高等学校计算机规划教材

离散数学（第2版）

邵学才　叶秀明　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校计算机规划教材

离散数学

（第2版）

邵学才　叶秀明　编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内容简介

离散数学是计算机学科重要的基础课程，本书是作者多年教学经验的总结，全书内容包括：集合、二元关系、函数、代数结构（群、环、域、格和布尔代数）、图论、命题逻辑和谓词逻辑等。本书结构清晰，概念准确，叙述严谨，有层次地精选了丰富的例题，各章节还配有适量的习题，帮助读者巩固和掌握所学知识。本书还为任课老师提供电子课件和习题选解。

本书可作为高等学校计算机、信息管理与信息系统、信息与计算科学等专业教材，也适合工程技术人员和自学者参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/邵学才，叶秀明编著．—2版．—北京：电子工业出版社，2009.4
高等学校计算机规划教材
ISBN 978-7-121-08538-3

Ⅰ．离… Ⅱ．①邵… ②叶… Ⅲ．离散数学－高等学校－教材 Ⅳ．O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第041674号

策划编辑：童占梅
责任编辑：童占梅
印　　刷：北京市顺义兴华印刷厂
装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：18.75　字数：473千字
印　　次：2009年4月第1次印刷
印　　数：5000册　定价：27.00元

第 2 版前言

本书自出版以来，受到不少高等院校专家与同行的关注，被选作计算机专业或相关专业使用的教材，作者深表谢意。

在第 2 版中，主要是改正了第 1 版中的一些错误，改写了第 1 章集合和第 4 章代数结构中的部分内容，使教材的内容更富有逻辑性和条理性，使教材的叙述显得更流畅；并将每一节的习题抽取出来，列到目录中，进一步提高了教材的可读性。本书还**为任课老师提供电子课件和习题选解**，任课老师可通过华信教育资源网 http://www.huaxin.edu.cn 获取这些教学资源。

离散数学是计算机学科重要的基础课程，本书是作者多年教学经验的总结，全书内容包括：集合、二元关系、函数、代数结构（群、环、域、格和布尔代数）、图论、命题逻辑和谓词逻辑等。本书结构清晰，概念准确，叙述严谨，有层次地精选了丰富的例题，各章节还配有适量的习题，帮助读者巩固和掌握所学知识。

考虑到不同层次学生的不同需求，在第 2 版中，对教材中的某些内容标记“*”号，含有“*”号的内容不作教学要求，讲课教师可依据实际情况，酌情处理。

本书可作为高等学校计算机、信息管理与信息系统、信息与计算科学等专业教材，也适合工程技术人员和自学者参考。

在第 2 版中，仍会有一些不尽人意之处，希望使用本教材的教师、学生和读者不吝赐教。

本书在编写与修订过程中，始终得到亲友肖珑和张绍昆的关切与支持，作者表示衷心感谢！

编著者

第1版前言

《离散数学》是理工科高等院校计算机专业的重要基础课程，它不仅为后续课程——数据结构、操作系统、编译原理、数据库原理、人工智能等做必要的理论准备，而且还在培养学生的创新思维、创新能力和综合素质方面有其独特的作用。

《离散数学》的主要内容是介绍计算机科学的基础理论，它通常由“集合与关系”、“代数结构”、“图论”和“数理逻辑”组成，这些内容既是独立的，又是相互关联的。可以说，离散数学具有“内容广泛，抽象理论多”的特点。在编写教材的过程中，作者充分考虑到这一特点，有层次地精选例题，通过例题逐步剖析概念，深化概念，并引导学生在理解概念的基础上作进一步的思考。

本教材中，对于“图论”和“代数结构”着笔较多，这不仅因为“图论”在计算机技术和计算机科学理论中有着广泛的应用，更由于这两部分内容在提高学生的抽象思维、逻辑思维和创新思维方面有突出的作用。

本教材由上海大学叶秀明教授和北京工业大学邵学才教授共同编写，在编写过程中得到亲友邵佩珍副教授、邵学正总工程师和吕听泉、黄智强副教授的悉心帮助，作者深表谢意。

编著者

目　　录

第1章 集　　合

集合论是由德国著名数学家康托于19世纪70年代创建的。由于集合的研究不依赖于构成集合的事物(元素)的具体特性,因此研究对象的广泛性成为集合论的重要特征,从而使集合论能渗透到现代数学的各个分支,成为现代数学的基础。集合论在计算机科学理论的研究中也有重要用途,在程序设计、形式语言、数据库、操作系统、并行处理等方面有着广泛的应用。

