# 高等數学講义

（上 册）

同济大学数学教研組編

1957

# 緒　論

## 一、 数學研究的對象、数學的抽象性和現實性

数学是以現实世界的空間形狀和数量关系为对象的科学.

数学是現实世界的空間形狀和数量关系的客观規律的反映，数学上的形和数都是从具体事物中抽象出來的.

事实上,数学的基本概念是得自外界的,而不是在头腦中从純粹思維產生的. 人类在長期生產实踐中，現实世界的空間形狀和数量关系的規律,億万次地反映在人們的思維中,人們把这种規律加以抽象；也就是从事物的形形色色的外部現象的感性認識,加以概括,找出它們的共同性和必然性,上升为理性的認識,这就產生了数学上抽象的概念. 例如从一棵樹、一头牛、一个人等等具体的單个的东西中抽去具体的內容,得到了它們之間的共同性,那就是自然数 “1” 这个抽象的概念；从太陽、瓜果等等圓形的具体东西，抽去了具体的內容，得到了它們之間的共同性，也就是抽象的几何圖形 “圓” 的概念；又如自然数运算的規律,也正是客观現实的数量关系的一种共同性. 人們看到“三头牛加兩头牛等於五头牛”，“三棵樹加兩棵樹等於五棵樹”,……这类無数的具体事实,在思維中經过抽象化的过程,上升为总結性的式子:$3+2=5$.

数学的抽象性是它的一个特征. 正确的抽象，是更深刻的現实的反映. 例如上述抽象的自然数 “1” 和几何圖形 “圓” 的概念，更深刻、更本質地反映了这些具体东西的某些性狀. 同时,正由於数学的抽象,数学理論才可以普遍应用於各种事物. 例如上述式子: $3+2=5$, 不單指牛的头数或樹的棵数間的数量关系，而是代表了一般事物的数量間的关系.

但是資產階級唯心論者往往就利用数学的抽象性來加以歪曲，他們否認数学產生的現实意义，而認为数学不过是人类心灵自由創造出來的东西，把数学家的主观作用誇大到荒謬的地步. 但事实並不是这样,从数学的整个發展过程來看，都是和实际緊密联系着的，而不是完

全由人憑空憶想的.

科学能使人类獲得預見，而数学又是獲得預見的有力工具. 下面的例子就足以說明利用数学的推演，使科学技術的發展起着預見的作用:

(1) 法國学者列佛利 (U.J.J.Leverrier) (1811—1877) 研究行星运动問題，他首先發現根据古典力学中所得出的某一推論与观測事实有出入，他又發現如果假設还存在一个具有一定質量及一定軌道的行星，便可使推論与事实沒有出入. 不久，就有人根据他的計算和推測，果然在他所指定的时間和位置，發現了一顆新的行星——海王星.

(2) 二十世紀初，莫斯科著名的航空力学家茹可夫斯基 (H. E. Жуковский) (1847—1922)，用数学方法得出一些公式和定理，这在过去和現在都是改善飛机設計工作中所遵循的原理. 特别是他从理論方面預測了"高級飛行技術中翻筋斗"的可能性，而且不久果然有人实現了.

綜上所述，可見数学不是什么玄妙的东西，恩格斯說:"純粹数学研究的对象，是現实世界的空間形狀及数量关系，是非常現实的資料. 这些資料，表現於非常抽象的形式，这一点只能在表面上掩盖它的來源". (恩格斯著"反杜林論")

## 二、 數學和生產實踐的關係

数学的發生和發展决定於人类生產实踐的需要. "和其它科学一样，数学是从人們的实际需要中產生的：卽是从田地面積及器物容量的測量，从时間的計算，以及从力学中產生的". (同上書) 例如，自从人类需要計算劳动果实，随之而來的就產生了自然数; 由於量地的需要，就產生了几何学; 在十七、十八世紀，由於自然科学及工程上的需要，就產生了高等数学中的一些概念和方法，而自然科学与工程的蓬勃發展，是受到生產的急剧变革和擴大所激起的. 由此可見: 由於生產發展的需要才有数学的發展; 反过來，数学的發展，又在一定程度上推动了生產

