● 刘利新　主编

Sixth Grade

小学奥数教程（六年级）

Mathematical Olympiad

◆含视频教学光盘

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY　http://www.phei.com.cn

小学奥数教程（六年级）

刘利新　主编
高翠翠　李禅平　胥海涛　参编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是作为小学六年级学生课余时间学习奥林匹克数学的教材编写的。作者均为多年从事数学奥林匹克教学的一线教师。全书按照六年级学生上、下两学期的内容编写，可供六年级两学期使用。每学期内容分为 14 个单元和 1 个综合练习，每周 3 课时，15 周至 18 周可进行完。题目的选择有一定梯度，可供不同程度学生选择使用。

本书有配套光盘，可供学生及相关教师使用。

图书在版编目（CIP）数据

小学奥数教程. 六年级 / 刘利新主编.—北京：电子工业出版社，2009.7
ISBN 978-7-121-09260-2

I. 小… II. 刘… III. 数学课—小学—教学参考资料 IV.G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 118147 号

策划编辑：蔡　葵
责任编辑：沈桂晴
印　　刷：北京机工印刷厂
装　　订：三河市鹏成印业有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：900×1280　1/32　印张：8.25　字数：253 千字
印　　次：2009 年 7 月第 1 次印刷
印　　数：5000 册　定价：25.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。
服务热线：（010）88258888。

前言

随着知识经济时代的到来，人类社会信息化、全球化程度越来越高，我们的未来一代怎样才能够应对这种新的局面呢？学会学习，学会创新，全面提高自身素质将成为主旋律。

数学教育家米山国藏说：“学生们在初中或高中所学到的数学知识，在进入社会后，几乎没有什么机会应用，因而这种作为知识的数学，通常在出校门后不到一年就忘记了，然而不管他们从事什么业务工作，那种铭刻于头脑中的数学精神和数学方法，却长期地在他们的生活和工作中发挥着重要作用。”

可见，数学教育的意义不在于或主要不在于培养数学家，而在于培养人的数学观念和数学思想，通过开拓头脑中的数学潜能，促进人的全面素质的提高。

奥林匹克数学，不同于以传授知识为主的教学方式，以开放性、创造性的思维模式，吸引了众多爱好数学的孩子们。同时，数学奥林匹克又是传统数学教学有益的补充，可以起到激发兴趣、开拓思路、提高能力、扩展知识等多种作用。

另外，通过网络开展网上教学也是信息化时代发展的必然趋势。如何使课堂教学与网络教学相结合，利用网络技术增加教学的趣味性，做到真正的寓教于乐，也是需要探索的新课题。

为此目的，作者的个人主页 www.liulixin.org 提供了数学题库，题目配有文字解答和视频讲解，可供学生及相关教师在线学习。

不同于基础知识教学的方面是，本教材更注重题目的分析处

理，而非理论讲解。题目本身是载体，通过对题目的分析去学习一种思考方法。因此，对题目的选取，我们经过多年实践经验的检验，本着学生好接受、能理解的原则，进行了认真处理，合理搭配。

本书有配套光盘，可供学生及相关教师使用。配套光盘对部分例题和习题进行了视频讲解，很多视频讲解是我们的课堂实录，可以使学生有置身课堂的现场感，通过教师与学生的互动，达到寓教于乐的目的，使学生更容易理解。

书中凡题后标注“视频”者，都配有视频，可在相应视频文件中找到，供同学们学习参考。

作　者

2009 年 5 月

目 录

第1讲 找规律

知识要点

本讲主要学习以下三个方面的知识：

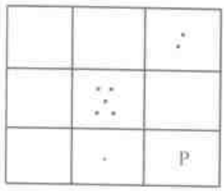
1．分数列找规律；

2．数表找规律；

3．图形找规律．

经典题再现

我国古代的“河图”是由 3×3 的方格构成的，每个方格内均有数目不同的点图，每一行、每一列以及每一条对角线上的三个点图的点数之和均相等．下图给出了“河图”的部分点图，请你推算出 P 处所对应的点图是下面四种图形中的哪一种？（**视频**）



