不被试题五光十色的包装所迷惑，而能洞察其实质 —— 题型，就有可能知道该用哪把钥匙去开门。

本书将致力于与读者一起共同打造开启考研数学大门的钥匙。本书的每一章都首先列出考研大纲要求，这表明本书是严格遵照教育部考试中心最新考研大纲编写的。凡大纲要求的，本书不但讲到，而且讲深讲透讲明白，使读者掌握。而大纲不要求的，本书均不涉及。每一章分若干节，每一节由两部分组成：第一部分是"内容梳理"，它由"基本概要，重要定理和性质，重要公式和方法"三部分构成。这既是对教材的概括和提炼，又是对考研所需全部数学基本知识的搜集和整理。读者仔细阅读这一部分，就如同把考研所需的数学知识梳理一遍，有了这个基础去读第二部分就有了凭借。第二部分是"考题类型、解题策略及典型例题"，这是本书的主体。我们前面已指出，考题虽是千变万化的，但题型却是相对固定的。据此将考研数学题归纳成类型。对每个类型先给出解题策略，使读者成竹在胸，然后再列举出多个典型例题。这些例题部分是考研真题，更多的是难度与真题相当的模拟试题，每道题都有详尽的解题过程，并尽可能地用多种思路、多种方法来解。并且我们还做了进一步的融会贯通工作，以综述、综合例题精选或者以注的形式将不同类型的例题，以思想、观点为纲贯穿融合起来，尽可能使读者对考研数学有一个全面、整体的认识和理解。从而能举一反三，灵活应变。

鉴于考研数学题不以某高校的教学大纲和某教材内容为依据，而是以教育部对考试大纲为准，所以本书不仅将考研所需的结论全部整理搜集在内容梳理中，虽然有些结论在某些教材上没有出现，如高等数学的"曲线 $y=f(x)$（连续），Ox 轴及直线 $x=a, x=b(0\leqslant a<b)$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转所成立体的体积 $V_y=2\pi\int_a^b x\,|\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x$"；线性代数的"若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times t}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$ 的解向量，且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant n$"；概率统计的"一个连续量与离散量的和的分布问题"，但在考研时这些结论和例题可直接引用或类似求解。事实上这些结论已不止一次地出现在考研真题的解答过程中，为加深读者印象，本书对部分结论给出了证明，其目的在于使读者理解这些结论的由来，从而有助于读者掌握，进而能灵活地用来解题。本书的每一章均有"自测题"和"参考答案"，这批题大都符合考研试题要求，其中也有少数的基础训练题和少量的有较大难度的综合题。编著者期望读者能独立完成自测题，以检测自己的应试能力。

对使用本书的读者,有三句话六个字可供参考:

看懂　　　　做会　　　　悟道

书看懂,自我检测题做会是首要的,也是基本的,至此可能只是进入到偏重于形式上掌握、比较呆板的第一层次。还要从中悟出道理来才能进入对问题本质的理解,才能步入灵活运用的较高层次,才能获得高分。有读者会认为悟道太抽象,当然可以用较具体的总结规律来代替。但总结规律只是悟道的具体手段之一,而不是其全部,悟道的含义更广。

下面一段话摘自美国国家研究委员会《人人关心数学教育的未来》,括号中的话是作者添加的,请读者细细品味。

没有一个人(一本书)能教数学,好的教师(书)不是在教数学而是能激发学生(读者)自己去学数学。…… 只有当学生(读者)通过自己的思考建立起自己的数学理解能力时才能真正学好数学 …… 每个学生(读者)的数学知识都打上了自己的个人烙印。

一句话,本书主要不是用猜题来帮助读者考研,而是着重于帮助读者提高自身的数学能力来打开数学考研大门的。

数学知识要积累,对数学的理解更要有一个循序渐进的过程,对立志考研的读者要说三个字:**早,勤,韧**。

只有尝试才有希望,只有努力才会成功,有志者事竟成!