的進一步發展．这样無限循环，一次比一次丰富，生產技術逐步發展，数学的成就也日趋輝煌．俄罗斯大数学家契伯雪夫（П.Л.Чебышев）（1821—1894）曾說：“理論与实踐結合就会產生極良好的結果，而受惠的不僅是实踐，科学本身是在实踐的影响下發展起來的”．

生產实踐的需要不僅促使数学理論的發展；同时，数学理論反映客观现实的眞实性，也要受生活实踐的考驗．所以說：实踐是科学眞实性的准繩．列寧教導我們：“生活的观点实际上应是認識論的首要的与基本的观点”．（列寧全集第十四卷）

## 三、 高等數學的對象、方法和它對自然科學的價值

如前所述，在十七、十八世紀的时候，由於生產的蓬勃發展，引起自然科学及技術科学上的实际需要，因而也引起了許多新的数学上的問題．这些問題和已往的数学問題有原則性的区别．要解决它們，初等数学已不够用了，需要創立完全嶄新的观念和方法．这就促使数学在这些年代里有了一个飛躍的發展——从初等数学到高等数学．

法國著名数学家兼哲学家笛卡兒（R.Descartes）（1596—1650）首先把变量引進数学并創立了坐标观念．这是数学史上的一个轉折点．随后，微積分法也就在那时產生，而总的說來它是在牛頓（I. Newton）（1642—1727）和萊布尼茲（G.W.Leibnitz）（1646—1716）兩人手上完成的．

初等数学和高等数学的基本区别是：初等数学，如中等学校里学过的代数、几何和三角等，研究的对象主要是不变的量（常量）或圖形；而高等数学，如本課程所要講的解析几何、微積分等，研究的对象是变量和圖形的变化．其次，在研究的方法上，高等数学是在代数法、解析法与几何法密切結合的基礎上發展起來的；而初等数学中的代数与几何的理論是各自独立構筑出來的，初等代数中的代数法和初等几何中的綜合法一般是沒有联系的．

对於自然科学与工程技術來說，高等数学是其理論研究的重要工

具．因为近代自然科学和工程技術中所要解决的問題，一般都与数学聚密联系着．迦利略早就說过："自然規律要用数学語言來記錄"，恩格斯在"反杜林論"一書中也曾說："……要辯証而又唯物地了解自然，就必須熟悉数学"．所以有人說：数学是掌握技術的鑰匙．因此，作为一个工程师，要能掌握近代技術科学，高等数学是必須具备的基礎理論知識．

## 四、 我國古代數學家在數學上的一些成就

我們的祖先是聪明的、勇敢的、勤劳的，在很早以前 就發明了指南針、活字版、火藥等．在数学方面，也同样有了不少成就：古算書流傳至今的有"算經十書"，其中尤以"九章算術"为世所称頌．三千年前我國的哲学家惠施等人已經初具"極限"的思想．商高定理也是發明在三千年前．圓周率最早最精确的数字也是我們的祖先祖冲之(429—500)推得，祖冲之推算出圓周率介於3.1415926与3.1415927之間．联立方程的解法也早見於"九章算術"中的"方程章"（第二世紀)．到十三世紀，我國北方数学家發明"天元術"，用"天""地"二字表示不同的未知数，能解二元高次方程．元朝朱世傑於1303年著"四元玉鑑"，更推廣到四个未知数的高次方程，用的是逐步消元法．不定方程問題，早見於"九章算術"、"張丘建算經"和"孙子算經"，宋朝秦九韶創"大衍求一術"(1247年)，可解不定方程．"大衍求一術"曾流傳到欧洲，称为"中國剩余定理"．高次方程求近似根也是我國祖冲之研究得最早．秦九韶的"数書九章"(1247年)，李冶的"測圓海鏡"(1248年)都用增乘法求高次方程的近似根，要比英國的霍納法（1819年）早五百多年．二項定理系数世称巴斯加三角形数，在賈憲的"开方作法本源圖"(1261年)中將六次以內的二項定理系数一一列出；在朱世傑的"四元玉鑑"(1303年）增到八次，这要比巴斯加早二百多年．总之我國古代数学家在代数、几何、三角諸方面都有很大貢献，兹不一一列举．