集合论的内容是极其丰富的,有早期的朴素集合论和后来的公理化集合论。本章主要介绍朴素集合论的基本内容,包括:什么是集合,以及有关子集、空集、全集、补集、幂集等基本概念,集合的基本运算和集合代数的有关公式,在组合计数中有着广泛应用的包含排斥原理等。

1.1 集合的基本概念

在数学理论的研究中,经常把概念分为原始概念和派生概念两种类型。其中派生概念是指可以由其他概念给出定义的概念,例如在平面几何中,正方形可以由邻边相等的矩形来定义;矩形则可以由内角为直角的平行四边形来定义等。原始概念是指无法由其他概念给出定义的概念,例如平面几何中的点、直线等。集合也是一种原始概念,无法给出精确的定义,只能给出说明性的描述。

集合就是具有某种特点的研究对象的聚合,其中每一个研究对象称为这个集合的元素。例如,当研究对象为大学生时,北京工业大学学生的全体可以构成一个集合,而北京工业大学的每一个学生就是这个集合中的一个元素。又如,在初等数论中,研究对象是整数,所以正整数全体或负整数全体都可以构成集合,且每一个正整数或每一个负整数分别是这两个集合中的元素。

一般用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来代表集合;用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 来代表集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的元素,称 a 属于 A,并记作

$$a \in A$$

如果 a 不是集合 A 中的元素,称 a 不属于 A,并记作

$$a \notin A$$

1.1.1 集合的表示方法

集合有多种表示方法,下面介绍两种常用的表示方法。

1. 列举法

这种表示方法是把集合中的所有元素置于花括号内,元素之间用逗号隔开。如集合 A 含有8个元素,它们分别是2,3,5,7,11,13,17,19。用列举法可把集合 A 表示成

$$A = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$

易见,$5 \in A$,但 $6 \notin A$。

2. 特征法

用特征法表示集合时，将以某个小写的英文字母来统一表示该集合的元素，并指出这类元素的共同特征。如

$$B = \{x \mid x \text{ 是素数}, x < 20\}$$

花括号内的符号“|”读作“系指”，花括号内的逗号读作“并且”。因此，集合 B 中的元素是一些素数，并且小于20；或者简单地说，B 是由小于20的素数组成的。实际上，集合 B 中的元素就是 2,3,5,7,11,13,17,19。可见集合 B 和列举法中所提到的集合 A 的元素完全相同。

当两个集合 X 和 Y 的元素相同时，称这两个集合相等，记作 $X = Y$。

易见，上面提到的两个集合 A 和 B 是相等的，即 $A = B$。

1.1.2 子集

定义 1.1.1 设 A，B 是集合，如果 A 中每一个元素又都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，也称 B 包含 A 或 A 含在 B 中，记作

$$B \supseteq A \text{ 或 } A \subseteq B$$

如果 A 不是 B 的子集，即在 A 中至少有一个元素不属于 B，则称 B 不包含 A 或 A 不含在 B 中，记作

$$B \not\supseteq A \text{ 或 } A \not\subseteq B$$

如果 A 是 B 的子集，但 A 和 B 不相等，也就是说，在 B 中总有一些元素不属于 A，则称 A 为 B 的真子集，记作

$$B \supset A \text{ 或 } A \subset B$$

例如，集合 $P = \{1,2,3,4,5\}$，$Q = \{1,3,5\}$，$R = \{2,4\}$。易见集合 Q 和 R 都是 P 的子集，且都是真子集，即有 $P \supset Q$ 和 $P \supset R$。但 Q 不是 R 的子集，R 也不是 Q 的子集，所以有 $Q \not\supseteq R$ 和 $R \not\supseteq Q$。

由子集的定义，易得下列定理。

定理 1.1.1 集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是：$A \supseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

此定理在证明两个集合相等时，是一种有效而基本的方法。

不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，或 $\{\ \}$。

由空集的定义可知，空集是任何集合的子集。

集合中的元素就是我们的研究对象。集合也可以成为研究对象，因此一个集合成为另一个集合的元素是完全可能的。

例如，集合 $A = \{a, b, \{c, d\}\}$，这表明集合 A 含有 3 个元素：$a, b, \{c, d\}$，其中集合 $\{c, d\}$ 就是集合 A 的元素。

