全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学应用基础

主编　边文莉　马　萍

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育"十一五"规划教材

高等数学应用基础

主　编　边文莉　马　萍
副主编　尹清杰　吕杰林
　　　　沈　澄　马君儿

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》，结合最新的课程改革理念而编写的。

本书的主要内容有函数、极限与连续，导数、微分及其应用，积分及其应用，常微分方程，多元函数微积分，线性代数初步，数学实验等，书后附有习题参考答案。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校以及本科院校的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校理工类专业高等数学或应用数学的教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学应用基础/边文莉，马萍主编．—北京：高等教育出版社，2009.8

ISBN 978-7-04-027620-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①边…②马…　Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 120406 号

策划编辑 邓雁城　**责任编辑** 李　茜　**市场策划** 鲁志恺　**封面设计** 张　志
责任绘图 黄建英　**版式设计** 余　杨　**责任校对** 王　超　**责任印制** 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
总　　机 010-58581000

经　　销 蓝色畅想图书发行有限公司
印　　刷 北京鑫海金澳胶印有限公司

开　　本 787×1092　1/16
印　　张 17.75
字　　数 440 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版　　次 2009年8月第1版
印　　次 2009年8月第1次印刷
定　　价 24.60元

物料号　27620-00

前　　言

本教材是为了适应高职高专院校人才培养目标而编写的，符合高职高专院校工科类各专业以“必需、够用为度”的教学要求。本教材具有以下特点：

1. 采用案例驱动，实现知识体系的创新

本书采用案例驱动法编写，以实际工程和生活问题为引例—抽象出数学概念—再列举大量适合高职高专数学教学的应用案例，培养学生数学建模能力，并在案例分析的基础上加强对数学概念的理解和消化。注重数学应用能力的培养，弱化理论推导。形成适用于高职高专教学的应用型知识体系。

2. 模块式内容整合，适合分层次教学及可持续教育

本教材适用于不同层次班级的教学，由于对教学内容进行了模块式整合，各章相对独立，教师可根据专业特点，按需要选择不同模块进行教学。

在每节后配有同步测试，以供教师布置作业或学生自测。另外每章后还配有综合习题。本书将部分较高要求的内容用“*”作了标记，供不同层次的学生选择。

3. 目标化教学管理

每章后配有框图式本章小结，帮助学生理清思路。

4. 突出现代教育技术的应用

将数学实验编入该书，融入了 MATLAB 软件的应用，有利于多维度理解和掌握数学知识点。能用计算机进行各种运算及绘制二维图形（主要）与三维图形。

5. 易学、易懂、易教

本书内容深入浅出，语言通俗易懂，设计了与教学内容相匹配的图、表，便于学生理解，提高学习兴趣及效率。

参加本书编写的有浙江水利水电专科学校边文莉、马君儿、王文慧，湖州职业技术学院马萍，浙江东方职业技术学院乔树文，浙江商业职业技术学院吕杰林、巨进化，浙江工商职业技术学院沈澄，台州科技职业学院汪国华，浙江同济科技职业学院杨立新，浙江工贸职业技术学院尹清杰等教师。全书由边文莉、马萍完成最后的统稿。

由于水平有限，成书时间比较仓促，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2009 年 5 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　函数的概念

函数的概念是客观世界中变量之间相互依赖关系的反映，是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型. 函数既是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分研究的主要对象. 为了研究事物在变化过程中的数量变化规律，我们首先必须区分常量和变量.

一、常量与变量

我们讨论的问题中的量，一般可以分为两类，一类是在过程进行中保持不变的量，这一类量称为常量，如火车在两站之间的运价，全部行李的重量等，常量通常用 $a,b,c,\cdots$ 字母来表示. 另一类是在过程进行中不断变化的量，可以取得不同的值，这一类量称为变量，如火车在两站之间运行的速度等，变量通常用 $x,y,z,u,v,\cdots$ 字母来表示.

二、区间

定义 1.1.1　设 a,b 是两个实数，且 $a<b$，则数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$，如图 1－1 所示. $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，如图 1－2 所示. $\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ 称为半开区间，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.