A　　　　B　　　　C　　　　D

解：这个题是以图形表示的 3 阶幻方问题．

我们要将 1 到 9 填入 9 个方格中，使每行、每列、每条对角线的和相等．

$(1+2+3+\cdots+9)\div3=15$．

所以，对角线三个数和为 15，左下角数为 $15-2-5=8$．

再看最后一行，$8+1+P=15$，$P=6$．

所 P 处应填 6 个点的图，即 C 图．

典型例题

1. 分数列找规律

【例 1】 给定数列$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\cdots$

（1）$\frac{7}{15}$是数列的第几项？

（2）该数列的第 20 项是几？

（3）求前 20 项之和.（**视频**）

解：观察所给数列，它有这样一个规律：如果将数列分组为

$$\left(\frac{1}{1}\right),\ \left(\frac{2}{1},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right),\ \cdots$$

则每一组中各数的分子与分母的和是相等的；第一、二、三、四、…项分别有 1,2,3,4，…个分数；第二组的 2 个分数，分子顺次是 2,1，分母顺次是 1,2；第三组的 3 个分数，分子顺次是 3,2,1，分母顺次是 1,2,3；第四组的 4 个分数，分子顺次是 4,3,2,1，分母顺次是 1,2,3,4,…于是：

（1）$\frac{7}{15}$在第 $7+15-1=21$（组），且是这个组中的第 15 个数．而前 20 组中所含分数总共有 $1+2+3+\cdots+20=\frac{(1+20)}{2}\times 20=210$（个），

则$\frac{7}{15}$位于原数列的第 $210+15=225$（项）.

（2）欲求该数列的第 20 项，应先确定第 20 项所在的组，因为

$$1+2+3+4+5=15,$$
$$1+2+3+4+5+6=21,$$

因此第 20 项位于第 6 组，而且是这个组的倒数第 2 个分数，它是$\frac{2}{5}$.

（3）由上知第 20 项在第 6 组，由于前 20 项的分数的分子与分母之和不大于 7．我们可以将这些分数重新分组以便计算：

分母为 1 的，分子可为 1,2,3,4,5,6；

分母为 2 的，分子可为 1,2,3,4,5；

分母为 3 的，分子可为 1,2,3,4；

分母为 4 的，分子可为 1,2,3；

分母为 5 的，分子可为 1,2；

分母为 6 的，分子可为 1，但它是第 21 项．

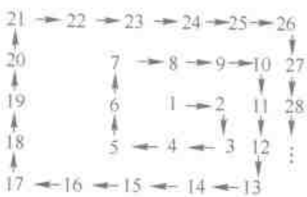
因此前 20 项的和是

$$(1+2+3+4+5+6)+\frac{1}{2}\times(1+2+3+4+5)+\frac{1}{3}\times(1+2+3+4)+\frac{1}{4}\times(1+2+3)$$

$$+\frac{1}{5}\times(1+2)=21+\frac{1}{2}\times15+\frac{1}{3}\times10+\frac{1}{4}\times6+\frac{1}{5}\times3=33\frac{14}{15}.$$

2. 数表找规律

【例 2】 自然数按从小到大的顺序排成正方螺旋形，如下图所示，在 2 处拐第 1 个弯，在 3 处拐第 2 个弯，在 5 处拐第 3 个弯，…问拐第 20 个弯的地方是哪个数？（视频）



解：观察上图，先将拐弯处的数从小到大排列起来，即 2,3,5,7,10,13,17,21,26,…仔细观察这些数，第一个数是起点 1 加 1，第二个数是第一个数加 1，第三个数是第二个数加 2，第四个数是第三个数加 2，后面的四个数都可以用各自前面的那个数分别经过加 3、加 3、加 4、加 4 得到，由此推想出，再往后就要加 5、加 5、加 6、…可以发现一个规律，即

第 2 个拐弯处的数为 $1+1\times2$；

第 4 个拐弯处的数为 $1+(1+2)\times2$；

第 6 个拐弯处的数为 $1+(1+2+3)\times2$；

…

经分析、归纳可知，当拐弯数是偶数时，此拐弯处的数为从 1 开始的连

续自然数的和的 2 倍与 1 的和，而连续自然数的个数（或者说最后一个数）正好是拐弯数的一半.