一般地讲，从属关系“$\in$”是元素和集合之间的关系；包含关系“$\supseteq$”则是集合和集合之间的关系。但由于集合也可以作为另一个集合的元素，所以存在着这样的情况：集合 A 含在集合 B 中，集合 A 又属于 B。如

$$A = \{a, b\}$$
$$B = \{a, b, \{a, b\}\}$$

此时就有 A 既是 B 的子集，又是 B 中的元素，即有 $A \subset B$ 和 $A \in B$ 同时成立。

1.1.3 全集和补集

研究对象的全体称为全集，记作 U。

例如，当我们研究世界妇女的生活状况时，研究对象可以是中国妇女，也可以是美国妇女、法国妇女等。但是，研究对象总是在世界妇女这一范围内，所以全世界妇女是研究对象的全体，它是一个全集。

又如，当我们研究自然数的特性时，所有自然数构成的集合就是全集。

全集和研究对象的范围密切相关。当我们研究的集合总是某个集合的子集时，这个集合就是全集。

下面介绍补集。

设 A 是集合，由属于全集 U 但不属于集合 A 的元素构成的集合称为 A 的补集，记作 $\bar{A}$（或 $\sim A$）。

例如，全集 U 是全体正整数构成的集合，若

$$A = \{x \mid x \text{ 是正偶数}\}$$

则 A 的补集

$$\bar{A} = \{x \mid x \text{ 是正奇数}\}$$

又如，全集 $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，若

$$A = \{1,2,3,4\}$$

则 A 的补集

$$\bar{A} = \{5,6,7,8,9,10\}$$

1.1.4 幂集

定义 1.1.2 设 A 是集合，由 A 的所有子集作为元素构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$。

例如，集合 $A = \{a,b\}$，则其幂集

$$P(A) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

又如，集合 $A = \{1,2,3\}$，则其幂集

$$P(A) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

当一个集合中的元素个数为有限时，称该集合为有限集；集合中的元素个数为无限时，称该集合为无限集。

有限集 A 中元素的个数称为有限集 A 的基，记作 $|A|$。如 $A = \{1,2,3,4\}$，则 $|A| = 4$。

在上面提到的两个求幂集的例子中，容易看到，当集合 A 含有 2 个元素时，即 $|A| = 2$，则其幂集 $P(A)$ 含有 4 个元素，即 $|P(A)| = 4$；当集合 A 含有 3 个元素时，即 $|A| = 3$，则其幂集 $P(A)$ 含有 8 个元素，即 $|P(A)| = 8$。在一般情况下，有下列结论。

定理 1.1.2 设 A 是有限集，且 $|A| = n$，则其幂集的基 $|P(A)| = 2^n$。

证明 由排列组合的知识可知

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$$

又由二项式定理可知

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + \cdots + C_n^n \cdot b^n$$

若取 $a = b = 1$,则有

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$$

由此证得

$$|P(A)| = 2^n。证毕。$$

上述定理表明,当集合 A 的基数逐步增长时,幂集 $P(A)$ 的基数将以指数形式增长,因此当集合 A 的基数比较大时,写出其幂集 $P(A)$ 不仅冗长,而且容易遗漏一些元素,也不便于计算机处理。下面给出一种比较规范的书写幂集的方法。

由于当 $|A| = n$ 时,$|P(A)| = 2^n$,因此 $P(A)$ 中的元素可以与 n 位二进制数序列 $00\cdots0 \sim 11\cdots1$ 建立一一对应关系,通常把 $P(A)$ 中的元素写成含有下标的集合 A_k,其中 k 是 n 位二进制数序列。具体的做法是:

首先把集合 A 中的 n 个元素确定排列顺序,如 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,于是 $P(A)$ 中的元素 A_k 为这样的集合:当二进制数序列 k 中的第 i 位为 1 时,集合 A_k 含有元素 a_i,否则集合 A_k 不含有元素 a_i。

例如,$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 其幂集 $P(A) = \{A_{000}, A_{001}, A_{010}, A_{011}, A_{100}, A_{101}, A_{110}, A_{111}\}$,其中

$$\begin{aligned}
A_{000} &= \varnothing \\
A_{001} &= \{a_3\} \\
A_{010} &= \{a_2\} \\
A_{011} &= \{a_2, a_3\} \\
A_{100} &= \{a_1\} \\
A_{101} &= \{a_1, a_3\} \\
A_{110} &= \{a_1, a_2\} \\
A_{111} &= \{a_1, a_2, a_3\}
\end{aligned}$$