由上可見，祖國劳动人民在数学方面具有丰富的才能．但近百年

來，由於帝國主义的压迫，以及國內封建勢力和官僚資產階級的反动統治，我國社会長期停滯在封建、半封建的階段，生產技術落后，生產事業發展極为緩慢，因而科学也得不到發展．解放以來，在党和政府的重視和关怀下，在世界上最先進的苏联科学思想指導下，我國科学已随着社会主义建設事業的蓬勃發展，呈現了廣闊光輝的前途．

# 目　　次



## 第一篇　解析几何

# 第一篇　解析幾何

## 第一章　平面上的直角座標、曲線及其方程

### § 1.1　軸和軸上的線段

任意一条直線，它有兩个相反的方向．我們可以随意指定其中的一个叫做它的正向．这样指定了正向的**直線稱爲軸**．圖 1.1 表示一个軸．它的正向是自左至右的．为了表示这正向，我們在右端加一箭头．

圖　1.1

設有任意兩点 $A$ 和 $B$．用直線联結 $A$ 和 $B$ 得一線段．在几何及力学的許多問題中，不但線段的長度值得注意，同时線段的方向也有着重大的意义．这就是說，認清 $A$ 和 $B$ 中哪一个是起点，哪一个是終点这件事是有意义的．从起点到終点的方向是線段的方向．**有方向的線段叫做有向線段**．以 $A$ 为起点以 $B$ 为終点的有向線段，我們用記号 $\overline{AB}$ 表示它．这样，$\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 表示兩个不同的有向線段，因为 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的長度虽然相同，但是 $\overline{AB}$ 的方向是从 $A$ 到 $B$，而 $\overline{BA}$ 的方向是从 $B$ 到 $A$．

設已知一軸．$A$ 和 $B$ 是該軸上的任意兩点．这样，$\overline{AB}$ 便是軸上的有向線段了．**我們規定這樣一個數叫做軸上有向線段 $\overline{AB}$ 的值，這數的絕對值等於 $\overline{AB}$ 的長度，**（这里当然假定預先已指定了單位長度）**這數的符號則這樣決定：如果 $\overline{AB}$ 的方向和軸的正向相同，就取正號；如果 $\overline{AB}$ 的方向和軸的正向相反，就取負號**．$\overline{AB}$ 的值我們用記号 $AB$ 表示．$\overline{AB}$ 的長度用記号 $|AB|$ 表示．顯然，$|AB|=|BA|$，但 $AB=-BA$．

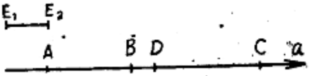


圖　1.2

在圖 1.2 中表示着一个軸 $a$ 和軸上的四个点 $A,B,C,D$；$E_1E_2$ 是單位長度．假設点 $A,B,C,D$ 是这样排列的：$A$ 和 $B$ 間的距离等於

2，$C$ 和 $D$ 間的距离等於 3；从 $A$ 到 $B$ 的方向和軸的正向相同，从 $C$ 到 $D$ 的方向和軸的方向相反．在这种情况下，我們便得：

$$AB=2,\quad BA=-2,\quad |AB|=|BA|=2;$$
$$CD=-3,\quad DC=3,\quad |CD|=|DC|=3.$$

設 $A,B,C$ 是軸上任意三點，則 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 和 $\overline{AC}$ 的值 $AB,BC$，和 $AC$ 間成立下面關係式：