浙江大学本科生院学务处副处长金蒙伟教授对编著者的教学研究和撰写著作一直给予鼎力支持和悉心指导。同时得到浙江大学出版社徐素君同志的大力支持,才使本书得以面世,对此编著者一并表示衷心感谢。

编著者在浙江大学长期执教数学公共课,参与考研数学阅卷,本书以历年考研辅导班的讲稿为蓝本,经反复修改,多次讲用,日积月累而成。然限于水平,撰写中常有绠短汲深之感,殷切希望读者不吝赐教,多多指正。

编著者

于浙江大学求是村

目　　录

高等数学

线性代数

概率论与数理统计

高等数学

第1章 函数、极限、连续

考研大纲要求

了解 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,反函数及隐函数的概念,数列极限和函数极限(包括左极限与右极限的概念),极限的性质与极限存在的两个准则,无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.初等函数的概念,连续函数的性质和初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

会 建立简单应用问题中的函数关系式,判别函数间断点的类型,应用闭区间上连续函数的性质,用洛必达法则求未定式极限的方法.

理解 函数的概念,复合函数及分段函数的概念,无穷小量的概念和基本性质,函数连续性的概念(含左连续与右连续).

掌握 函数的表示法,基本初等函数的性质及其图形,极限的性质及四则运算法则,极限存在的两个准则,利用两个重要极限求极限的方法,无穷小量的比较方法.

§1.1 函　　数

一、内容梳理

(一)基本概念

1. 函数的定义

定义 1.1 设 A、B 是两个非空实数集,如果存在一个对应法则 f,使得对 A 中任何一个实数 x,在 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应,则称对应法则 f 是 A 上的函数,记为

$$f:x\to y \text{ 或 } f:A\to B.$$

y 称为 x 对应的函数值,记为 $y=f(x)$,$x\in A$.

其中 x 叫做自变量,y 叫因变量,A 称为函数 f 的定义域,记为 $D(f)$,$\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为函数的值域,记为 $R(f)$,在平面坐标系 Oxy 下,集合 $\{(x,y):y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

(1)函数是微积分中最重要最基本的一个概念,因为微积分是以函数为研究对象,运用无穷小与无穷大过程分析处理问题的一门数学学科.

(2)函数与函数表达式的区别:函数表达式指的是解析式子,是表示函数的主要形式;函数除了用表达式来表示,还可以用表格、图象等形式来表示.

2. 反函数

定义 1.2 设 $y=f(x),x\in D$,若对 $R(f)$ 中每一个 y,都有唯一确定且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应,则按此对应法则就能得到一个定义在 $R(f)$ 上的函数,称这个函数为 f 的反函数,记作

$$f^{-1}:R(f)\to D \text{ 或 } x=f^{-1}(y),y\in R(f).$$

由于习惯上用 x 表示自变量,y 表示因变量,所以常把上述函数改写成 $y=f^{-1}(x),x\in R(f)$.

(1)由函数、反函数的定义可知,反函数的定义域是原来函数的值域;值域是原来函数的定义域.

(2)函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图象相同.这因为满足 $y=f(x)$ 点 (x,y) 的集合与满足 $x=f^{-1}(y)$ 点 (x,y) 的集合完全相同,而函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 图象关于直线 $y=x$ 对称.

(3)若 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=f^{-1}(y)$,则 $y=f[f^{-1}(y)]$,$x=f^{-1}[f(x)]$.

3. 复合函数

定义 1.3 设 $y=f(u),u\in E,u=\varphi(x),x\in D$,若 $D(f)\cap R(\varphi)\neq\varnothing$,则 y 通过 u 构成 x 的函数,称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称为复合函数,记作 $y=f(\varphi(x))$.

复合函数的定义域为 $\{x\mid x\in D \text{ 且 } \varphi(x)\in E\}$,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,u 称为中间变量,$\varphi(x)$ 称为内函数,$f(u)$ 称为外函数.

(1)在实际判断两个函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 能否构成复合函数,只要看 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域是否为非空集,若不为空集,则能构成复合函数,否则不能构成复合函数.

(2)在求复合函数时,只要指出谁是内函数,谁是外函数.例如 $y=f(x)$,$y=g(x)$,若 $y=f(x)$ 作为外函数,$y=g(x)$ 作为内函数,则复合函数 $y=f(g(x))$;若 $y=g(x)$ 作为外函数,$y=f(x)$ 作为内函数,则复合函数为 $y=g(f(x))$.