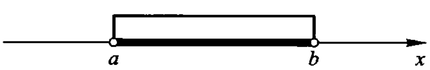

图 1－1

图 1－2

以上区间称为有限区间，有限区间的长度为 $(b-a)$. 除了这些有限区间外，还有各种无限区间：

$$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x\},\quad (a,+\infty)=\{x\,|\,a<x\},\quad (-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\},$$

$$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\},\quad (-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}.$$

注意：$-\infty$，$+\infty$ 分别读作负无穷大、正无穷大，它们不是数，仅仅是记号.

三、邻域

定义 1.1.2　设 x_0,δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即 $U(x_0,\delta)=\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta\}$.

因为不等式 $|x-x_0|<\delta$ 等价于 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，在数轴上它表示到点 x_0 的距离小于 δ 的所

有点的集合,即$(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 所以称x_0为邻域中心,δ为邻域半径. 如图1-3所示.

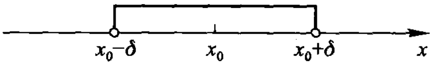

图1-3

例1　$U(2,1)=\{x\,\big|\,|x-2|<1\}$是以点$x_0=2$为中心,以$\delta=1$为半径的邻域,即开区间$(1,3)$.

有时我们要用到去掉中心的邻域,把邻域$U(x_0,\delta)$的中心去掉,所得到的数集$\{x\,\big|\,0<|x-x_0|<\delta\}$称为点$x_0$的$\delta$去心邻域,记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,\big|\,0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

例2　$\mathring{U}(2,3)=\{x\,\big|\,0<|x-2|<3\}$为以2为中心,以3为半径的去心邻域,即为开区间$(-1,2)\cup(2,5)$.

四、函数的概念

在研究某一自然现象或实际问题时,往往会发现问题中存在多个不断变化的量,这些变量并不都是彼此独立变化的,它们之间相互联系,相互依赖,并按照一定的规律变化着.

[引例1]　物体在时刻$t=0$时从高度为h处自由下落(空气阻力忽略不计),设时刻t下落的距离为s,则s与t之间有如下的对应关系:

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

[引例2]　斜边为20但两直角边不固定的直角三角形,一直角边长度为a,与它所对应的角为A,则a与A之间有如下的对应关系:

$$a=20\sin A.$$

不难看出,上面两个例子中s与t,a与A存在确定的对应关系,把这种单值对应关系抽象化就得到函数的概念.

定义1.1.3　设有x和y两个变量,D是一个给定的非空数集,若对于任意一个$x\in D$,变量y按照一定的对应法则f总有确定的数值与之对应,则称y是x的函数,记作:

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中,x称为**自变量**,y称为**因变量**,数集D称为这个函数的**定义域**.

如果对于自变量x的某个确定的值$x_0\in D$,通过对应法则f,因变量y有唯一确定的值y_0与之对应,则称函数$y=f(x)$在x_0处**有定义**,y_0为函数$y=f(x)$在x_0处的函数值,记作$y_0=f(x_0)=y\big|_{x=x_0}$.

当自变量x取遍D的所有数值时,函数值的集合$W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$称为函数的**值域**.

说明:由函数的定义我们可以看出函数关系包含下面两个要素:

(1) 自变量的取值范围,即函数的定义域D;

(2) 自变量与因变量的对应法则f.

五、函数的表示法

最常见的函数表示方法有三种：表格法、图像法和解析法.

1. 表格法　将自变量的值及对应的函数值列成表的方法，称为表格法. 如平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数关系.

[案例1]保险丝的直径与熔断　保险丝的熔断电流 I(单位：A)和直径 D(单位：mm)之间有如表1-1所示的关系：

表1-1

直径 D/mm	0.508	0.559	0.610	0.710	0.813	0.915	1.22	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.0
熔断电流 I/A	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26	16.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.0

表格法的特点是简明方便，缺点是自变量的取值有限.

2. 图像法　在坐标系中用图形来表示函数的关系的方法，称为图像法.

图像法的特点是形象直观，富有启发性，一目了然.

3. 解析法　将自变量和因变量之间的关系用数学式子来表示的方法，称为解析法，也称为公式法. 微积分中涉及的函数大多用解析法表示，其特点是精确、完整，便于理论上的分析研究.

