

高等学校计算机规划教材

离散数学 (第2版)

■ 邵学才 叶秀明 编著

 电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

参考文献

高等学校计算机规划教材

离散数学

(第2版)

邵学才 叶秀明 编著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

参考文献
[1] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[2] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[3] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.

参考文献
[1] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[2] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[3] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.

参考文献
[1] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[2] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[3] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.

参考文献
[1] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[2] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[3] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.

参考文献
[1] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[2] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.
[3] 邵学才等译,北京:机械工业出版社,2002.

内 容 简 介

离散数学是计算机学科重要的基础课程,本书是作者多年教学经验的总结,全书内容包括:集合、二元关系、函数、代数结构(群、环、域、格和布尔代数)、图论、命题逻辑和谓词逻辑等。本书结构清晰,概念准确,叙述严谨,有层次地精选了丰富的例题,各章节还配有适量的习题,帮助读者巩固和掌握所学知识。本书还为任课老师提供电子课件和习题选解。

本书可作为高等学校计算机、信息管理与信息系统、信息与计算科学等专业教材,也适合工程技术人员和自学者参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/邵学才,叶秀明编著.—2版.—北京:电子工业出版社,2009.4
高等学校计算机规划教材
ISBN 978-7-121-08538-3

I. 离… II. ①邵… ②叶… III. 离散数学—高等学校—教材 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 041674 号

策划编辑:童占梅

责任编辑:童占梅

印 刷:北京市顺义兴华印刷厂

装 订:三河市双峰印刷装订有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:18.75 字数:473 千字

印 次:2009 年 4 月第 1 次印刷

印 数:5000 册 定价:27.00 元

凡购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换;若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

第 2 版前言

本书自出版以来,受到不少高等院校专家与同行的关注,被选作计算机专业或相关专业使用的教材,作者深表谢意。

在第 2 版中,主要是改正了第 1 版中的一些错误,改写了第 1 章集合和第 4 章代数结构中的部分内容,使教材的内容更富有逻辑性和条理性,使教材的叙述显得更流畅;并将每一节的习题抽取出来,列到目录中,进一步提高了教材的可读性。本书还为任课老师提供电子课件和习题选解,任课老师可通过华信教育资源网 <http://www.huaxin.edu.cn> 获取这些教学资源。

离散数学是计算机学科重要的基础课程,本书是作者多年教学经验的总结,全书内容包括:集合、二元关系、函数、代数结构(群、环、域、格和布尔代数)、图论、命题逻辑和谓词逻辑等。本书结构清晰,概念准确,叙述严谨,有层次地精选了丰富的例题,各章节还配有适量的习题,帮助读者巩固和掌握所学知识。

考虑到不同层次学生的不同需求,在第 2 版中,对教材中的某些内容标记“*”号,含有“*”号的内容不作教学要求,讲课教师可依据实际情况,酌情处理。

本书可作为高等学校计算机、信息管理与信息系统、信息与计算科学等专业教材,也适合工程技术人员和自学者参考。

在第 2 版中,仍会有一些不尽人意之处,希望使用本教材的教师、学生和读者不吝赐教。

本书在编写与修订过程中,始终得到亲友肖珑和张绍昆的关切与支持,作者表示衷心感谢!

编著者

第 1 版前言

《离散数学》是理工科高等院校计算机专业的重要基础课程,它不仅为后续课程——数据结构、操作系统、编译原理、数据库原理、人工智能等做必要的理论准备,而且还在培养学生的创新思维、创新能力和综合素质方面有其独特的作用。

《离散数学》的主要内容是介绍计算机科学的基础理论,它通常由“集合与关系”、“代数结构”、“图论”和“数理逻辑”组成,这些内容既是独立的,又是相互关联的。可以说,离散数学具有“内容广泛,抽象理论多”的特点。在编写教材的过程中,作者充分考虑到这一特点,有层次地精选例题,通过例题逐步剖析概念,深化概念,并引导学生在理解概念的基础上作进一步的思考。

本教材中,对于“图论”和“代数结构”着笔较多,这不仅因为“图论”在计算机技术和计算机科学理论中有着广泛的应用,更由于这两部分内容在提高学生的抽象思维、逻辑思维和创新思维方面有突出的作用。