即有

$$P(A) = \{\varnothing, \{a_3\}, \{a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$$

【例 1.1】 设 $A = \{a, b, c, d\}$,写出其幂集 $P(A)$。

解 把幂集 $P(A)$ 中的元素表示成下标集,于是有

$$\begin{aligned}
P(A) &= \{A_{0000}, A_{0001}, A_{0010}, A_{0011}, A_{0100}, A_{0101}, A_{0110}, A_{0111}, A_{1000}, A_{1001}, A_{1010}, \\
&\quad A_{1011}, A_{1100}, A_{1101}, A_{1110}, A_{1111}\} \\
&= \{\varnothing, \{d\}, \{c\}, \{c, d\}, \{b\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{a\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \\
&\quad \{a, c, d\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}
\end{aligned}$$

习题

1. 用列举法表示下列集合。

(1) $\{x \mid x$ 是小于 15 的正奇数$\}$

(2) $\{x \mid x$ 是整数,$x^2 < 30\}$

(3) $\{x \mid x$ 是中国的直辖市$\}$

(4) $\{x \mid x = 3p, p$ 是小于 10 的素数$\}$

(5) $\{x \mid x$ 是能整除 30 的正整数$\}$

2. 用特征法表示下列集合。

(1) $\{1,4,9,16,25,36\}$

(2) $\{a,e,i,o,u\}$

(3) $\{1,3,5,\cdots,99\}$

(4) $\{5,10,15,\cdots,100\}$

(5) $\left\{\frac{1}{3},1,\frac{5}{3},\frac{7}{3},3,\frac{11}{3},4\right\}$

3. 设 A,B,C 是集合,确定下列命题是否正确,并说明理由。

(1) 如果 $A \in B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$

(2) 如果 $A \in B, B \subseteq C$,则 $A \in C$

(3) 如果 $A \subseteq B, B \in C$,则 $A \in C$

(4) 如果 $A \subseteq B, B \in C$,则 $A \subseteq C$

4. 确定下列命题是否正确?

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(2) $\varnothing \in \varnothing$

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

5. 设 A,B,C 是集合

(1) 如果 $A \notin B$ 且 $B \notin C$,是否必有 $A \notin C$?

(2) 如果 $A \in B$ 且 $B \notin C$,是否必有 $A \notin C$?

(3) 如果 $A \subset B$ 且 $B \notin C$,是否必有 $A \notin C$?

6. 求下列集合的幂集。

(1) $\{2,4,6\}$

(2) $\{a,b,\{a,b\}\}$

(3) $\varnothing$

(4) $\{\varnothing\}$

(5) $\{0\}$

(6) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

1.2 集合的基本运算

本节介绍 4 种常用的集合基本运算以及有关公式。

1.2.1 并和交

定义 1.2.1 设 A,B 是集合,由属于集合 A 或者属于集合 B 的所有元素构成的集合,称为 A 和 B 的并,记作 $A \cup B$,也即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例如,$A = \{1,3,5\}, B = \{2,3,4\}$,则 $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$。

又如,$A = \{a,b,c\}, B = \{b,c,d,e\}$,则 $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$。

集合的运算可以用文氏图形象地表示,在图 1.2.1 中,矩形表示全集 U,两个圆分别表示集合 A 和 B,阴影部分就是 $A \cup B$。

由集合并运算的定义可知,集合并运算具有以下性质。

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(3) $A \cup A = A$

(4) $A \cup \varnothing = A$

(5) $A \cup U = U$

定义 1.2.2 设 A,B 是集合,由属于 A,B 两集合的所有共同元素构成的集合,称为 A 和 B 的交,记作 $A \cap B$,也即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$$

