全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

胡于进 王璋奇 编著
Hu Yujin Wang Zhangqi

# 有限元分析及应用

# Finite Element Analysis and Applications

http://www.tup.com.cn

清华大学出版社

全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材

# 有限元分析及应用

# Finite Element Analysis and Applications

胡于进 王璋奇 编著

Hu Yujin Wang Zhangqi

清华大学出版社

北京

## 内容简介

有限元法是求解工程科学中数学物理问题的一种通用数值方法。本书介绍有限元法的基本原理、建模方法及工程应用，强调理论与实践的结合。全书包括两篇共16章，第1篇由第1～10章组成，介绍有限元法的基本理论和方法，内容包括：有限元法基本理论、平面问题、轴对称问题和空间问题、杆梁结构系统、薄板弯曲问题以及热传导问题、结构动力学问题、非线性问题的有限元法。第2篇由第11～16章组成，介绍有限元建模技术及基于ANSYS的有限元分析工程应用，内容包括：有限元建模的基本流程、模型简化技术、网格划分技术、边界条件处理与模型检查以及基于ANSYS的有限元分析工程应用实例。

考虑到面向工程硕士和工程技术人员的特点，本书力求使理论和实际应用有机地结合起来，突出概念、简练易懂，可操作性强。书中提供了大量图示说明和工程实例，以求直观易读。

本书可作为高等学校工科类研究生、本科生的教材，也可作为相关专业工程技术人员和研究人员的学习参考书。



**图书在版编目(CIP)数据**

有限元分析及应用/胡于进，王璋奇编著. —北京：清华大学出版社，2009.4
(全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材)
ISBN 978-7-302-19111-7

Ⅰ. 有…　Ⅱ. ①胡…　②王…　Ⅲ. 有限元分析—研究生—教材　Ⅳ. O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第197106号

**责任编辑**：庄红权　赵从棉
**责任校对**：刘玉霞
**责任印制**：王秀菊
**出版发行**：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
**社　总　机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质　量　反　馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 刷 者**：北京四季青印刷厂
**装 订 者**：三河市溧源装订厂
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：185×230　**印　张**：24.5　**字　数**：536千字
**版　　次**：2009年4月第1版　　**印　　次**：2009年4月第1次印刷
**印　　数**：1～5000
**定　　价**：39.80元

---

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：021148-01

# 前言

有限元法(FEM)作为一种通用的数值计算方法,从 20 世纪 50 年代发展至今,以其理论基础坚实、通用实用性强等优点,被广泛应用于工程实际的数值仿真。其应用范围已从最初的固体力学和结构分析领域扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学等领域,从简单的静力分析发展到动态分析、非线性分析、多物理场耦合分析等复杂计算。尤其是随着计算机辅助技术的快速发展和各种成熟的有限元软件产品得到广泛应用,有限元法连同计算机辅助设计(CAD)和计算机辅助制造(CAM)已成为数字化设计与制造技术的核心,被公认为是提高产品及工程设计质量和效率的最有效工具。目前,已被普遍列为工科院校机械工程、工程力学、土木工程等众多专业的研究生必修课程和本科选修课程。

本书是全国工程硕士专业学位教育指导委员会推荐教材。全书力图全面、系统地介绍有限元法的基本概念、基础理论、有限元建模方法及工程实际应用,使理论和实际应用有机地结合起来,让读者不仅对有限元理论方法有较全面的了解,更重要的是学会如何使用有限元法解决实际问题。本书分为两篇,第一篇由第 1～10 章组成,介绍有限元法的基本理论和方法;第二篇由第 11～16 章组成,介绍有限元建模基本技术及基于 ANSYS 软件的工程应用。具体内容为:第 1,2 章介绍有限元法的理论基础,包括有限元法的基本思想、基础理论及有限元解的特性;第 3～10 章介绍线弹性力学问题、非线性弹塑性问题及温度场问题的有限元法,包括平面问题、轴对称问题和空间问题、杆梁结构系统、薄板弯曲问题、等参单元与数值积分、动力学问题、温度场问题以及非线性弹塑性问题;第 11～14 章介绍有限元建模技术,包括有限元模型构成、有限元建模基本流程、模型简化技术、有限元网格划分技术、边界条件的处理及模型检查等;第 15,16 章介绍 ANSYS 软件的基本应用和基于 ANSYS 软件的有限元分析工程应用实例,包括 ANSYS 软件介绍、ANSYS 应用案例及基于 ANSYS 的工程应用。