本教材由上海大学叶秀明教授和北京工业大学邵学才教授共同编写,在编写过程中得到亲友邵佩珍副教授、邵学正总工程师和吕听泉、黄智强副教授的悉心帮助,作者深表谢意。

编著者

目 录

第 1 章 集合	1
1.1 集合的基本概念	1
1.1.1 集合的表示方法	1
1.1.2 子集	2
1.1.3 全集和补集	3
1.1.4 幂集	3
习题	4
1.2 集合的基本运算	5
1.2.1 并和交	5
1.2.2 差和对称差	8
习题	12
1.3 包含排斥原理	13
习题	17
第 2 章 二元关系	18
2.1 二元关系及其表示形式	18
2.1.1 引言	18
2.1.2 集合的笛卡儿乘积	19
2.1.3 二元关系的三种表示方法	21
习题	24
2.2 二元关系的基本类型与判定方法	24
2.2.1 关系的基本类型	25
2.2.2 可传递性的判定方法	27
习题	32
2.3 等价关系、相容关系和偏序关系	33
2.3.1 等价关系的定义	33
2.3.2 等价关系的特征	33
2.3.3 等价类和商集	35
2.3.4 集合的划分	36
* 2.3.5 相容关系	37
* 2.3.6 覆盖和完全覆盖	38
* 2.3.7 相容类和最大相容类	38
2.3.8 偏序关系	40
习题	44
2.4 复合关系、逆关系和关系的闭包运算	46
2.4.1 复合关系	46
2.4.2 逆关系	50
2.4.3 关系的闭包运算	51
习题	53

第 3 章 函数	54
3.1 函数的定义与特殊函数	54
3.1.1 函数的定义	54
3.1.2 特殊函数	55
习题	57
3.2 复合函数与逆函数	58
习题	66
第 4 章 代数结构	67
4.1 代数系统	67
4.1.1 代数系统的基本概念	67
4.1.2 特殊运算与特殊元素	69
4.1.3 同构	75
4.1.4 同态	79
习题	84
4.2 半群与独异点	85
4.2.1 半群与子半群	85
4.2.2 独异点与子独异点	91
习题	94
4.3 群	95
4.3.1 群的定义	95
4.3.2 群的性质	98
习题	102
4.4 子群	104
4.4.1 子群的定义	104
4.4.2 群中元素的阶数	105
习题	110
4.5 循环群	111
4.5.1 循环群的定义	111
4.5.2 循环群的性质	112
习题	116
* 4.6 置换群	116
习题	123
4.7 陪集和拉格朗日定理	123
4.7.1 陪集	124
4.7.2 拉格朗日定理	124
习题	131
* 4.8 群同态	131
* 4.8.1 同余关系与商代数	131
* 4.8.2 同余与同态	136
* 4.8.3 群的同态与同余	139
习题	150
4.9 群码	151
4.10 环和域	155
4.10.1 环	155

4.10.2	域	160
习题	161
4.11	格和布尔代数	162
4.11.1	格的定义	162
4.11.2	格和偏序集	164
4.11.3	分配格、有界格和有补格	168
4.11.4	布尔代数	173
习题	177
第 5 章	图论	178
5.1	图的基本概念	178
5.1.1	图的基本类型	178
5.1.2	图中顶点的度数	179
5.1.3	完全图	181
5.1.4	子图	181
5.1.5	图的矩阵表示	182
5.1.6	图的同构	183
5.1.7	补图	184
习题	188
5.2	图的连通性和赋权图的最短通路	189
5.2.1	通路与回路	189
5.2.2	图的连通性	190
5.2.3	赋权图的最短通路	193
习题	201
5.3	树	202
5.3.1	无向树	202
5.3.2	有向树	204
5.3.3	周游算法	206
5.3.4	前缀码与最优树	208
习题	214
5.4	欧拉图与哈密顿图	215
5.4.1	欧拉图	215
5.4.2	哈密顿图	218
习题	226
5.5	二部图和平面图	228
5.5.1	二部图	228
5.5.2	平面图	231
习题	242
第 6 章	命题逻辑	243
6.1	命题与联结词	243
6.1.1	命题	243
6.1.2	联结词	244
习题	248
6.2	真值表与逻辑等价	249
6.2.1	真值表	249