有时我们会遇到这样的函数，自变量在定义域的不同的变化范围内，对应法则用不同的解析式表示，这样的函数称为**分段函数**.

例3　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$，其图形如图1-4所示.

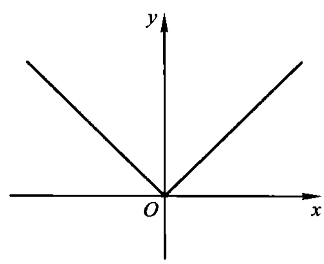

图1-4

例4　函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

称为符号函数. 定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{-1,0,1\}$，其图形如图1-5所示. 利用该函数可以改变某些函数的表达形式，如

$$y=|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x.$$

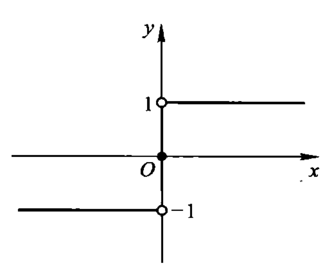

图1-5

例5　设变量 y 为不超过 x 的最大整数，记为 $[x]$，则

$$y=[x]=\begin{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -2, & -2\leqslant x<-1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数，图形(如图 1-6)称为阶梯曲线. 此函数称为取整函数.

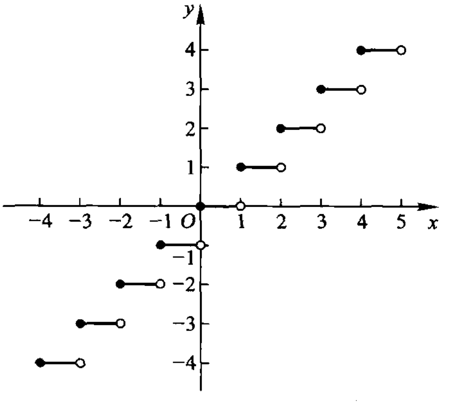

图 1-6

[案例 2]税收率　我国于 1993 年 10 月 3 日发布的《中华人民共和国个人所得税法》中规定国家征收个人所得税是分段计算的，月收入超过 800 元为应纳税所得额(即个人所得税的起征点). 随着人民生活水平的提高，从 2006 年 1 月 1 日起，个人所得税的起征点由 800 元上调为 1600 元. 从 2008 年 3 月 1 日起，个人所得税的起征点又由 1600 元改为 2000 元，税率如表 1-2 所示：

表 1-2

级数	全月应纳税所得额	税率/%
1	不超过 500 元的部分	5
2	超过 500 元至 2000 元部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元部分	15
4	超过 5000 元至 20 000 元部分	20
⋮	⋮	⋮
9	超过 100 000 元部分	45

如某单位所有的人月收入都不超过 7000 元，按 2008 年 3 月 1 日发布的标准建立该单位员工月收入与纳税金额的函数关系式.

解　设某人月收入为 x 元，应交纳所得税为 y 元，月收入与纳税金额的函数关系式

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2000,\\ 0.05(x-2000), & 2000<x\leqslant 2500,\\ 0.1(x-2500)+25, & 2500<x\leqslant 4000,\\ 0.15(x-4000)+175, & 4000<x\leqslant 7000.\end{cases}$$

六、函数的特性

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在一个常数 $M>0$，对任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 是 I 上的**有界函数**；若这样的常数 M 不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上**无界**.

例如：函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为它在 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\sin x|\leqslant 1$（取 $M=1$）.

注意：有可能出现以下的情况：函数在其定义域上的某一部分是有界的，而在另一部分是无界的，因此，讲一个函数是有界的或无界的，必须指出其相应的范围.

有界函数的几何特征是：它的图像位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

2. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内**单调增加**，区间 I 称为**单调增加区间**；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内**单调减少**，区间 I 称为**单调减少区间**.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数；单调增加区间和单调减少区间统称为单调区间.

例如：函数 $y=2x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的，而在 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数 $y=2x^2+1$ 不是单调函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任何 $x\in D$，有 $f(x)=f(-x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**偶函数**；若有 $f(x)=-f(-x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例如：函数 $y=\sin x$ 是奇函数；函数 $y=\cos x$ 是偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T\neq 0$，对于任何 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 满足等式的最小正数 T 称为**基本周期**或**最小正周期**，通常周期函数的周期是指最小正周期，简称**周期**.