设拐弯数是 n（n 是偶数），则拐弯处的数是 $1+(1+2+3+\cdots+\frac{n}{2})\times2$，

因此第 20 个拐弯处的数应该是

$1+(1+2+3+4+5+\cdots+10)\times2=111$

答：拐第 20 个弯的地方的数是 111.

【例 3】 世界上著名的莱布尼茨三角形如下图所示.

$$\frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{7}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{140}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{7}$$

则排在第 10 行从左边数第 3 个位置上的数是（　　）.（视频）

A. $\frac{1}{132}$　　B. $\frac{1}{360}$　　C. $\frac{1}{495}$　　D. $\frac{1}{660}$

解：本题是规律探究题，难度比较大，考察探究数的规律.

根据给出的部分莱布尼茨三角形中的数可以发现：第 n 行的第 1 个数就是行数分之一$\left(\frac{1}{n}\right)$，这个容易发现. 第 2 个数是$\frac{1}{n\times(n-1)}$，这个也不难. 第 3 个数是$\frac{1}{n\times(n-1)\times(n-2)\div2}$，因此可知：排在第 10 行从左边数第 3 个位置上的数是$\frac{1}{10\times(10-1)\times(10-2)\div2}=\frac{1}{360}$，所以答案选择 B.

【例 4】 某资料室在计算机使用中，如下表所示以一定规则排列的编码，且从左至右以及从上到下都是无限的.

1	1	1	1	1	1	…
1	2	3	4	5	6	…
1	3	5	7	9	11	…
1	4	7	10	13	16	…
1	5	9	13	17	21	…
1	6	11	16	21	26	…
…	…	…	…	…	…	…

此表中，第 100 行、100 列上的数是几？100 共在表中出现多少次？（视频）

解：我们观察数表的规律，

第 1 行是首项为 1，公差为 0 的等差数列；

第 2 行是首项为 1，公差为 1 的等差数列；

第 3 行是首项为 1，公差为 2 的等差数列，

…

第 100 行是首项为 1 公差为 99 的等差数列．

所以，第 100 行的第 100 个数为 $1+99\times 99=9802$．

如前总结，

第 m 行，第 n 列的数为首项为 1，公差为 $m-1$ 的等差数列，

$100=1+(n-1)\times(m-1)$，

$99=(m-1)\times(n-1)$．

$99=1\times 99=3\times 33=9\times 11$．

(2,100)表示第 2 行，第 100 列，则

(2,100)，(100,2)，(4,34)，(34,4)，(10,12)，(12,10)六个位置上的数为 100．

即 100 出现 6 次．

3. 图形找规律

【例 5】 用 10 枚棋子可以摆出一个正三角形点阵，每边 4 枚棋子，如图（a）所示；用 9 枚棋子可以摆出一个正方形点阵，每边 3 枚棋子，如图（b）所示．今有一堆棋子，其总数小于 200，用这堆棋子摆出一个尽可能大的正三角形点阵，结果多出 13 枚；用这堆棋子摆出一个尽可能大的正方形点阵，结

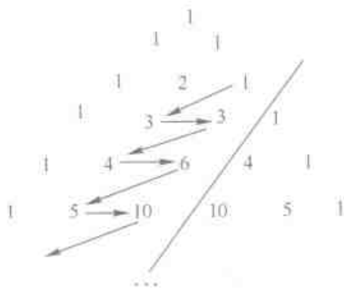
果还差 11 枚．问这个尽可能大的正三角形点阵每边上有多少枚棋子？这堆棋子共有多少枚？（视频）

（a）　　　　（b）

解：用这堆棋子摆成边长尽可能大的正三角形点阵，结果多出 13 枚，说明正三角形每边上的棋子不少于 13 枚，否则可以再加一行，所以这堆棋子必定大于 $1+2+3+\cdots+12+13+13=104$ 从而最大正方形点阵每边上的棋子数大于 10.