(1)
$$AB+BC=AC.$$

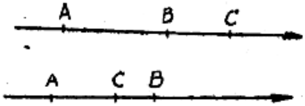

圖 1.3

值得注意，这关系式的成立並不受 $A,B,C$ 三点在軸上排列的情形所限制．因此，要証明这关系式成立，必須証明它对於一切可能的排列情形都成立．我們可以把 $A,B,C$ 在軸上排列的情形分成兩类：1° $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的方向相同，2° $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的方向相反．下面只要証明(1)式在这兩种場合中都成立．如果 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的方向相同，則 $|AC|=|AB|+|BC|$ 且 $AB,BC$ 和 $AC$ 的符号相同，因此 (1) 式成立．如果 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的方向相反，則 $|AC|$ 为 $|AB|$ 和 $|BC|$ 之差．$AC$ 的符号和 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 中較長者的值的符号相同．因此，根据代数中的加法原則，知道 (1) 式也成立．

(1) 式可以推廣．設 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 是軸上任意的 $n$ 个点，則 $\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\cdots,\overline{A_{n-1}A_n}$ 的值 $A_1A_2$，$A_2A_3,\cdots,A_{n-1}A_n$ 間成立下面关系式：

(2)
$$A_1A_2+A_2A_3+\quad+A_{n-1}A_n=A_1A_n.$$

事实上，我們只要应用数学归納法並利用 (1) 式，(2) 式便可得証．

## § 1.2　直線上的座標，數軸

我們將提出一种用数來決定直線上点的位置的方法．

設有任一直線．首先，指定它的正向，这样，这直線成为一个軸了．再在直線上任意取定一点．用字母 $O$ 表示这一点．此外，取定一單位長度．我們規定，这直線(軸)上的任意点 $P$ 和这样的数 $x$ 对应，这數 $x$ 等於這軸上以 $O$ 爲起點，以 $P$ 爲終點的

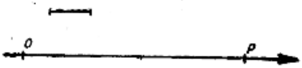

圖 1.4

有向線段 $\overline{OP}$ 的值 $OP$.

$$OP=x.$$

这數 $x$ 稱爲點 $P$ 在直線上的座標．依照这种規定，已知直線上任意一点 $P$，必有一确定的数 $x$ 作为它的座标．反过來，已知一数 $x$，可在直線上决定一点 $P$，这点 $P$ 的座标是等於 $x$ 的．

点 $O$ 称为原点．如果这軸的位置是水平的，且正向是自左至右，则容易明白，在点 $O$ 之右的点，它們的座标都是正数，在点 $O$ 之左的点，它們的座标都是負数．点 $O$ 的座标是零．

上面我們使数和直線上的点之間建立了一一对应的关系．**所謂數軸，就是這樣的直線，這直線上的點和數之間已建立起一一對應關係的．**

下面我們証明一个很有用的公式．設 $P_1$, $P_2$ 是直線上任意兩点．$P_1$ 的座标为 $x_1$，$P_2$ 的座标为 $x_2$，則 $\overline{P_1P_2}$ 的值 $P_1P_2$ 等於 $x_2-x_1$，卽

(1) $$P_1P_2=x_2-x_1.$$

証明　根据 § 1.1 的 (1) 式

$$OP_1+P_1P_2=OP_2,$$

由此，$$P_1P_2=OP_2-OP_1.$$

但 $$OP_2=x_2,\qquad OP_1=x_1,$$

所以，$$P_1P_2=x_2-x_1.$$

例　已知直線上点 $A$, $B$, $C$, $D$ 的座标依次为 5, $-1$, $-8$, 2; 求 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 和 $\overline{DB}$ 的值及長度．

解: $$AB=-1-5=-6,\qquad |AB|=6.$$
$$CD=2-(-8)=10,\qquad |CD|=10.$$
$$DB=-1-2=-3,\qquad |DB|=3.$$