(3)要会分析复合函数的复合结构,既要会把几个函数复合成一个复合函数,又要会把一个复合函数分拆成几个函数的复合.

4. 初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

记住基本初等函数的定义域、值域,会画它们的图象,且要知道这些函数在哪些区间递增,在哪些区间递减,是否经过原点?与坐标轴的交点是什么?

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所得到的函数统称为初等函数.

不是初等函数称为非初等函数.一般来说,分段函数不是初等函数,但有些分段函数可能是初等函数,例如

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}=|x|=\sqrt{x^2} \text{ 是由 } y=\sqrt{u},u=x^2 \text{ 复合而成.}$$

5. 具有某些特性的函数

(1)奇(偶)函数

定义 1.4 设 D 是关于原点对称的数集,$y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数,若对每一个 $x\in D$(这时也有 $-x\in D$),都有 $f(-x)=-f(x)$($f(-x)=f(x)$),则称 $y=f(x)$ 为 D 上的奇(偶)函数.

定义域关于原点对称是函数为奇(偶)函数的必要条件.

若 $f(x)$ 为奇函数,则 $f(0)=0$.事实上,由定义知 $f(-0)=-f(0)$,有 $f(0)=-f(0)$,得 $f(0)=0$.

偶函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称;奇函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称.

奇偶函数的运算性质:

奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶数个奇(偶)函数之积为偶函数;奇数个奇函数的积为奇函数;一奇一偶的乘积为奇函数;两个奇函数复合仍为奇函数;一奇一偶复合为偶函数;两个偶函数复合仍为偶函数.

(2)周期函数

定义 1.5 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数,若存在某个非零常数 T,使得对一切 $x\in D$,都有 $f(x+T)$

$=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $y=f(x)$ 的一个周期.

显然，若 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$ 也是 $f(x)$ 的周期，若周期函数 $f(x)$ 的所有正周期中存在最小正周期，则称这个最小正周期为 $f(x)$ 的基本周期，一般地，函数的周期指的是基本周期.

必须指出不是所有的周期函数都有最小正周期，例如 $f(x)=c$（c 为常数）. 因为对任意的正实常数 T，都有 $f(x+T)=f(x)=c$. 所以 $f(x)=c$ 是周期函数，但在正实数里没有最小正常数，所以，周期函数 $f(x)=c$ 没有最小正周期.

(3)单调函数

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数. 若对 D 中任意两个数 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ (f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 为 D 上的递增（递减）函数. 特别地，若总成立严格不等式

$$f(x_1)<f(x_2)\ (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 为 D 上严格递增（递减）函数.

递增和递减函数统称为单调函数，严格递增和严格递减函数统称为严格单调函数.

(4)分段函数

如果一个函数在其定义域内，对应于不同的 x 范围有着不同的表达形式，则称该函数为分段函数.

分段函数不是由几个函数组成，而是一个函数. 经常用构造分段函数来举反例. 常见的分段函数有符号函数、狄里克雷函数、取整函数等.

(5)有界函数与无界函数

定义 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若存在常数 $N\leqslant M$，使对每一个 $x\in D$，都有

$$N\leqslant f(x)\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数，此时，称 N 为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界，称 M 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.

由定义可知上、下界有无数个，也可写成如下的等价定义.

定义 1.7 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若存在常数 $M>0$，使得对每一个 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则 $f(x)$ 为 D 上的有界函数.

定义 1.8 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若对每一个正常数 M（无论 M 多么大），都存在 $x_0\in D$，使 $|f(x_0)|>M$，则称 $f(x)$ 为 D 上的无界函数.

注 当对一个陈述加以否定时，应该把逻辑量词“存在”换成“任给”，把“任给”换成“存在”，且最后给出否定的结论.

（二）重要定理与公式

定理 1.1（反函数存在定理） 严格增（减）的函数必有严格增（减）的反函数.

二、考题类型、解题策略及典型例题

类型 1.1 求函数定义域

解题策略 (1)若函数是一个抽象的数学表达式子，则其定义域应是使这式子有意义的一切实数组成的集合，且在

①分式的分母不能为零；②偶次根号下应大于或等于零；

③对数式的真数应大于零且底数大于零不为 1；④$\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$，其 $|\varphi(x)|\leqslant1$；

⑤$\tan\varphi(x)$，其中 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\varphi(x)<k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$；$\cot\varphi(x)$，其中 $k\pi<\varphi(x)<k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$.