因为 $15\times15-11=214>200$，因此最大正方形每边上棋子数只能是 11,12,13,14．验算可知最大正方形点阵每边上的棋子数为 12，此时共有棋子 $12\times12-11=133$（枚），$133-13=120$，而 $1+2+3+\cdots+15=120$，所以最大正三角形点阵每边上的棋子数为 15 枚.

【例 6】 如右图所示，在杨辉三角中，斜线 L 的上方从 1 开始按箭头所示的数组成一个锯齿形数列 1,3,3,4,6,5,10,⋯求这一列数的第 21 项是几？（视频）



解：除第 3 行以外，每行都是 2 个数．则第 21 项在

$$10\text{ 行}\begin{cases}\text{第 3 行：1 个数；}\\\text{第 4 行：2 个数；}\\\text{第 5 行：2 个数；}\\\cdots\\\text{第 13 行：2 个数.}\end{cases}$$

共 21 个数.

所以，第 21 项是第 13 行的第 3 个数.

我们只需写出杨辉三角每一行的前三个数，就可以找到答案.

杨辉三角每一行的第 1 个数都是 1，第 2 个数是行数减 1；

第 3 个数是第 2 个数乘以该数减 1 再除以 2.

例如：第 4 行第 3 个数为 $3\times2\div2=3$；

第 5 行第 3 个数为 $4\times3\div2=6$，

第 6 行第 3 个数为 $5\times4\div2=10$，

…

按此规律，第 13 行第 3 个数是 $12\times11\div2=66$.

答案：66.

难题精讲

将正整数列成下表：

1	2	4	7	11	…
3	5	8	12		…
6	9	13			…
10	14				…
15					…
…					…

① 求位于第 5 行第 7 列的数；

② 数字 80 位于第几行第几列？（视频）

解：① 水平方向看每一个数列 1,2,4,7,11,…从第 2 个数开始，每个数分别是前面的数加 1,加 2,加 3,…

3,5,8,12,…从第 2 个数开始，每个数分别是前面的数加 2,加 3,加 4,…

6,9,13,…从第 2 个数开始，每个数分别是前面的数加 3,加 4,加 5,…

按此规律，第 5 行第 1 个数是 15，后面的数依次是 15+5,15+5+6,15+5+6+7+…

那么，第 5 行的第 7 个数是 $15+5+6+7+8+9+10=60$.

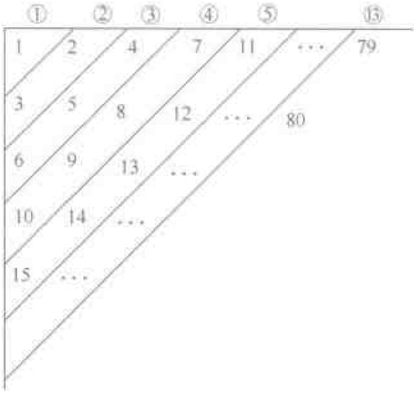
② 以斜线方向看数表：

第 1 斜行为 1；

第 2 斜行为 2,3；

第 3 斜行为 4,5,6；

第 4 斜行为 7,8,9,10.



我们看 80 在第几斜行.

$1+2+3+\cdots+12=78$,

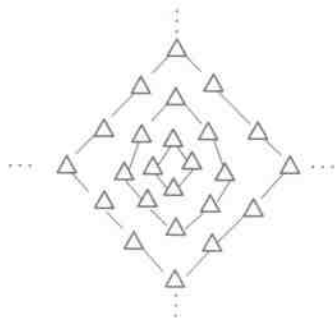
即前 12 斜行用到 78.

第 13 斜行从 79 开始，接下来是 80.

所以，80 在表中第 2 行第 12 列.

