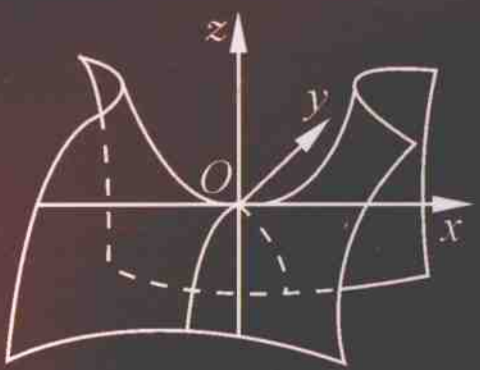
普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

微积分学习指导

主编　刘国钧



普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

微积分学习指导

主编　刘国钧
编者　陈逢炎　王行友　阎国辉
　　　龙　松　李春桃　张文钢
　　　张丹丹　朱祥和　沈小芳
　　　柯　玲

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导/刘国钧　主编. —武汉：华中科技大学出版社，2009 年 8 月
ISBN 978-7-5609-5502-5

Ⅰ.微…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 107158 号

微积分学习指导　　　　刘国钧　主编

策划编辑：李　德
责任编辑：田　密　　　　封面设计：潘　群
责任校对：李　琴　　　　责任监印：周治超

出版发行：华中科技大学出版社(中国・武汉)
　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437

录　　排：武汉众心图文激光照排中心
印　　刷：华中科技大学印刷厂

开本：710mm×1000mm　1/16　　印张：26.75　　字数：520 000
版次：2009 年 8 月第 1 版　　印次：2009 年 8 月第 1 次印刷　　定价：39.80 元
ISBN 978-7-5609-5502-5/O・491

前　言

微积分在经历了300多年的辉煌发展后，已经高度成熟．今天，它的应用几乎遍及所有科学领域．它是当代大学生必须掌握的一门重要知识，是青年学生们启开现代科技大门的第一把钥匙，也是大学生学习后续课程必不可少的数学基础．

在微积分课程的初学者中，有相当一部分会感到十分吃力，为了帮助学生深入领会教材，更好地掌握微积分的有关知识，我们参考了多种中外有关资料，选编了这本微积分学习指导书，该书紧扣国家教学大纲要求，并做到逐章逐节对现行教材同步辅导．

全书共12章，与理工类微积分教材章节相同，对经济类学生，除去第10章曲线积分与曲面积分部分不作要求外，其他各章也都是适宜的．

每章都有如下8个部分．

(1) 大纲基本要求：列出了国家教学大纲对本章内容的基本要求，帮助同学们明确通过本章的学习必需掌握的数学概念及其相关知识．

(2) 内容提要：系统地归纳了本章所学的全部教学内容，使学生对本章所学知识有个清晰的轮廓．

(3) 学习指导：对本章内容中的重点、难点以及应用中学生会感到吃力的地方，逐一加以剖析，帮助学生消化好本章有关知识．

(4) 典型题解析：每章选取了大量的各种类型的例子，通过对这些生动的例子的学习，教会学生如何熟练应用本章的知识来解决各类数学问题．

(5) 常见错误分析：根据老师们长期的教学经验，搜集了初学者常犯的错误，让读者在学习本章时少走一些弯路．

(6) 考研试题选讲：选编了以往历届考研试题中涉及本章的各类试题，这部分内容一般较难，目的是开拓学生的视野，让学生们对这一章内容有更深入的理解，同时对需要考硕士研究生的同学，给予必要的帮助和指导．

(7) 课后练习难题解答：对《微积分》(华中科技大学高等数学课题组)教材中习题部分的一些难题，逐一给出比较详细的解答，以便同学们在自己冥思苦想后仍做不出来的时候，有书可查，给予指导．

(8) 自测题：每章都给出了一套自测题，便于同学们在学完本章后自我检查对本章知识掌握的情况，并附有自测题参考答案以便学生自我评分．

相信学生们通过对本书的系统阅读，会对学好微积分知识有极大帮助.

本书按各章顺序分别由王行友、李春桃、沈小芳、张文钢、朱祥和、龙松、阎国辉、陈逢炎、刘国钧、张丹丹、柯玲等老师编写.

编　者

2009 年元月

目　　录

第 1 章　函　　数

1.1　大纲基本要求

(1) 在中学已有的基础上，加深对函数概念的理解，掌握函数定义的两个要素，会求函数的定义域、函数值和值域.