⑥若函数的表达式由几项线性组合组成，则它的定义域是各项定义域的交集；

⑦分段函数的定义域是各段定义域的并集.

(2)若函数涉及实际问题，定义域是除了使数学式子有意义还应当确保实际有意义自变量取值全体组

成的集合.

(3)对于抽象函数的定义域问题,要依据函数定义及题设条件.

例 1.1.1 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$,求 $f(x)$的定义域.

解 要使函数式子有意义,必须满足

$$\begin{cases}1+\dfrac{1}{x-2}\neq 0\\ x-2\neq 0\end{cases}, \quad 即 \begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq 2.\end{cases}$$

故所给函数的定义域为$\{x:x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1,x\neq 2\}$.

注 如果把$\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-2}}$化简为$\dfrac{x(x-2)}{x-1}$,那么函数的定义域为 $x\neq 1$ 的一切实数,因此,求函数的定义域时需特别小心,避免出错.

例 1.1.2 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,由 $\ln(1-x)\geqslant 0$,得

$$1-x\geqslant 1,即\ x\leqslant 0,所以\ \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},x\leqslant 0.$$

类型 1.2 求函数值域

解题策略 ①由定义域 x 的范围,利用不等式求出 $f(x)$的范围;

②若 $y=f(x)$有反函数 $x=f^{-1}(y)$,求出反函数的定义域就是函数的值域;

③利用一元二次方程的判别式求函数的值域.

例 1.1.3 求下列函数值域:

(1)$y=x+\sqrt{1-x}$; (2)$y=\dfrac{x+1}{x+3}$.

解 (1)令 $\sqrt{1-x}=t$,则 $x=1-t^2$,于是 $y=x+\sqrt{1-x}=1-t^2+t=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}\leqslant\dfrac{5}{4}$.

当且仅当 $t=\dfrac{1}{2}$,即 $x=\dfrac{3}{4}$时,$y=\dfrac{5}{4}$.故函数 $y=x+\sqrt{1-x}$的值域是$\left(-\infty,\dfrac{5}{4}\right]$.

(2)由 $y=\dfrac{x+1}{x+3}$,得$(x+3)y=x+1$,解之,$x=\dfrac{1-3y}{y-1}$是 $y=\dfrac{x+1}{x+3}$的反函数,而

$x=\dfrac{1-3y}{y-1}$的定义域是 $y\neq 1$,故函数值域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

类型 1.3 判断两函数是否为同一函数

解题策略 在判断两个函数是否为同一函数时,只要看这两个函数的定义域和对应法则是否相同,至于自变量、因变量用什么字母,函数用什么记号都是无关紧要的.

例 1.1.4 判断下列各组函数是否为同一函数:

(1)(ⅰ)$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$; (ⅱ)$s=\sqrt{1-\cos^2 t}(0\leqslant t\leqslant\pi)$.

(2)(ⅰ)$y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$; (ⅱ)$y=\dfrac{1}{x+1}$.

解 (1)由 $y=\sin x$ 的定义域是$[0,\pi]$,$s=\sqrt{1-\cos^2 t}$的定义域是$[0,\pi]$,知两函数定义域相同,又 $s=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{\sin^2 t}=|\sin t|=\sin t(0\leqslant t\leqslant\pi)$,知两函数对应法则相同,故(ⅰ)(ⅱ)为同一函数.

(2)由 $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$的定义域是 $x\neq\pm 1$ 的全体实数,$y=\dfrac{1}{x+1}$的定义域是 $x\neq -1$ 的全体实数,知两函数定义域不同,尽管当 $x\neq\pm 1$ 时,$y=\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$,知两函数对应法则相同,但(ⅰ)(ⅱ)不是同一个函数.

类型 1.4 求反函数的表达式

解题策略 ①从 $y=f(x)$中解出 $x=f^{-1}(y)$;②改写成 $y=f^{-1}(x)$,则 $y=f^{-1}(x)$是 $x=f^{-1}(y)$的反函数.