考虑到面向工程硕士和工程技术人员的特点,本书力求突出概念、简练易懂,可操作性强,书中提供了大量图示说明和实例,以求直观易读。同时,为了便于读者深入学习,对有限元法有较全面的了解,对必要的数学力学基础方面做了简要的介绍。

本书第 1～5 章、第 10～15 章由华中科技大学胡于进编写,第 6～9 章由华北电力大学王璋奇编写,第 16 章由胡于进和王璋奇共同编写;华中科技大学王学林教授对全书进行了

仔细审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。

在本书的编写过程中，参考了大量论文和专著以及相关网页资料，同时，本书提供的实例大多来源于作者科研工作中的部分内容，相关人员也曾参与其工作，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在不妥甚至错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

2008 年 12 月

# 目录

## 第一篇 有限元法

# 第一篇

# 有限元法

# 第1章 绪论

有限元法是求解微分方程边值问题的一种通用数值方法。本章首先介绍物理问题的几种数学描述，它是有限元法的求解对象；进而通过分析比较几种不同的数值计算方法，引入有限元法的基本思想和发展过程；最后，介绍有限元法的特点及应用。

## 1.1 物理问题的描述与求解

### 1.1.1 物理问题的数学描述

#### 1. 微分方程形式

在科学技术领域内，许多物理问题都可抽象为基本方程（微分方程）和相应定解条件所描述的数学模型，如固体力学中的位移场和应力场分析、传热学中的温度场分析、流体力学中的流场分析、电磁学中的电磁场分析、工程结构的振动特性分析等。图 1-1(a)所示为受均匀载荷作用的等截面悬臂梁，由材料力学可知，悬臂梁挠度 $y$ 的数学描述为

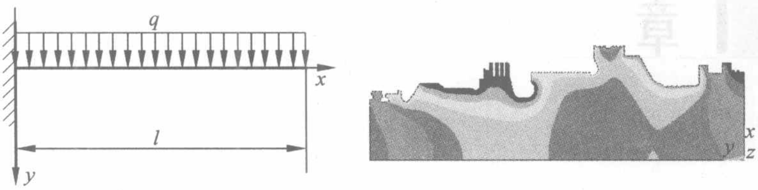
$$EI\,\frac{\mathrm{d}y^4}{\mathrm{d}x^4}=q \tag{1-1}$$

边界条件为

$$y\,|_{x=0}=0,\quad y'\,|_{x=0}=0,\quad y''\,|_{x=l}=0,\quad y'''\,|_{x=l}=0 \tag{1-2}$$

式中，$q$ 为作用于梁上的分布载荷；$E$ 为梁材料的弹性模量；$I$ 为梁截面对型心主轴的惯性矩。又如图 1-1(b)所示结构内温度分布问题，由传热学可知，描述三维结构内部温度分布 $T(x,y,z,t)$ 的微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\bar{Q}=\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1-3}$$




(a) (b)

**图 1-1 物理问题**

(a) 受均布载荷的悬臂梁；(b) 结构温度场

初始温度场可以是不均匀的，但各点温度值是已知的，可表示如下：

$$T\big|_{t=0} = T_0(x,y,z) \tag{1-4}$$

通常热边界条件有三种，第三类边界条件形式如下：

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_f) \tag{1-5}$$

以上各式中，$\lambda$ 为热传导系数，$\rho$ 为物质的质量密度，$c$ 为物质比热，$Q$ 为热源密度，$h$ 为热交换系数，$T_f$ 为边界上的温度值。