(2) 加深对函数奇偶性、单调性、有界性和周期性等基本性态的了解，会判定一般函数的奇偶性，记住函数单调性的定义，熟记一些常见的有界函数和周期函数.

(3) 了解反函数的概念，掌握由直接函数求反函数的方法；理解复合函数的概念，会进行函数的复合运算和复合步骤的分解.

(4) 熟记基本初等函数的函数关系式、定义域和值域、性质和图像，理解初等函数的概念，了解分段函数的概念及相关问题.

(5) 会建立一些简单的物理、经济等实际问题中的函数关系式，掌握常见的一些经济函数.

1.2　内 容 提 要

1. 函数概念

区间和邻域　介于某两个实数间的全体实数称为区间，有闭区间与开区间、有限区间与无限区间之分，它是有关数集的一种常用的表示方法. 邻域是一种特殊的开区间，a 的 δ 邻域就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$；a 的 δ 空心邻域就是两个开区间的并集 $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$. 微积分学中凡涉及局部性的概念和问题经常要用到邻域的概念，其关键不在于邻域半径的大小，而在于只要存在(或找到)这个邻域就可以了.

常量和变量　变量是微积分研究的对象，常量可以看做变量的特殊情况，常量和变量的区分是相对的，在一定条件下是可以相互转化的. 学习微积分，就是要学会用发展的、变化的观点来定量地分析研究和解决各种实际问题.

函数　变量 y 是变量 x 的函数记作 $y=f(x)$，它表示因变量 y 按照对应法则 f 随自变量 x 的变化而变化的一种特定关系，其显著特点就是在 x 的取值范围内每取一个值，y 都按照某种法则有确定的值与之对应. $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值通常记作 $y_0=f(x)\big|_{x=x_0}=f(x_0)$，函数值的取值范围称为函数的值域，记作 $Z(f)$.

函数关系的两个要素　确定函数关系的两个要素就是定义域和对应法则，如果

这两个要素确定了，则函数关系就完全确定了. 两个函数是否相同，是由它们的两个要素是否相同来确定的.

定义域 函数的定义域就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的自变量 x 的全体取值所组成的集合，记作 $D(f)$. 在实际问题中，函数的定义域往往是由问题的实际意义来确定的；而抛开问题的实际意义，单由表示函数关系的解析式来求函数的定义域时，一般要根据分母不能为零、负数不能开偶次方、负数和零无对数、$k\pi$ 无余切、$k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ 无正切，以及绝对值大于 1 时无反正弦与反余弦等原则来列出不等式(组)，求得其解即为所求函数的定义域.

对应法则 在函数关系中，因变量 y 与自变量 x 之间相互依存、相互影响的变化规律就是函数的对应法则，它是构成函数关系的主要内容. 它的表示方法也就是函数的表示法，主要有解析(公式)法、表格法、图像法三种，特别是用解析公式表示函数关系时，y 与 x 之间的对应法则就一目了然了.

2. 函数性质

奇偶性 若 $f(-x)=f(x)$，则 $y=f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则 $y=f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)\neq\pm f(x)$，则 $y=f(x)$ 为非奇非偶函数. 根据这个定义可以准确地判定一个函数的奇偶性，并且得到奇函数的图形关于原点对称而偶函数的图形关于 y 轴对称的结论，还能够注意到奇函数或偶函数的定义域必然是关于原点对称的.

单调性 函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上有定义，x_1 与 x_2 是区间 I 内的任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，如果 $f(x_1)\leqslant$ (或 $\geqslant$) $f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或减少)；如果将前面的 $\leqslant$ (或 $\geqslant$) 改为 $<$ (或 $>$)，则称 $y=f(x)$ 为严格单调增加(或减少)；如果 $f(x)$ 既不是单调增加函数，又不是单调减少函数，则是非单调函数. 判定函数的单调性，可以用定义来判定，但这不是主要的方法，主要而又方便的判定方法在第 4 章中将作详细介绍.

有界性 如果存在常数 $M>0$ 函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上是有界函数；否则，是无界函数. 常见的有界函数有正弦函数、余弦函数、反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数等.

周期性 在定义域上满足 $f(x+T)=f(x)$ 的函数 $y=f(x)$ 称为周期函数，式中的正常数 T 通常称为周期函数的周期. 例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的周期均为 2π，$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 的周期均为 π.