例 1.1.5 求下列函数的反函数：

(1)$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$；　　(2)$y=\begin{cases}x, x<1,\\ x^2, 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, x>4.\end{cases}$

解 (1)由 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$，两边立方得

$$y^3=x+\sqrt{1+x^2}+3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})^2(x-\sqrt{1+x^2})}+3\sqrt[3]{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})^2}+x-\sqrt{1+x^2},$$

即
$$y^3=2x-3\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}-3\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=2x-3y,$$

解之 $x=\frac{1}{2}(3y+y^3)$. 所以反函数为 $y=\frac{1}{2}(3x+x^3)$，$x\in\mathbf{R}$.

(2)由 $x=\begin{cases}y, y<1,\\ \sqrt{y}, 1\leqslant y\leqslant 16,\\ \log_2 y, y>16,\end{cases}$ 则反函数为 $y=\begin{cases}x, x<1,\\ \sqrt{x}, 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, x>16.\end{cases}$

类型 1.5 求复合函数的表达式

解题策略 ①代入法：某一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法，称之为代入法. 该法适用于初等函数的复合，解题时关键搞清谁是内函数，谁是外函数. ②分析法：根据外函数定义的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法. 该方法用于初等函数与分段函数或分段函数与分段函数的复合.

例 1.1.6 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, x<1,\\ x, x\geqslant 1.\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, x<0,\\ x^2-1, x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(\varphi(x))$.

解 由 $f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, \varphi(x)<1,\\ \varphi(x), \varphi(x)\geqslant 1.\end{cases}$

(1)当 $\varphi(x)<1$ 时，当 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0,\\ x<-1,\end{cases}$ 有 $x<-1$.

当 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\end{cases}$，有 $0\leqslant x<\sqrt{2}$.

(2)当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，当 $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0,\\ x\geqslant -1,\end{cases}$ 有 $-1\leqslant x<0$.

当 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x\leqslant -\sqrt{2} \text{ 或 } x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$，有 $x\geqslant\sqrt{2}$. 得

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x+2}, x<-1,\\ x+2, -1\leqslant x<0,\\ e^{x^2-1}, 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ x^2-1, x\geqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

类型 1.6 判断函数奇偶性

解题策略 ①用定义；②若 $f(x)+f(-x)=0$，则 $f(x)$ 为奇函数，这种方法适合用定义困难的题目.

例 1.1.7 判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$；　　(2)$f(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$($a>0$，$a\neq 1$ 常数).

解 (1)由 $f(x)+f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}+\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1-x}{1+x}+\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1+x}{1-x}=\ln 1=0$，知 $f(x)$ 为奇函数.

(2)由 $f(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{1}{a^x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=\frac{a}{1-a^x}+1-\frac{1}{2}=\frac{a^x+1-a^x}{1-a^x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1-a^x}$

$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{a^x-1}-\frac{1}{2}=-f(x)$,知 $f(x)$为奇函数.

类型 1.7 周期函数的判断与周期的求法

解题策略

(1)周期函数的判断方法:①用定义;②用周期函数的运算性质.(2)周期函数周期的求法:①若 T 为 $f(x)$的周期,则 $f(ax+b)$的周期为 $\frac{T}{|a|}(a\neq 0)$;②若 $f(x)$的周期为 T_1,$g(x)$的周期为 T_2,则 $c_1f(x)+c_2g(x)$的周期为 T_1,T_2 的最小公倍数.

常见函数的周期:$\sin x,\cos x$,其周期 $T=2\pi$;$\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$周期 $T=\pi$.

例 1.1.8 求下列函数周期:

(1)$f(x)=2\tan\frac{x}{2}-3\tan\frac{x}{3}$;　　(2)$f(x)=\sin^4x+\cos^4x$;　　(3)$f(x)=x-[x]$.

解 (1)由 $\tan\frac{x}{2}$的周期 $T_1=\pi\Big/\frac{1}{2}=2\pi$,$\tan\frac{x}{3}$的周期 $T_2=\pi\Big/\frac{1}{3}=3\pi$. 故 $f(x)$的周期性期为 6π.

(2)由 $f=(x)=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$,知 $f(x)$的周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{1}{2}\pi$.