这里，如果温度场函数 $T$ 只是坐标的函数，则上述描述称为稳态热传导方程；如果传热固体材料的有关系数是和温度无关的常数且热源也与温度无关，则称其为线性热传导方程。式(1-3)～式(1-5)是热传导问题的一般性描述。

上述微分方程及边界条件的一般形式可以表示为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} A_1(\boldsymbol{u}) \\ A_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad (\text{在域}\ \Omega\ \text{内}) \tag{1-6}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} B_1(\boldsymbol{u}) \\ B_2(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad (\text{在边界}\ \Gamma\ \text{上}) \tag{1-7}$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 是待求解的未知函数。$\boldsymbol{u}$ 可以是标量场（如温度），也可以是由若干变量组成的向量场（如位移场、应力场）。$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为对于独立变量（如坐标、时间）的微分算子。区域 $\Omega$ 可以是体积域、面积域等，$\Gamma$ 是域的边界，如图 1-2 所示。上述方程可以是单个方程，也可以是一组方程。这种在区域 $\Omega$ 内由控制微分方程定义、在包围区域 $\Omega$ 的边界 $\Gamma$ 上由边界条件定义的数学模型通常称为边值问题，并通常称这种以微分方程形式提出问题的方法为定解问题的微分方程提法。

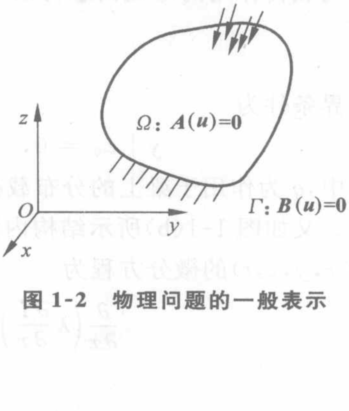



**图 1-2 物理问题的一般表示**

**2. 微分方程的等效积分形式**

现在研究微分方程的等效积分形式。由于微分方程(1-6)在域 $\Omega$ 内每一点都必须为零,所以有

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} (v_1 A_1(\boldsymbol{u}) + v_2 A_2(\boldsymbol{u}) + \cdots) \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1-8}$$

其中,$\boldsymbol{V}=[v_1 \quad v_2 \quad \cdots]^{\mathrm{T}}$ 为函数向量,是一组和微分方程个数相等的非负函数,称为权函数。不难证明,式(1-8)是与微分方程(1-6)完全等效的积分形式,即如果式(1-8)成立,则式(1-6)必成立。如果 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})$ 在 $\Omega$ 内同号,则 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})$ 在域内恒正或恒负;如果 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})$ 在 $\Omega$ 内不全部同号,则取正值对应的 $V_i$ 为正,负值对应的 $V_i$ 为零,则结果为正。

同理,假设边界条件方程(1-7)在边界上每一点都得到满足,对于一组任意可积(在 $\Gamma$ 上)函数 $\bar{\boldsymbol{V}}$,下式应当成立:

$$\int_{\Gamma} \bar{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma} (\bar{v}_1 B_1(\boldsymbol{u}) + \bar{v}_2 B_2(\boldsymbol{u}) + \cdots) \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-9}$$

因此,可得与微分方程和边界条件等效的积分形式:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-10}$$

式(1-10)称为微分方程(1-6),(1-7)的等效积分形式。

在很多情况下,式(1-10)中的积分是可以计算出来的。假设函数 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{V},\bar{\boldsymbol{V}}$ 连续且积分存在,则对式(1-10)进行分部积分可得到等效积分的另一种形式:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(v) \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\bar{v}) \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1-11}$$