例如,$A = \{1,3,5\}$,$B = \{1,2,3,4\}$,则 $A \cap B = \{1,3\}$。

又如,$A = \{a,b,c,d\}$,$B = \{c,d,e\}$,则 $A \cap B = \{c,d\}$。

集合的交运算的文氏图表示见图 1.2.2,图中阴影部分就是 $A \cap B$。

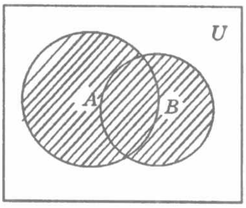

图 1.2.1

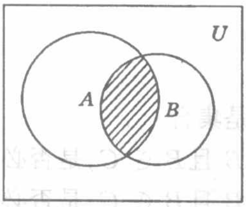

图 1.2.2

如果集合 $A \cap B = \varnothing$,也即集合 A 和 B 没有共同元素,则称 A,B 不相交。

例如,$A = \{1,3,5\}$,$B = \{2,4,6\}$,则 $A \cap B = \varnothing$,即 A 和 B 不相交。

由集合交运算的定义可知,集合交运算具有以下性质。

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) $A \cap A = A$

(4) $A \cap \varnothing = \varnothing$

(5) $A \cap U = A$

并和交运算有着密切联系。

定理 1.2.1 设 A,B,C 是集合,则下列分配律成立

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证明 只证第一等式,第二等式的证明方法相同。首先证明

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

再证

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

从而利用定理 1.1.1 证得

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

要证明 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$，也即证明 $A \cap (B \cup C)$ 是 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 的子集，所以只需证明对于 $A \cap (B \cup C)$ 中的任意元素 x，都有 x 也是 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 的元素。

对于任意的 $x \in A \cap (B \cup C)$，即有 $x \in A$ 并且 $x \in B \cup C$；也即 $x \in A$ 且 $x \in B$，或者 $x \in A$ 且 $x \in C$；于是有 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$，所以 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，由此证得

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

再证 $$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

对于任意的 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$；即有 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或者 $x \in A$ 且 $x \in C$；也即有 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$，所以有 $x \in A \cap (B \cup C)$，由此证得

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

综上所述，最后证得

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)。$$证毕。

上述定理的第一等式表明集合的交运算对并运算是可分配的；第二等式表明集合的并运算对于交运算也是可分配的。

定理 1.2.2 设 A,B 是集合，则

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

证明 由于 $A \cap U = A$，所以

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (U \cup B) \\ &= A \cap U \\ &= A \end{aligned}$$

同样可证 $A \cap (A \cup B) = A$。证毕。

定理 1.2.2 称为吸收律。

上一节曾介绍了补集，由补集的定义可知：$A \cup \overline{A} = U$，$A \cap \overline{A} = \varnothing$，且可以证明其逆为真。

定理 1.2.3 设 A,B 是集合，如果 $A \cup B = U$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则 $B = \overline{A}$。

证明 由交运算性质可知

$$\begin{aligned} B &= B \cap U \\ &= B \cap (A \cup \overline{A}) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= \varnothing \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{A} \\ &= U \cap \overline{A} \\ &= \overline{A}。 \end{aligned}$$ 证毕。

定理 1.2.4 设 A,B 是集合，则

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

证明　先证第一等式。要证明$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，即证$\overline{A} \cap \overline{B}$是$A \cup B$的补集。由于

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) &= (A \cup B \cup \overline{A}) \cap (A \cup B \cup \overline{B}) \\ &= U \cap U \\ &= U\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) &= (A \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= \varnothing \cup \varnothing \\ &= \varnothing\end{aligned}$$

由定理1.2.3可知，$\overline{A} \cap \overline{B}$是$A \cup B$的补集，即有$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，证毕。

第二等式的证明可仿照第一等式的证明方法，或利用第一等式的结论来证明。因为

$$A \cap B = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

所以

$$\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

定理1.2.4就是著名的摩根律。

推论　设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是集合，则

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n$$

【例1.2】　设A, B是集合，证明下列等式。

(1) $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$

(2) $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = A \cup B$

(3) $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$

证明　(1) 由分配律可知

$$\begin{aligned}A \cup (\bar{A} \cap B) &= (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) \\ &= U \cap (A \cup B) \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap (A \cup \bar{A})) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap U) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) &= ((A \cap B) \cup \bar{A}) \cap ((A \cap B) \cup \bar{B}) \\ &= (A \cup \bar{A}) \cap (B \cup \bar{A}) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (B \cup \bar{B}) \\ &= U \cap (B \cup \bar{A}) \cap (A \cup \bar{B}) \cap U \\ &= (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)\end{aligned}$$

1.2.2　差和对称差

定义1.2.3　设A, B是集合，由所有属于A但不属于B的元素构成的集合称为A减B的差，记作$A - B$，即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$