(3)设 $x=n+r\ (0\leqslant r<1)$,$n\in\mathbf{Z}$,T 为任意整数,由 $f(x+T)=f(n+T+r)=n+T+r-[n+T+r]=n+T+r-(T+[n+r])=n+r-[n+r]=f(x)$,知任意整数均为其周期,则最小周期 $T=1$.

类型 1.8 单调函数的判断方法

解题策略 ①用定义;②利用单调函数的性质:两个递减(增)函数的复合是递增函数,一个递增、一个递减函数的复合是递减函数;③单调性定理.

类型 1.9 函数有界性的判断

解题策略 判断函数有界,经常用定义.判断函数无界:①用定义;②找一个子数列极限是无穷大.

例 1.1.9 判断下列函数是否有界:

(1)$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$;　　(2)$f(x)=\frac{1}{x^2}$,$x\in(0,1]$.

解 (1)由 $f(x)$的定义域是 $\mathbf{R}$.

当 $x\neq 0$ 时,$|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$,当 $x=0$ 时,$f(0)=0$,有 $|f(0)|<\frac{1}{2}$,

知 $x\in\mathbf{R}$ 时,$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$,所以 $f(x)$为有界函数.

(2)$\forall M>0$,取 $x_0=\frac{1}{\sqrt{M+1}}\in(0,1]$. $|f(x_0)|=\left|\frac{1}{\frac{1}{M+1}}\right|=|M+1|=M+1>M$.

由无界函数的定义知 $f(x)$在$(0,1]$上无界.

§1.2 函数极限与连续

一、内容梳理

(一)基本概念

1. 函数极限的概念

(1)**定义 1.9** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$:若存在一个常数 A,$\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,当 $x>X$ 时,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2)**定义 1.10** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$:把(1)中"$x>X$"换成"$x<-X$".

(3)**定义 1.11** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$:把(1)中"$x>X$"换成"$|x|>X$".

(4)**定义 1.12** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$:设 $f(x)$在 x_0 的某空心邻域$\mathring{U}(x_0)$内有定义,若存在一个常数 A,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,都有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(5)**定义 1.13** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$:设 $f(x)$在 x_0 的某左半邻域$\mathring{U}_-(x_0)$内有定义,若存在一个常数 A,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$-\delta<x-x_0<0$ 时,都有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

此时也可用记号 $f(x_0-0)$或 $f(x_0^-)$表示左极限值 A,因此可写成

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0-0)\text{或}\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-).$$

(6)**定义 1.14** $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$:设 $f(x)$在 x_0 的某右半邻域$\mathring{U}_+(x_0)$内有定义,若存在一个常数 A,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,都有$|f(x)-A|<\varepsilon$.此时也可用 $f(x_0+0)$或 $f(x_0^+)$表示右极限 A.因此可写成

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0+0)\text{或}\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+).$$

(7)**定义 1.15** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$:$\forall M>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,都有$|f(x)|>M$.此时称 $x\to x_0$ 时,$f(x)$是无穷大量.

而$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$:只要把上式中"$|f(x)|>M$"改成"$f(x)>M$",$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$:只要把上式中"$|f(x)|>M$"改成"$f(x)<-M$".

(8)**定义 1.16** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$:$\forall M>0$,$\exists X>0$.当$|x|>X$ 时,都有$|f(x)|>M$.

同理可给出 $\lim\limits_{x\to\infty(+\infty\text{或}-\infty)} f(x)=+\infty$或$-\infty$定义.

注 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$(常数)与$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$的区别:前者是表明函数极限存在,后者指函数极限不存在,但还是有个趋于无穷大的趋势,因此,给它一个记号,但还是属于极限不存在之列,当说函数极限存在,指的是函数极限值是个常数.

(9)**定义 1.17** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.称 $f(x)$当 $x\to x_0$ 是无穷小量.

这里 x_0 可以是常数,也可以是∞,$+\infty$,$-\infty$,以后不说明都是指的这个意思.

(10)**定义 1.18** 若$\exists\delta>0$,$\exists M>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,都有$|f(x)|\leqslant M$,称 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时是有界量.

2.无穷小量阶的比较,无穷小量与无穷大量关系

设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,称 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时是 $g(x)$的高阶无穷小量,记作 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$;

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,称 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时是 $g(x)$的等价无穷小量,记作 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$;

(3)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$(常数)$\neq 0$,称 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时是 $g(x)$的同阶无穷小量,记作 $f(x)\sim cg(x)(x\to x_0)$;

(4)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=c$(常数)$\neq 0$($k>0$ 常数),称 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时是 $x-x_0$ 的 k 阶无穷小量.