周期函数图像的特点是：周期为 T 的函数，只要描出它在任一区间 $[a,a+T]$ 上的图像，然后将图像一个周期一个周期的左、右平移，就可得到整个周期函数的图像.

例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

注意：关于函数的性质，除了有界性与无界性之外，单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质，而不是每一个函数都一定具备的.

七、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 如果对于任意 $y\in W$，D 中都有唯一确定的 x 与 y 对应，且满足关系式 $y=f(x)$，则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，$x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，这个新函数就称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 W，值域为 D. 而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

八、基本初等函数

常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数叫作基本初等函数.这些函数在中学的数学课程里已经学过.

(1) 常量函数　$y=c$（c 为常数）

定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数的图形是一条水平的直线,如图 1-7 所示.

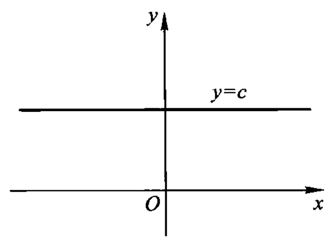

图 1-7

(2) 幂函数　$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$）

定义域和值域依 α 的取值不同而不同,常见的幂函数($\alpha=1,2,3,-1$ 时)的图形如图 1-8 所示.

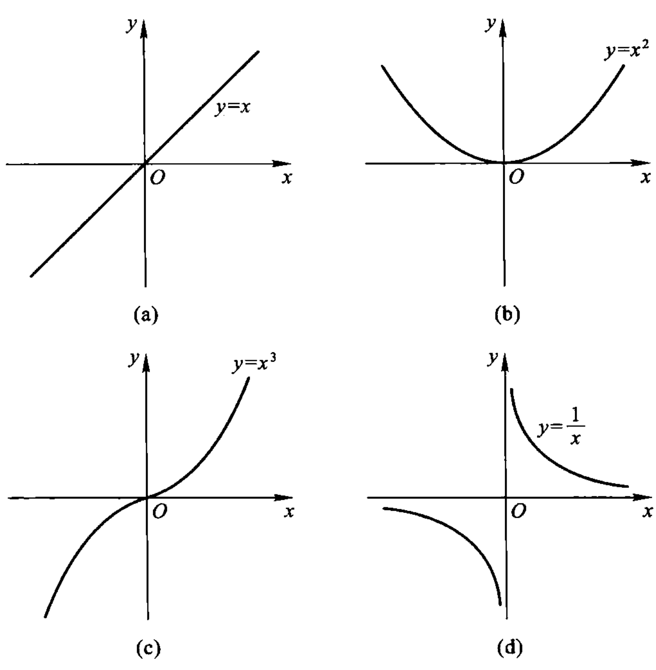

图 1-8

(3) 指数函数　$y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$. 指数函数的图形如图 1 - 9 所示.

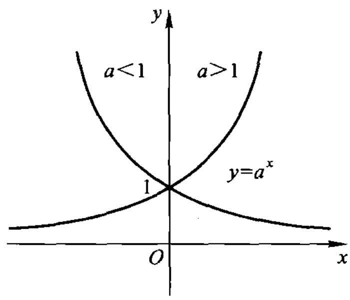

图 1 - 9

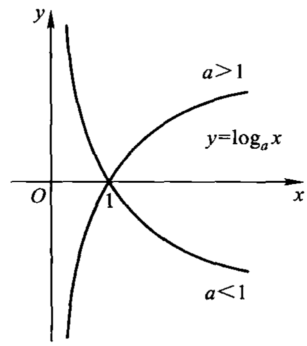

图 1 - 10

(4) 对数函数　$y=\log_a x$　$(a>0,a\neq 1)$

定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 对数函数图形如图 1 - 10 所示.

在工程中,常以无理数 $e=2.718\ 281\ 828\cdots$作为指数函数和对数函数的底. 以 e 为底的对数函数记为 $\ln x$,称为自然对数函数.