3. 复合函数

$y=f(u)$ 通过 $u=\varphi(x)$ 而成为 x 的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 称为复合函数，其中 x 为

自变量，u 为中间变量，y 为因变量. 只有当 $D(f) \cap Z(\varphi)$ 非空时，由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数才有意义，否则不能复合成复合函数.

将 $u = \varphi(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中的运算就是函数的复合运算；从复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 中分解出两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 的运算就是分解复合步骤的运算.

函数的复合运算是不同于函数的四则运算及其他运算的一种独特运算，它具有内层函数与外层函数环环相扣的所谓"函数的函数"这样一种特征，所以分清中间变量与自变量是理解和解决复合函数问题的关键所在，对于现在的一元函数是如此，对后面的多元函数也是如此.

4. 反函数

由 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$，则称 $x = f^{-1}(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数，一般记作 $y = f^{-1}(x)$；$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称；常见的反函数有指数函数与对数函数，三角函数与反三角函数.

5. 基本初等函数

常数函数 $y = c$，幂函数 $y = x^{\alpha}$（α 为常数），指数函数 $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$ 及 $y = \mathrm{e}^{x}$，对数函数 $y = \log_{a}x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 及 $y = \ln x$，三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$ 及反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数.

6. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而构成的，并能用一个解析式子表示的函数称为初等函数. 是否为初等函数主要取决于函数中的运算是否为四则运算或复合运算，并且运算的次数是否为有限次.

7. 分段函数

在定义域内不同部分用不同的解析式子来表示的函数就是分段函数. 由于分段函数是一个函数，所以它的定义域是各段定义域的并集. 在讨论分段函数时，还要特别注意在相邻两段分界点处函数是如何定义的.

8. 常见的经济函数

收入函数 $R = R(x)$，成本函数 $C = C(x)$，利润函数 $L = L(x) = R(x) - C(x)$，需求函数 $x = x(P)$，供应函数 $Q = Q(P)$ 等都是常见的经济函数，其中 x 表示产（销）量，P 表示价格，每个具体的经济函数要根据实际的经济问题来确定.

1.3 学习指导

(1) 学习区间和邻域概念时，特别要把邻域的概念理解透彻. 所谓"a 的 δ 邻域"，实际上是一个有限开区间$(a-\delta,a+\delta)$；而"a 的δ空心邻域"，实际上就是$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$，即 a 的左右两边邻近的区域. 在实际问题中，关心的不是邻域半径 δ 的大小，而是只要这个邻域存在就可以了，理解好这一点是非常重要的.

(2) 学习函数概念时，要注意函数关系式的确定只取决于函数的定义域和对应法则这两个要素，这两个要素确定之后，用什么样的字母和符号来表示因变量、自变量及对应法则是无关紧要的，例如 $y=f(x)$，$y=f(t)$，$u=f(v)$，$y=y(x)$ 等在定义域和对应法则相同的条件下都表示同一个函数.

(3) 函数的定义域可以用区间、不等式、集合等多种方法来表示. 需要注意的是，不是任何函数的定义域都可以用区间来表示的，例如，$y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2k\pi$(k 为整数)，显然它不能用区间来表示.

(4) 讨论函数的性态时，要注意奇偶性与周期性是在定义域上讨论的，而单调性与有界性是在有定义的某区间上讨论的. 一个函数在所讨论的范围内，不是奇函数或偶函数，就是非奇非偶函数；不是单调增加或单调减少函数，就是非单调函数；不是有界函数，就是无界函数；不是周期函数，就是非周期函数.

(5) 求函数 $y=f(x)$ 的反函数时，要注意 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 虽然都表示同一个函数的反函数，但 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形重合，而 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形却关于直线 $y=x$ 对称. 如无特别说明，则求 $y=f(x)$ 的反函数一般是指求 $y=f^{-1}(x)$. 所以求反函数的步骤是：第一步，从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$ 来；第二步，再将 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$.

(6) 在分析初等函数时，分清构造函数的复合运算和四则运算是非常必要的，例如，在将函数 $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ 分解为 $y=\log_a u$，$u=x+v^{\frac{1}{2}}$，$v=1+x^2$ 时，y 与 u 有个外层函数与内层函数的复合关系，v 与 x 也有个外层函数与内层函数的复合关系，而 u 与 v 之间则是四则运算关系而不是复合运算关系. 如果把复合关系当成四则运算关系来看待，或者把四则运算关系当成复合关系来看待，必然会引出错误的结果.