由等价无穷量在求极限过程中起到非常重要的作用,因此,若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,记作 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$,如果 $f(x)$,$g(x)$均是无穷小量,称为等价无穷小量;如果 $f(x)$,$g(x)$均是无穷大量,称为等价无穷大量;如

果 $f(x)$,$g(x)$既不是无穷小也不是无穷大,称为等价量.

例如 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(常数)$\neq 0$,则 $f(x)\sim A(x\to x_0)$.

注 A 不能为零,若 $A=0$,$f(x)$不可能和 0 等价.

3. 函数连续的概念

定义 1.19 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言可写为

定义 1.20 设 $f(x)$在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有定义,若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

用函数值增量 Δy 形式可写为

定义 1.21 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

如果 $f(x)$在 $x=x_0$ 处不连续,称 $x=x_0$ 为 $f(x)$的间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处左连续,若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处右连续.

间断点的分类:

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(常数),但 $f(x)$在 $x=x_0$ 处不连续,称 $x=x_0$ 是 $f(x)$的可去间断点.

若 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$的可去间断点,只需补充定义或改变 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的函数值,使函数在该点连续. 但须注意,这时函数与 $f(x)$已经不是同一个函数但仅在 $x=x_0$ 处不同,在其他点相同. 正是利用这一性质去构造一个新的函数 $F(x)$,使 $F(x)$在某闭区间上处处连续,因而有某种性质. 当 $x\neq x_0$ 时,也具有这种性质. 而 $x\neq x_0$ 时,$F(x)=f(x)$,所以 $f(x)$在 $x\neq x_0$ 的范围内也具有这种性质.

例如 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,但 $f(x)$在 $x=0$ 处没定义,知 $f(x)$在 $x=0$ 处不连续,设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 则 $F(x)$在 $x=0$ 处连续,但 $F(x)$与 $f(x)$定义域不同,虽然 $F(x)$与 $f(x)$不是同一函数,却在 $x\neq 0$ 处完全相同.

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)$,但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$,称 $x=x_0$ 为 $f(x)$的跳跃间断点,称 $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$为 $f(x)$的跳跃度.

(1)(2)两种类型的特点是左右极限都存在,统称为第一类间断点,特点是左右极限均存在.

(3)若在 $x=x_0$ 处,左、右极限至少有一个不存在,称 $x=x_0$ 为 $f(x)$的第二类间断点.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,也称 $x=x_0$ 为 $f(x)$的无穷型间断点,属于第二类间断点.

(二)重要定理与公式

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

定理 1.3 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

定理 1.4 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(常数)$\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

1. 无穷小量的性质

若 $\alpha_1(x),\alpha_2(x),\cdots,\alpha_m(x)$当 $x\to x_0$ 时,均为无穷小量,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[c_1\alpha_1(x)+c_2\alpha_2(x)+\cdots+c_m\alpha_m(x)]=0$,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 均为常数;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_1(x)\alpha_2(x)\cdots\alpha_m(x)=0$;

(3)若 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时是有界量,$\alpha(x)$当 $x\to x_0$ 时是无穷小量,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\alpha(x)=0$.

2. 无穷大量的性质

(1)有限个无穷大量之积仍是无穷大量;(2)有界量与无穷大量之和仍是无穷大量.

3. 无穷小量与无穷大量之间的关系

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$；

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，且 $\exists\,\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

4. 函数极限的性质

在下述六种类型的函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$；(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$；(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；(5) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$；(6) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

它们具有与数列极限相类似的一些性质，以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为例，其他类型极限的相应性质的叙述只要作适当修改.

性质 1(唯一性)　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则它只有一个极限.

性质 2(局部有界性)　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有界.

注　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，只能得出 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界，得不出 $f(x)$ 在其定义域内有界.

性质 3　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A<B$，则存在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$，使 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，都有 $f(x)<g(x)$.