其中 $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$ 是比 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 阶次低的微分算子。通常称式(1-11)为微分方程(1-6)和边界条件(1-7)的弱形式。由于分部积分缘故,式(1-11)中对函数 $\boldsymbol{u}$ 的导数阶次比式(1-10)中的低,也就是说,使用等效积分的弱形式时对函数 $\boldsymbol{u}$ 的连续性要求降低了。相对而言,定解问题的微分方程称为强形式,强形式要求函数 $\boldsymbol{u}$ 必须可微,且可微的次数至少必须等于微分方程的次数。对于实际的工程问题,强形式的微分方程的精确解常常很难得到,因为原始微分方程对解提出了过分"平滑"的要求,而弱形式的积分方程由于降低了对函数连续性的要求,更能逼近真实解。实际上,这种降低函数 $u$ 连续性的要求是以提高权函数 $\boldsymbol{V},\bar{\boldsymbol{V}}$ 的连续性为代价的。

科学研究和工程技术中的很多物理问题都可根据专业知识抽象出类似上述形式的数学描述,这是解决物理问题极其关键的第一步。只有建立了所研究物理问题的数学描述,然后,才能应用数学理论和方法分析求解,进而为物理问题的深入解决提供数据支持和决策支持。物理问题的数学描述可以表示为微分形式,也可以表示为积分形式,统称为基本方程,其目的是便于其后的数学求解。通常称物理问题的这种数学表示为所描述问题的数学模型,而原始的物理问题称为物理模型。

### 1.1.2 数学问题的数值求解方法

有关上述数学问题的求解长期以来一直是困扰科技工作者的难题，这类数学模型或是由于方程特征的非线性性质，或是由于求解域几何形状复杂，很难求得问题的解析解，只有少数简单问题能得到精确解答。解决这类问题的策略通常有两种。一是引入简化假设，将基本方程和定解条件简化为能够处理的问题，从而得到问题在简化状态下的解析解。这种方法只能在有限的情况下可行，因为过分简化会导致不正确甚至错误的解答。二是数值计算，求解数学模型在求解域上满足要求的近似解，这类解只在有限个离散点（或区域）上满足基本方程和边界条件。即把求解无限自由度的解析解问题变成求解有限个自由度的数值解问题。随着计算机技术的飞速发展，数值计算方法已逐渐成为求解这类数学问题的主要途径。

根据实现数值计算的近似原理不同，这类数学问题的数值计算方法可分为基于微分近似的求解法，如差分法；基于微分方程的等效积分形式的求解法，如加权残值法；基于泛函变分原理的求解法，如里兹法。有限元法也是一种数值计算方法，它是在继承和综合差分法和里兹法的基础上而发展起来的一种有效方法，其数学原理是泛函变分原理或加权残值法。因为有限元法不仅可像里兹法一样基于泛函变分原理导出，也可更一般地基于加权残值法导出，具体表现为伽辽金残值法。为了便于理解有限元法基本的思想，这里对几种典型的数值方法的基本思想及特点进行简要介绍。

**1. 差分法**

差分法的基本思想是将问题求解域划分为均匀的差分网格，用有限个网格节点代替连续的求解域。基于 Taylor 级数展开等方法，把描述问题的微分方程中的微分用网格节点上的函数值的差分来代替，从而将微分方程转化为以网格节点上函数值为未知数的代数方程组。该方法是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值解法，数学概念直观，表达简单，是发展较早且比较成熟的数值方法。

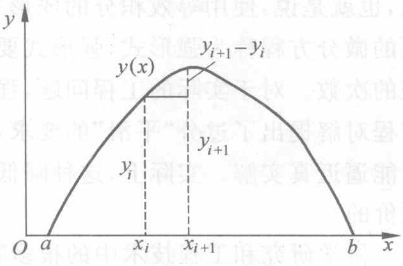



**图 1-3 一维问题有限差分**

其原理可用如图 1-3 所示的一维边值问题进行说明。假设问题的数学描述为

$$\begin{cases} y'' + y + 1 = 0 \quad (a < x < b) \\ y|_{x=a} = 0, \qquad y|_{x=b} = 0 \end{cases} \tag{1-12}$$

若将求解域$[a,b]$划分为 $n$ 等份，则相邻两节点间的距离为 $h=(b-a)/n$，其中 $h$ 称为步长，节点 $x_i = x_0 + ih(i=0,1,\cdots,n)$。若用差分代替相应的微分，可将问题(1-12)离散化