(5) 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,

余弦函数 $y=\cos x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,

正切函数 $y=\tan x$,定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$,值域为$(-\infty,+\infty)$,

余切函数 $y=\cot x$,定义域为 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$,值域为$(-\infty,+\infty)$,

三角函数还包括正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$. 正弦、余弦、正切和余切函数的图形如图 1 - 11 所示.

(6) 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数.

反正弦函数 $y=\arcsin x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

反余弦函数 $y=\arccos x$,定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$;

反正切函数 $y=\arctan x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$.

它们的图形如图 1 - 12 所示.

九、复合函数

定义 1.1.4　设函数 $y=f(u)$,而 $u=\varphi(x)$,若 $\varphi(x)$的值域落在 $f(u)$的定义域内,则得到一

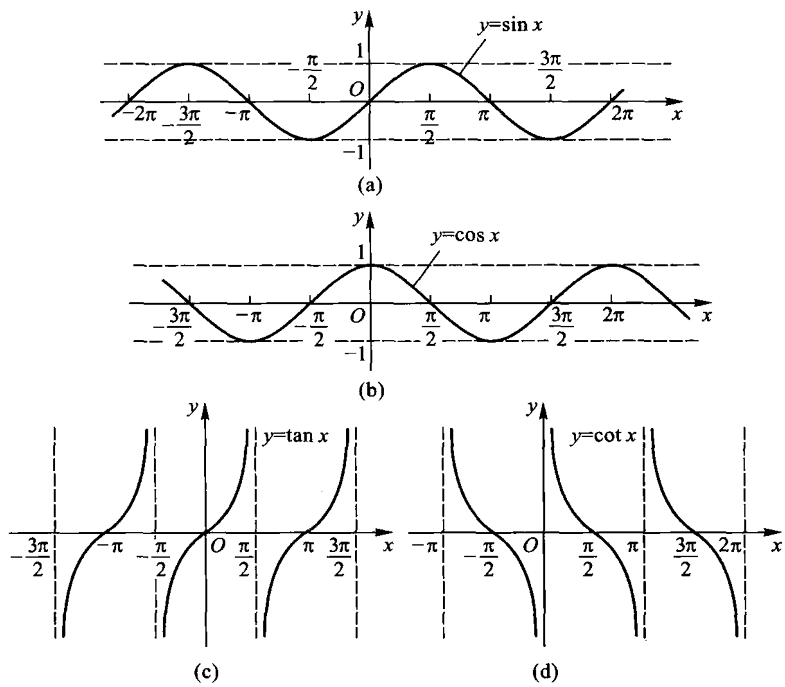

图 1－11

个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，此函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，u 为中间变量.

如复合函数 $y=\sqrt{2+\sin x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=2+\sin x$ 复合成的.

例 6　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=5^{(2x-1)^3}$；　　　(2) $y=\ln\sin(x^2+1)$

解　(1) $y=5^{(2x-1)^3}$ 可以看作是 $y=5^u$，$u=v^3$，$v=2x-1$ 复合而成的复合函数.

(2) $y=\ln\sin(x^2+1)$ 可以看作是 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$ 复合而成的复合函数.

注意：(1) 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数，例 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-2$ 就不能复合.

(2) 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

十、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合运算所构成，且可用一个解析式表示的函数，称为初等函数. 否则，就是非初等函数.

例如：函数 $y=\sin^2(3x+1)$，$y=\sqrt{x^3}$，$y=\dfrac{\lg x+2\tan x}{10^x-1}$ 都是初等函数.