性质 4(局部保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$(或 <0)，则对任何常数 $0<\eta<A$(或 $A<\eta<0$)，存在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，使得对一切 $x\in \mathring{U}(x_0)$，都有 $f(x)>\eta>0$(或 $f(x)<\eta<0$)成立.

性质 5(不等式)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且存在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$，使得对一切 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$，都有 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $A\leqslant B$.

性质 6(复合函数的极限)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且存在 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta')$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta')$ 时，$\varphi(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

性质 6 是求极限的一个重要方法——变量替换法：$\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))\overset{令\ \varphi(x)=u}{\underset{且\ x\to x_0,\ \varphi(x)\to u_0}{=\!=\!=\!=\!=}}\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

性质 7(函数极限的四则运算)　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$cf(x)$(c 为常数)在 $x\to x_0$ 时极限均存在且

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x\to x_0$ 时的极限也存在，且有

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

利用极限的四则运算，可得下列重要结果.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$ ($a_0,\cdots,a_n,b_0,\cdots,b_m$ 均为常数，$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}\frac{a_0+a_1\dfrac{1}{x}+\cdots+a_{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}+a_n\dfrac{1}{x^n}}{b_0+b_1\dfrac{1}{x}+\cdots+b_{m-1}\dfrac{1}{x^{m-1}}+b_m\dfrac{1}{x^m}}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

上面的结论可作为公式用.

性质8(归结原则或海涅(Heine)定理)　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是：

$\forall \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\ (x_n\neq x_0,n=1,2,\cdots)$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在且相等.

逆否定理　若存在两个数列$\{x'_n\}$，$\{x''_n\}\subset\mathring{U}(x_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x''_n=x_0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_n)=B$，$A\neq B$或存在$\{x_n\}\subset\mathring{U}(x_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

此定理是判断函数极限不存在的一个重要方法.

5. 函数连续的性质

若函数$f(x)$在点$x=x_0$处连续，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，利用极限的性质1—5可得到函数在$x=x_0$连续的局部有界性，局部保号性，不等式等，只要把$\mathring{U}(x_0)$改成$U(x_0)$即可，读者自己叙述出来.

利用极限的四则运算，有

性质1(连续函数的四则运算)　若$f(x)$，$g(x)$在点$x=x_0$处连续，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$cf(x)$(c为常数)$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$在$x=x_0$处也连续.

性质2　若$u=\varphi(x)$在x_0处连续，$y=f(u)$在$u_0=\varphi(x_0)$处连续，则$y=f(\varphi(x))$在$x=x_0$处也连续且$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$.

在满足性质2的条件下，极限符号与外函数f可交换顺序，如果仅要可交换顺序，有

推论　若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$y=f(u)$在$u=u_0$处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$.

证明　设$g(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq x_0,\\ u_0, & x=x_0,\end{cases}$则$g(x)$在$x=x_0$处连续，又$y=f(u)$在$u=u_0=g(x_0)$处连续，由性质2知

$\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))$. 由于$x\to x_0$，要求$x\neq x_0$，有$g(x)=\varphi(x)$，所以$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$.

利用可去间断点的性质，构造一个连续函数，以满足所需的条件，上面的性质2及推论也是求函数极限的一个重要方法.

即极限符号与外函数f交换顺序，把复杂函数极限转化为简单函数极限.

定理1.5　$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow f(x)$在x_0处既是左连续又是右连续.

定理1.6　初等函数在其定义域区间上连续.

6. 闭区间上连续函数的性质

定理1.7(最大值与最小值定理)　若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上一定能取到最大值与最小值，即存在$x_1,x_2\in[a,b]$，$f(x_1)=M$，$f(x_2)=m$，使得对一切$x\in[a,b]$，都有$m\leqslant f(x)\leqslant M$.

推论1.7.1　若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

定理1.8(根的存在定理或零值点定理)　若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$.

推论1.8.1　若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\neq f(b)$，c为介于$f(a)$，$f(b)$之间的任何常数，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=c$.

推论1.8.2　若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则值域$R(f)=[m,M]$.

这几个定理非常重要，请大家要记住这些定理的条件与结论，并会运用这些定理去解决问题.

7. 重要的函数极限与重要的等价量

利用初等函数的连续性、极限符号与外函数的可交换性、等价量替换及夹逼定理等可得到下面的重要的函数极限.