1.4 典型题解析

例 1 设 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，求 $f(x+a)$，$f(x-a)$ 以及 $f(x+a)-f(x-a)$ 的定义域($a>0$).

分析 定义域是使函数有意义的自变量的变化范围，由此知：$f(x)$ 的定义域是 x 的变化范围，$f(x+a)$ 与 $f(x-a)$ 的定义域是 $x+a$ 与 $x-a$ 的变化范围，进而得到 x 的变化范围；$f(x+a)-f(x-a)$ 的定义域是 $f(x+a)$ 与 $f(x-a)$ 两个函数的定义域的交集，而且这个交集是与 a 的取值有关的，所以应当加以讨论.

解 因为对 $f(x)$ 有 $\quad 0\leqslant x\leqslant 1$,

所以对 $f(x+a)$ 有 $\quad 0\leqslant x+a<1$, 即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$;

对 $f(x-a)$ 有 $\quad 0\leqslant x-a\leqslant 1$, 即 $a\leqslant x\leqslant 1+a$.

对 $f(x+a)-f(x-a)$ 有

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a, & (1.1)\\ a\leqslant x\leqslant 1+a. & (1.2)\end{cases}$$

显然，当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，式(1.1)、式(1.2) 联立的方程组的解为 $x=\dfrac{1}{2}$；

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，式(1.1)、式(1.2) 联立的方程组的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$；

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，式(1.1)、式(1.2) 联立的方程组无解.

所以 $f(x+a)$ 与 $f(x-a)$ 的定义域分别$[-a,1-a]$ 与$[a,1+a]$.

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x+a)-f(x-a)$ 的定义域为 $x=\dfrac{1}{2}$；

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x+a)-f(x-a)$ 的定义域为$[a,1-a]$；

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x+a)-f(x-a)$ 无定义.

例 2 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a、b、c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$ 的表达式.

分析 这是一道函数关系的运算题，可利用 x 与 $\dfrac{1}{x}$ 的倒数关系来解答.

解 因为
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}, \tag{1.3}$$
所以
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx. \tag{1.4}$$

解式(1.3) 与式(1.4) 联立的方程组，并注意利用 $|a|\neq|b|$，即 $a^2\neq b^2$，得 $f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{ac}{x}-bcx\right)$.

例 3 已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

分析 解这种类型的题目先要由复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式求出函数 $f(x)$ 的

表达式,再将 $u=\varphi(x)$ 代入 $f(u)$ 中即可.

解 因为 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$,

得
$$f(x)=2(1-x^2),$$
所以
$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

例 4 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且对任意的 x 与 y 都有等式 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,且 $f(x)\neq 0$. 试证明 $f(x)$ 为偶函数.

分析 要证明 $f(x)$ 为偶函数,即要证明等式 $f(-x)=f(x)$ 成立,而这是可以由已知等式推导出来的.

证明 因为
$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$
所以
$$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(-y),$$
得
$$2f(x)f(y)=2f(x)f(-y),$$
又
$$f(x)\neq 0,$$
因此
$$f(-y)=f(y),\quad \text{即 } f(-x)=f(x),$$
所以 $f(x)$ 为偶数.

例 5 设 $\varphi(x)$ 是偶函数,证明 $f(x)=\varphi(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$ 为奇函数.

分析 与例 4 类似,只要由已知条件推出 $f(-x)=-f(x)$ 即可.

证明 因为
$$\varphi(-x)=\varphi(x),$$
所以
$$f(-x)=\varphi(-x)\left[\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right]=\varphi(x)\frac{2+a^{-x}-1}{2(a^{-x}-1)}$$
$$=\varphi(x)\frac{a^x+1}{2(1-a^x)}=\varphi(x)\frac{2+(a^x-1)}{-2(a^x-1)}$$
$$=-\varphi(x)\left[\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right]=-f(x),$$
即 $f(x)$ 为奇函数.

例 6 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,试证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 T/a 为周期的周期函数.

分析 在证明过程中,紧紧扣住周期函数的定义即可.