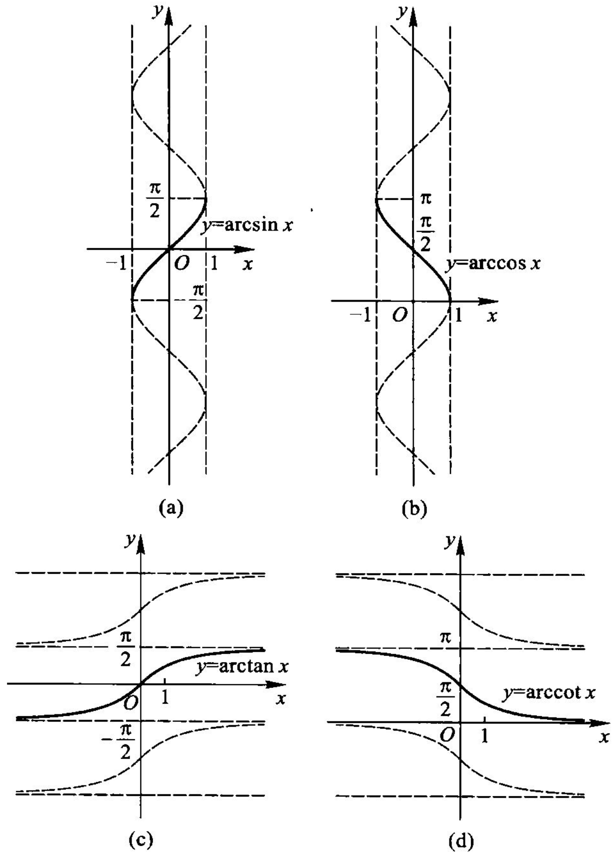

图 1 - 12

同步测试 1 - 1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x(x-1)}$；

(3) $y=\sqrt{\cos x}$；　　(4) $y=\lg\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=2^x$；　　(2) $y=\dfrac{|x|}{x}$.

4. 分析下列函数的复合结构：

(1) $y=(1+x)^{\frac{2}{3}}$；　　(2) $y=e^{a\ln x}$ $(a\neq 0)$；

(3) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；　　(4) $y=\ln(\tan 2x)$；

(5) $y=\cos\frac{1}{x-1}$; (6) $y=3^{(x+1)2}$.

5. 设有一块边长为 a 的正方形薄板，将它的四角剪去边长相等的小正方形制作一只无盖盒子，试将盒子的体积 V 表示成小正方形边长 x 的函数.

6. 某厂生产某种产品 600 件，定价为 20 元/件，销售量在不超过 300 件时，按原价出售，超过 300 件时，超过部分按八折出售，试求销售收入 R 与销售量 x 之间的函数关系.

第二节 极限的概念

极限的思想与求一些量的精确值有关，它研究的是在自变量的某个变化过程中，函数的变化趋势. 极限是研究变量的变化趋势的基本工具，高等数学中许多基本概念，例如连续、导数、定积分、无穷级数等都是建立在极限的基础上，极限方法又是研究函数的一种最基本的方法.

[引例 1] 计算圆的面积：我国的刘徽提出了"割圆术"，即用圆的内接正多边形穷竭的方法求圆的面积."割圆术"求圆面积的作法和思想如图 1－13 所示. 先作圆的内接正三角形，把它的面积记为A_1，再作圆的内接正六边形，面积记为 A_2，再作圆的内接正十二边形，面积记为 A_3……照此下去，把圆的内接正 $3\cdot 2^{n-1}$边形面积记为 A_n，这样得到一数列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$.

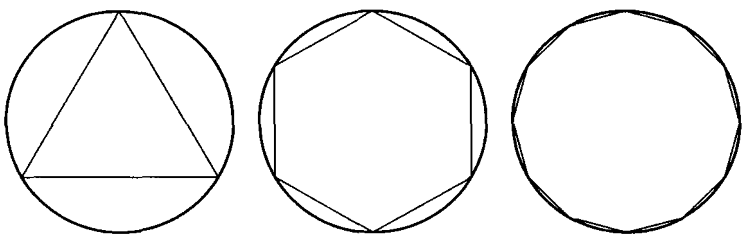

图 1－13

从图 1－13 不难看出：随着圆内接正多边形边数 $3\cdot 2^{n-1}$ 的增加，圆内接正多边形的面积与圆的面积越来越接近. 当边数无限增大时，内接正多边形 A_n的面积会无限地接近圆的面积 A.

一、数列的极限

定义 1.2.1 按一定次序排列的无穷多个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 称为**无穷数列**，简称**数列**，可简记为$\{x_n\}$. 其中每个数称为数列的项，x_n称为**通项**（一般项）.