6.2.2	逻辑等价	249
6.2.3	代换规则	251
6.2.4	对偶原理	253
	习题	253
6.3	范式	254
6.3.1	析取范式和主析取范式	254
6.3.2	合取范式和主合取范式	258
	习题	262
6.4	永真蕴含式	263
	习题	266
6.5	推理理论	266
6.5.1	前提与有效结论	266
6.5.2	直接证明法	268
6.5.3	间接证明法	268
	习题	271
第7章	谓词逻辑	273
7.1	谓词逻辑的基本概念	273
7.1.1	谓词与命题函数	273
7.1.2	量词	275
7.1.3	谓词合式	279
7.1.4	约束元和自由元	279
	习题	281
7.2	等价式与永真蕴含式	282
7.2.1	等价式	282
7.2.2	前束范式	284
7.2.3	永真蕴含式	285
	习题	287
7.3	谓词演算的推理理论	287
	习题	290
参考文献		291

第 1 章 集 合

集合论是由德国著名数学家康托于 19 世纪 70 年代创建的。由于集合的研究不依赖于构成集合的事物(元素)的具体特性,因此研究对象的广泛性成为集合论的重要特征,从而使集合论能渗透到现代数学的各个分支,成为现代数学的基础。集合论在计算机科学理论的研究中也有重要用途,在程序设计、形式语言、数据库、操作系统、并行处理等方面有着广泛的应用。

集合论的内容是极其丰富的,有早期的朴素集合论和后来的公理化集合论。本章主要介绍朴素集合论的基本内容,包括:什么是集合,以及有关子集、空集、全集、补集、幂集等基本概念,集合的基本运算和集合代数的有关公式,在组合计数中有着广泛应用的包含排斥原理等。

1.1 集合的基本概念

在数学理论的研究中,经常把概念分为原始概念和派生概念两种类型。其中派生概念是指可以由其他概念给出定义的概念,例如在平面几何中,正方形可以由邻边相等的矩形来定义;矩形则可以由内角为直角的平行四边形来定义等。原始概念是指无法由其他概念给出定义的概念,例如平面几何中的点、直线等。集合也是一种原始概念,无法给出精确的定义,只能给出说明性的描述。

集合就是具有某种特点的研究对象的聚合,其中每一个研究对象称为这个集合的元素。例如,当研究对象为大学生时,北京工业大学学生的全体可以构成一个集合,而北京工业大学的每一个学生就是这个集合中的一个元素。又如,在初等数论中,研究对象是整数,所以正整数全体或负整数全体都可以构成集合,且每一个正整数或每一个负整数分别是这两个集合中的元素。

一般用大写的英文字母 A, B, C, \dots 来代表集合;用小写的英文字母 a, b, c, \dots 来代表集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的元素,称 a 属于 A ,并记作

$$a \in A$$

如果 a 不是集合 A 中的元素,称 a 不属于 A ,并记作

$$a \notin A$$

1.1.1 集合的表示方法

集合有多种表示方法,下面介绍两种常用的表示方法。

1. 列举法

这种表示方法是把集合中的所有元素置于花括号内,元素之间用逗号隔开。如集合 A 含有 8 个元素,它们分别是 2,3,5,7,11,13,17,19。用列举法可把集合 A 表示成

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

易见, $5 \in A$, 但 $6 \notin A$ 。

2. 特征法

用特征法表示集合时,将以某个小写的英文字母来统一表示该集合的元素,并指出这类元素的共同特征。如

$$B = \{x \mid x \text{ 是素数}, x < 20\}$$

花括号内的符号“ \mid ”读作“系指”,花括号内的逗号读作“并且”。因此,集合 B 中的元素是一些素数,并且小于20;或者简单地说, B 是由小于20的素数组成的。实际上,集合 B 中的元素就是2,3,5,7,11,13,17,19。可见集合 B 和列举法中所提到的集合 A 的元素完全相同。

当两个集合 X 和 Y 的元素相同时,称这两个集合相等,记作 $X = Y$ 。

显而易见,上面提到的两个集合 A 和 B 是相等的,即 $A = B$ 。

1.1.2 子集

定义 1.1.1 设 A, B 是集合,如果 A 中每一个元素又都是 B 中的元素,则称 A 是 B 的子集,也称 B 包含 A 或 A 含在 B 中,记作

$$B \supseteq A \text{ 或 } A \subseteq B$$

如果 A 不是 B 的子集,即在 A 中至少有一个元素不属于 B ,则称 B 不包含 A 或 A 不含在 B 中,记作

$$B \not\supseteq A \text{ 或 } A \not\subseteq B$$

如果 A 是 B 的子集,但 A 和 B 不相等,也就是说,在 B 中总有一些元素不属于 A ,则称 A 为 B 的真子集,记作

$$B \supset A \text{ 或 } A \subset B$$

例如,集合 $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{1, 3, 5\}$, $R = \{2, 4\}$ 。易见集合 Q 和 R 都是 P 的子集,且都是真子集,即有 $P \supset Q$ 和 $P \supset R$ 。但 Q 不是 R 的子集, R 也不是 Q 的子集,所以有 $Q \not\supseteq R$ 和 $R \not\supseteq Q$ 。