证明 因为
$$f(x+T)=f(x),$$
所以
$$f[a(x+T/a)]=f(ax+T)=f(ax),$$
即 $f(ax)$ 是以 T/a 为周期的周期函数.

注意 要证明 $f(ax)$ 以 T/a 为周期,即要证明 $f[a(x+T/a)]=f(ax)$,而不是要证明 $f(ax+T/a)=f(ax)$.

例 7　设 $f(x)$ 在其定义域内均满足 $f(x)=f(2a-x)$ 和 $f(x)=f(2b-x)$ $(b>a)$，试证明 $f(x)$ 必为周期函数.

分析　由于在定义域内均有 $f(x)=f(2a-x)$ 以及 $f(x)=f(2b-x)$，所以这两个等式中的 x 均可换成 x 的函数 u，只要仍在定义域内即可.

证明　因为　$f(x)=f(2a-x)$，　$f(x)=f(2b-x)$，

所以
$$f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]=f[2(b-a)+x],$$
即　$f(x)=f[2(b-a)+x]=f[x+2(b-a)]$ ($b>a$ 时，$2(b-a)>0$)，

故 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

例 8　求 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$(a、b、c、d 均非零) 的反函数.

解　因为
$$y=\frac{ax+b}{cx+d},$$
所以
$$y(cx+d)=ax+b,\quad (a-cy)x=dy-b,$$
即
$$x=\frac{dy-b}{a-cy},$$
故 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为
$$y=\frac{dx-b}{a-cx}.$$

注意　通常要求的 $y=f(x)$ 的反函数不是 $x=f^{-1}(y)$ 而是 $y=f^{-1}(x)$.

例 9　某大楼有 50 间办公室出租，若定价每间每月 120 元，则可全部租出，租出的办公室每月需由房主负担维修费 10 元；若每月租金每提高一个 5 元，将空闲出一间办公室. 试求房主所得利润与空闲办公室的间数的函数关系，并确定每月租金为多少时才能获得最大利润?最大利润是多少?

解　设利润为 L，空闲间数为 x，则租出的间数为 $50-x$，每月租金收入为 $(120+5x)(50-x)$，每月维修支出为 $10(50-x)$，故每月所得利润
$$L=(120+5x)(50-x)-10(50-x)=6480-5(14-x)^2.$$
显然当空出 14 间即租出 36 间时，可得最大利润 6480 元(当 $x=0$ 即全部租出时所得利润 5500 元，不是最大利润).

例 10　记矩形的一边长、周长和面积分别为 x、L、S，

(1) 当 L 为定值时，将 S 表示成 x 的函数；

(2) 当 S 为定值时，将 L 表示成 x 的函数.

解　(1) 因为矩形的一边长为 x，周长为 L，所以矩形的另一边长为 $\dfrac{L}{2}-x$，故矩形面积为
$$S=x\left(\frac{L}{2}-x\right)=\frac{L^2}{16}-\left(x-\frac{L}{4}\right)^2.$$

（显然周长一定的矩形中，正方形的面积最大，这时边长 $x=\frac{L}{4}$.）

(2) 因为矩形的一边长为 x，面积为 S，所以矩形的另一边长为$\frac{S}{x}$，故矩形的周长为

$$L=2\left(x+\frac{S}{x}\right)$$

（显然 $L=2\left(x+\frac{S}{x}\right)\geqslant 4\sqrt{S}$，即面积一定的矩形中，正方形的周长最小，这时边长 $x=\sqrt{S}$.）

1.5 常见错误分析

例 1 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$.

错解 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}=x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$，

所以
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{x}(1+\sqrt{1+x^2}).$$

分析 错将 $\sqrt{x^2}=|x|$ 当成 $\sqrt{x^2}=x$.

正确解答 因为
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}=x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{\frac{1}{|x|}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2},$$

所以
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}.$$

例 2 求函数 $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\log_a(1-x)}$ 的定义域.

错解 由 $1-x>0$，解得 $x<1$，故
$$D(f)=(-\infty,1).$$

分析 注意到负数和零无对数时要求 $1-x>0$，而没有注意到分母不能为零时要求 $\log_a(1-x)\neq 0$.

正确解答 要使 y 有意义，必须$\begin{cases}1-x>0,\\ \log_a(1-x)\neq 0,\end{cases}$

即
$$\begin{cases}1-x>0,\\ 1-x\neq 1,\end{cases}$$