同步练习

1. 有一串真分数，按下面方法排列 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, …问第 1001 个分数是什么？（视频）



2. 右图中的三角形是有规律地从里到外逐层排列的. 则第 n 层（n 为正整数）三角形的个数是（　　）.（视频）

A. $4n-4$　　B. $4n$

C. $4n+4$　　D. n^2

3. 将自然数按如下顺序排列：

1	2	6	7	15	16	…
3	5	8	14	17	…	

4　　9　　13　…

10　12　…

11　…

在这样的排列下，3 排在第 2 行第 1 列，13 排在第 3 行第 3 列．问：1993 排在第几行第几列？

4．右面是一个由数字组成的三角形，试研究它的组成规律，从而确定其中的 x 等于多少．（视频）

1

0　1

1　1　0

0　1　2　2

5　5　4　2　0

0　5　10　14　16　16

61　61　56　46　32　16　0

·　·　·　x　·　·　·　·

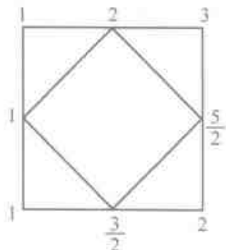
5．有一串分数 $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4},\cdots$ 从左开始数，第几个分数是 $\frac{11}{11}$？（视频）

6．数列 $\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{5}{9},\frac{7}{12},\frac{3}{5},\frac{11}{18},\cdots$ 是按某种规律排列的，问数列中第 2000 个分数是几．（视频）

a	b	c
d	e	f
g	h	m

7．如左图所示，3×3 的正方形，每一方格内的字母都代表某一个数，已知每行、每列及每条对角线上三个数之和都相等，若 $a=3$，$d=12$，$m=15$，求 b 和 h 代表的数．

8．如右图所示，给正方形的四个顶点标上数字 1,1,2,3 记为第一个正方形，依次取各边中点，标上所在边两端点数字和的一半：$1,\frac{3}{2},\frac{5}{2},2$．顺次连接这四个点，得一个新的正方形，记为第二个正方形．照此规律做下去，求前 10 个正方形各顶点数字和．



同步练习解答

1．寻找规律可知以 2 为分母的数有 1 个，以 3 为分母的数有 2 个，…

而 $1+2+\cdots+44=990$，$1+2+\cdots+45=1035$，

∴第 1001 个数的分母为 46，而 $1001=990+11$，

∴第 100 个分数是分母为 46 的分数中左起第 11 个数，

∴它的分子是 11，

∴ $\frac{11}{46}$ 为所求真分数.

2．此题为找规律题，要求考生要有敏锐的观察能力和缜密的思维加工能力，第 1 层每条边上有 2 个三角形，但每个角上的三角形都算了两次，所以一共有 $4\times2-4=4$（个）．同样第 2 层有 $4\times3-4=8$（个），第 3 层有 $4\times4-4=12$（个）．依次类推，第 n 层一共有 $4\times(n+1)-4=4n$（个）三角形．故选 B.

3．我们看到，这些数的排列规律为斜着写，为了方便，我们把 1 称作第一斜行，2,3 叫做第二斜行，4,5,6 为第三斜行，那么，由于 $1+2+3+4+5+6+\cdots+62=1953$，与 1993 最接近，而 $1993-1953=40$．即 1993 为写完第 62 斜行后又写了 40．又由于奇数斜行是从左下写到右上，偶数斜行是从右上写到左下，故第 63 斜行是从左下写到右上，第一个数为 1954 为第 63 行第 1 列；1955 便为第 62 行第 2 列，…

故 1993 便为第$(63-40+1)=24$ 行，第$(1+40-1)=40$ 列.

4．我们发现，偶数行左面有 0，奇数行右面有 0，那么偶数行便是从左面开始写的，比如说第六行，$5=0+5$，$10=5+5$，$14=10+4$，$16=14+2$，$16=16+0$，每个数均为左面的数和左上角的数之和.

同理，奇数行便是从右面开始写的，比如说第 7 行，$16=16+0$，$32=16+16$，$46=14+32$，$56=10+46$，$61=5+56$，$61=0+61$，每个数均为右面的数和右上角的数之和．所求的为偶数行，故 x 所在行左面第 1 个数为 0，其他的依次为 $0+61=61$，$61+61=122$，$122+56=178$，故 $x=178$.

5．分组．分母为 1 的第 1 组：$\frac{1}{1}$；

分母为 2 的第 2 组：$\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{1}{2}$；

分母为 3 的第 3 组：$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$；

分母为 4 的第 4 组：$\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4}$；