由子集的定义,易得下列定理。

定理 1.1.1 集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是: $A \supseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

此定理在证明两个集合相等时,是一种有效而基本的方法。

不含有任何元素的集合称为空集,记作 \emptyset , 或 $\{\}$ 。

由空集的定义可知,空集是任何集合的子集。

集合中的元素就是我们的研究对象。集合也可以成为研究对象,因此一个集合成为另一个集合的元素是完全可能的。

例如,集合 $A = \{a, b, \{c, d\}\}$, 这表明集合 A 含有3个元素: $a, b, \{c, d\}$, 其中集合 $\{c, d\}$ 就是集合 A 的元素。

一般地讲,从属关系“ \in ”是元素和集合之间的关系;包含关系“ \supseteq ”则是集合和集合之间的关系。但由于集合也可以作为另一个集合的元素,所以存在着这样的情况:集合 A 含在集合 B 中,集合 A 又属于 B 。如

$$A = \{a, b\}$$

$$B = \{a, b, \{a, b\}\}$$

此时就有 A 既是 B 的子集,又是 B 中的元素,即有 $A \subset B$ 和 $A \in B$ 同时成立。

1.1.3 全集和补集

研究对象的全体称为全集,记作 U 。

例如,当我们研究世界妇女的生活状况时,研究对象可以是中国妇女,也可以是美国妇女、法国妇女等。但是,研究对象总是在世界妇女这一范围内,所以全世界妇女是研究对象的全体,它是一个全集。

又如,当我们研究自然数的特性时,所有自然数构成的集合就是全集。

全集和研究对象的范围密切相关。当我们研究的集合总是某个集合的子集时,这个集合就是全集。

下面介绍补集。

设 A 是集合,由属于全集 U 但不属于集合 A 的元素构成的集合称为 A 的补集,记作 \bar{A} (或 $\sim A$)。

例如,全集 U 是全体正整数构成的集合,若

$$A = \{x \mid x \text{ 是正偶数}\}$$

则 A 的补集

$$\bar{A} = \{x \mid x \text{ 是正奇数}\}$$

又如,全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 若

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

则 A 的补集

$$\bar{A} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

1.1.4 幂集

定义 1.1.2 设 A 是集合,由 A 的所有子集作为元素构成的集合称为 A 的幂集,记作 $P(A)$ 。

例如,集合 $A = \{a, b\}$, 则其幂集

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

又如,集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 则其幂集

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

当一个集合中的元素个数为有限时,称该集合为有限集;集合中的元素个数为无限时,称该集合为无限集。

有限集 A 中元素的个数称为有限集 A 的基,记作 $|A|$ 。如 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $|A| = 4$ 。

在上面提到的两个求幂集的例子中,容易看到,当集合 A 含有 2 个元素时,即 $|A| = 2$, 则其幂集 $P(A)$ 含有 4 个元素,即 $|P(A)| = 4$; 当集合 A 含有 3 个元素时,即 $|A| = 3$, 则其幂集 $P(A)$ 含有 8 个元素,即 $|P(A)| = 8$ 。在一般情况下,有下列结论。

定理 1.1.2 设 A 是有限集,且 $|A| = n$, 则其幂集的基 $|P(A)| = 2^n$ 。

证明 由排列组合的知识可知

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$$

又由二项式定理可知

$$(a + b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + \cdots + C_n^n \cdot b^n$$

若取 $a = b = 1$, 则有

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n$$

由此证得

$$|P(A)| = 2^n. \text{证毕。}$$

上述定理表明, 当集合 A 的基数逐步增长时, 幂集 $P(A)$ 的基数将以指数形式增长, 因此当集合 A 的基数比较大时, 写出其幂集 $P(A)$ 不仅冗长, 而且容易遗漏一些元素, 也不便于计算机处理。下面给出一种比较规范的书写幂集的方法。

由于当 $|A| = n$ 时, $|P(A)| = 2^n$, 因此 $P(A)$ 中的元素可以与 n 位二进制数序列 $00\cdots 0 \sim 11\cdots 1$ 建立一一对应关系, 通常把 $P(A)$ 中的元素写成含有下标的集合 A_k , 其中 k 是 n 位二进制数序列。具体的做法是:

首先把集合 A 中的 n 个元素确定排列顺序, 如 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 于是 $P(A)$ 中的元素 A_k 为这样的集合: 当二进制数序列 k 中的第 i 位为 1 时, 集合 A_k 含有元素 a_i , 否则集合 A_k 不含有元素 a_i 。

例如, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 其幂集 $P(A) = \{A_{000}, A_{001}, A_{010}, A_{011}, A_{100}, A_{101}, A_{110}, A_{111}\}$, 其中

$$\begin{aligned} A_{000} &= \emptyset \\ A_{001} &= \{a_3\} \\ A_{010} &= \{a_2\} \\ A_{011} &= \{a_2, a_3\} \\ A_{100} &= \{a_1\} \\ A_{101} &= \{a_1, a_3\} \\ A_{110} &= \{a_1, a_2\} \\ A_{111} &= \{a_1, a_2, a_3\} \end{aligned}$$

即有

$$P(A) = \{\emptyset, \{a_3\}, \{a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$$

【例 1.1】 设 $A = \{a, b, c, d\}$, 写出其幂集 $P(A)$ 。

解 把幂集 $P(A)$ 中的元素表示成下标集, 于是有

$$\begin{aligned} P(A) &= \{A_{0000}, A_{0001}, A_{0010}, A_{0011}, A_{0100}, A_{0101}, A_{0110}, A_{0111}, A_{1000}, A_{1001}, A_{1010}, \\ &A_{1011}, A_{1100}, A_{1101}, A_{1110}, A_{1111}\} \\ &= \{\emptyset, \{d\}, \{c\}, \{c, d\}, \{b\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{a\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \\ &\{a, c, d\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\} \end{aligned}$$

习题

1. 用列举法表示下列集合。

- (1) $\{x \mid x \text{ 是小于 } 15 \text{ 的正奇数}\}$
- (2) $\{x \mid x \text{ 是整数, } x^2 < 30\}$
- (3) $\{x \mid x \text{ 是中国的直辖市}\}$
- (4) $\{x \mid x = 3p, p \text{ 是小于 } 10 \text{ 的素数}\}$
- (5) $\{x \mid x \text{ 是能整除 } 30 \text{ 的正整数}\}$

2. 用特征法表示下列集合。

(1) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

(2) $\{a, e, i, o, u\}$

(3) $\{1, 3, 5, \dots, 99\}$

(4) $\{5, 10, 15, \dots, 100\}$

(5) $\left\{\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, 4\right\}$

3. 设 A, B, C 是集合, 确定下列命题是否正确, 并说明理由。

(1) 如果 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$

(2) 如果 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \in C$

(3) 如果 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \in C$

(4) 如果 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \subseteq C$

4. 确定下列命题是否正确?

(1) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(2) $\emptyset \in \emptyset$

(3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

5. 设 A, B, C 是集合

(1) 如果 $A \in B$ 且 $B \in C$, 是否必有 $A \in C$?

(2) 如果 $A \in B$ 且 $B \in C$, 是否必有 $A \in C$?

(3) 如果 $A \subset B$ 且 $B \in C$, 是否必有 $A \in C$?

6. 求下列集合的幂集。

(1) $\{2, 4, 6\}$

(2) $\{a, b, \{a, b\}\}$

(3) \emptyset

(4) $\{\emptyset\}$

(5) $\{0\}$

(6) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1.2 集合的基本运算

本节介绍 4 种常用的集合基本运算以及有关公式。

1.2.1 并和交

定义 1.2.1 设 A, B 是集合, 由属于集合 A 或者属于集合 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 和 B 的并, 记作 $A \cup B$, 也即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例如, $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

又如, $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d, e\}$, 则 $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ 。

集合的运算可以用文氏图形象地表示,在图 1.2.1 中,矩形表示全集 U ,两个圆分别表示集合 A 和 B ,阴影部分就是 $A \cup B$ 。

由集合并运算的定义可知,集合并运算具有以下性质。

- (1) $A \cup B = B \cup A$
- (2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- (3) $A \cup A = A$
- (4) $A \cup \emptyset = A$
- (5) $A \cup U = U$

定义 1.2.2 设 A, B 是集合,由属于 A, B 两集合的所有共同元素构成的集合,称为 A 和 B 的交,记作 $A \cap B$,也即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$$

例如, $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B = \{1, 3\}$ 。

又如, $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e\}$, 则 $A \cap B = \{c, d\}$ 。