例如：

$$\{x_n\}=\{2^n\}, \qquad 2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$$

$$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}, \qquad \frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots;$$

$$\{x_n\}=\{(-1)^{n+1}\}, \qquad 1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;$$

$$\{x_n\}=\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}, \qquad 2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots.$$

定义 1.2.2 设数列$\{x_n\}$，若存在一个常数 a，当 n 无限增大时，x_n无限接近于 a，则称常数 a

为数列$\{x_n\}$的**极限**，或称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a\ (n\to\infty).$$

如果一个数列没有极限，就称该数列是**发散**的.

例 1　下列各数列是否收敛，若收敛，试指出其收敛于何值.

（1）$\{x_n\}=\{2^n\}$；　　（2）$\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$；

（3）$\{x_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$；　　（4）$\{x_n\}=\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$.

解　（1）数列$\{x_n\}=\{2^n\}$即为

$$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$$

易见，当n无限增大时，x_n也无限增大，故该数列是发散的.

（2）数列$\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$即为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

易见，当n无限增大时，x_n无限接近于0，故该数列收敛于0.

（3）数列$\{x_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$即为

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

易见，当n无限增大时，x_n无休止地反复取$1,-1$两个数，而不会无限接近于任何一个确定的常数，故该数列是发散的.

（4）数列$\{x_n\}=\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$即为

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

易见，当n无限增大时，x_n无限接近数1，故该数列收敛于1.

[案例 1]曲边梯形的面积　求由曲线$y=x^2$，$x=1$及x轴围成的曲边梯形的面积.

解　（1）细分：将区间$[0,1]$等分成n个小区间$\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$，$\left[\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right]$，$\cdots$，$\left[\dfrac{n-1}{n},1\right]$，依次作$n$个内接小矩形，如图1-14. 每个小矩形的面积为

$$\frac{1}{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

（2）作近似：所有的小矩形面积和S_n可认为是所求曲边梯形面积S的近似值

$$\begin{aligned}S\approx S_n&=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

不难看出，当n越大，上式的近似程度越好. 当n无限增大时，S_n无限的接近曲边梯形的面

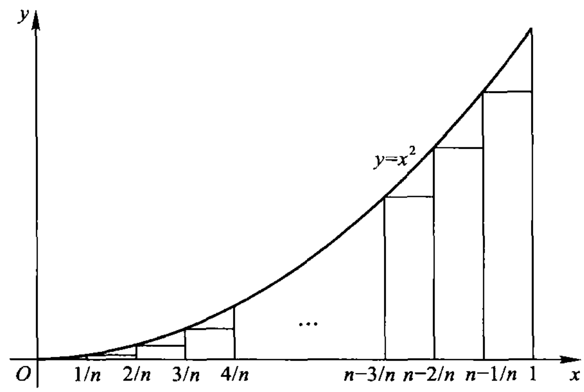

图 1 - 14 曲边梯形

积 S.

(3) 取极限:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

二、数列极限的性质

定义 1.2.3 对数列$\{x_n\}$,若存在 $M\in\mathbf{R}^+$,使得 $n\in\mathbf{Z}^+$ 时,恒有$|x_n|\leqslant M$,则称数列$\{x_n\}$**有界**,否则无界.

性质 1(有界性) 收敛的数列必有界.

推论 1 数列无界必发散.

性质 2(唯一性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$,则 $A=B$.

注:有界是收敛的必要条件.

例如:证明$\{x_n\}=\{(-1)^{n+1}\}(n=1,2,\cdots)$有界不收敛.

证 如果此数列是收敛的,由性质 2 知,它有唯一极限,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 但 $n\to\infty$ 时,x_n无休止的重复 ±1 这两个数,因此 x_n不可能趋向同一个数,故数列$\{x_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$是发散的.

三、函数的极限

在自变量 x 的某个变化过程中,如果对应的函数值$f(x)$无限接近于某个确定的常数 A,则称 A 为 x 在该变化过程中函数$f(x)$的极限,显然,极限 A 是与自变量 x 的变化过程紧密相关的,下面分两种情况介绍函数的极限.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

[引例 2] 已知一并联电路中有一电阻为 2 Ω 的固定电阻与一可变电阻为 R,求当可变电阻所在的支路中突然断路时电路的总电阻. 如图 1 - 15 所示.

解 由电学知识可知,电路的总电阻为