集合的交运算的文氏图表示见图 1.2.2, 图中阴影部分就是 $A \cap B$ 。

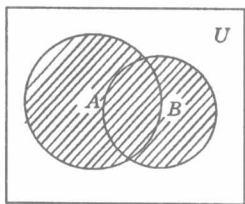


图 1.2.1

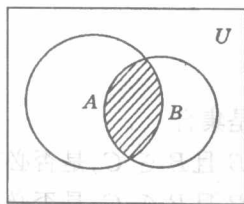


图 1.2.2

如果集合 $A \cap B = \emptyset$, 也即集合 A 和 B 没有共同元素, 则称 A, B 不相交。

例如, $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$, 则 $A \cap B = \emptyset$, 即 A 和 B 不相交。

由集合交运算的定义可知, 集合交运算具有以下性质。

- (1) $A \cap B = B \cap A$
- (2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (3) $A \cap A = A$
- (4) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- (5) $A \cap U = A$

并和交运算有着密切联系。

定理 1.2.1 设 A, B, C 是集合, 则下列分配律成立

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证明 只证第一等式, 第二等式的证明方法相同。首先证明

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

再证

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

从而利用定理 1.1.1 证得

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

要证明 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 也即证明 $A \cap (B \cup C)$ 是 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 的子集, 所以只需证明对于 $A \cap (B \cup C)$ 中的任意元素 x , 都有 x 也是 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 的元素。

对于任意的 $x \in A \cap (B \cup C)$, 即有 $x \in A$ 并且 $x \in B \cup C$; 也即 $x \in A$ 且 $x \in B$, 或者 $x \in A$ 且 $x \in C$; 于是有 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$, 所以 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 由此证得

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

再证

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

对于任意的 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 则 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$; 即有 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或者 $x \in A$ 且 $x \in C$; 也即有 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 所以有 $x \in A \cap (B \cup C)$, 由此证得

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

综上所述, 最后证得

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \text{证毕。}$$

上述定理的第一等式表明集合的交运算对并运算是可分配的; 第二等式表明集合的并运算对于交运算也是可分配的。

定理 1.2.2 设 A, B 是集合, 则

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

证明 由于 $A \cap U = A$, 所以

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (U \cup B) \\ &= A \cap U \\ &= A \end{aligned}$$

同样可证 $A \cap (A \cup B) = A$. 证毕。

定理 1.2.2 称为吸收律。

上一节曾介绍了补集, 由补集的定义可知: $A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \emptyset$, 且可以证明其逆为真。

定理 1.2.3 设 A, B 是集合, 如果 $A \cup B = U$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则 $B = \bar{A}$ 。

证明 由交运算性质可知

$$\begin{aligned} B &= B \cap U \\ &= B \cap (A \cup \bar{A}) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) \\ &= \emptyset \cup (B \cap \bar{A}) \\ &= (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) \\ &= (A \cup B) \cap \bar{A} \\ &= U \cap \bar{A} \\ &= \bar{A}. \text{证毕。} \end{aligned}$$

定理 1.2.4 设 A, B 是集合, 则

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

证明 先证第一等式。要证明 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, 即证 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 是 $A \cup B$ 的补集。由于

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) &= (A \cup B \cup \overline{A}) \cap (A \cup B \cup \overline{B}) \\ &= U \cap U \\ &= U \\ (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) &= (A \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

由定理 1.2.3 可知, $\overline{A} \cap \overline{B}$ 是 $A \cup B$ 的补集, 即有 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, 证毕。

第二等式的证明可仿照第一等式的证明方法, 或利用第一等式的结论来证明。因为

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

所以

$$\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$$

定理 1.2.4 就是著名的摩根律。

推论 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是集合, 则

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n} \\ \overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} &= \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n} \end{aligned}$$

【例 1.2】 设 A, B 是集合, 证明下列等式。

- (1) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
- (2) $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = A \cup B$
- (3) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$

证明 (1) 由分配律可知

$$\begin{aligned} A \cup (\overline{A} \cap B) &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) \\ &= U \cap (A \cup B) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap (A \cup \overline{A})) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap U) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) &= ((A \cap B) \cup \overline{A}) \cap ((A \cap B) \cup \overline{B}) \\ &= (A \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B}) \\ &= U \cap (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) \cap U \\ &= (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \end{aligned}$$

1.2.2 差和对称差

定义 1.2.3 设 A, B 是集合, 由所有属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 减 B 的差, 记作 $A - B$, 即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$