## § 1.3　平面上的笛卡兒直角座標

在直線上的点和数之間已建立起一一对应关系的基礎上，我們提出一种用数來决定平面上点的位置的方法．

在平面上选定兩条互相垂直的直線.分別指定这兩条直線的正向.这样,这兩条直線已成为兩个軸了.按任意次序把这兩个軸編号,一个称为第一軸,另一个称为第二軸.此外,取定一單位長度,並把兩軸的交点作为第一軸的原点,同时也作为第二軸的原点.用字母 $O$ 表示这共同原点.这样,按照 § 1.2 所說明的方法,現在这兩个軸都已成为数軸了.这就是說,第一軸上任意点 $P$ 有确定的数 $x$ 与之对应,$x$ 卽 $P$ 在第一軸上的座标.同样地,第二軸上任意点 $Q$ 也有确定的数 $y$ 与之对应,$y$ 卽 $Q$ 在第二軸上的座标.

通常,第一軸取水平位置,正向自左至右;第二軸取垂直位置,正向自下至上.第一軸也称横軸或 $x$ 軸.第二軸也称縱軸或 $y$ 軸.在描出的 $x$ 軸及 $y$ 軸末端,分别寫上字母 $x$ 及 $y$.

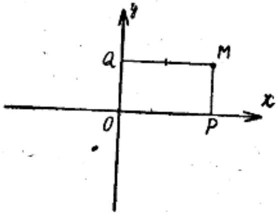

圖 1.5

現在我們可以使平面上任意一点 $M$ 的位置用兩个有一定次序的数來決定.过点 $M$ 向第一軸作垂線得垂足 $P$. $P$ 称为点 $M$ 在第一軸上的射影.設點 $P$ **在第一軸上的座標爲數** $x$,**則稱數** $x$ **爲點** $M$ **的第一座標或横標**.同样地,过点 $M$ 向第二軸作垂線得垂足 $Q$. $Q$ 称为点 $M$ 在第二軸上的射影.**設點** $Q$ **在第二軸上的座標爲數** $y$,**則稱數** $y$ **爲點** $M$ **的第二座標或縱標**.記号 $M(x, y)$ 表示点 $M$ 的横标为 $x$ 而縱标为 $y$.

依照上述方法,当平面上取定了 $x$ 軸和 $y$ 軸之后,如果已知平面上任意一点 $M$ 的位置,則点 $M$ 的座标 $(x, y)$ 便可确定.反过來,如果已知平面上某点 $M$ 的座标为 $(x,y)$,則点 $M$ 的位置也可确定.方法是这样的:在横軸上取定以数 $x$ 为座标的点 $P$.在縱軸上取定以数 $y$ 为座标的点 $Q$.过 $P$ 作平行縱軸的直線.过 $Q$ 作平行横軸的直線.这兩直線的交点卽点 $M$ 的位置.

上述使平面上点的位置可用兩个有次序的数(卽点的座标)來決定的方法,是十七世紀法國数学家笛卡兒所提出的,因此这种点的座

标便称为平面上点的笛卡兒直角座标．在平面上取定 $x$ 軸和 $y$ 軸而使平面上点的位置可用它的座标（$x$, $y$）來决定这回事，称为**在平面上導入座標系** $xOy$．以后我們常假定平面上已導入座标系 $xOy$ 而不再声明．

必須指出：**在平面上導入座標系 $xOy$ 後可使平面上的點和一對有一定次序的實數 $(x,y)$ 之間建立一一對應關係**这件事是有头等重要意义的，因为它是解析几何学的基礎．

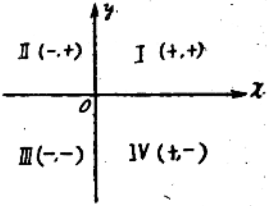

圖 1.6

$x$ 軸和 $y$ 軸都称为座标軸．兩軸的公共原点 $O$ 称为座标原点．兩軸將平面分成四个部分．这些部分称为**象限**．四个象限有一定的次序．在正的 $x$ 半軸和正的 $y$ 半軸之間的是第Ⅰ象限．在正的 $y$ 半軸和負的 $x$ 半軸間的是第Ⅱ象限．在負的 $x$ 半軸和負的 $y$ 半軸之間的是第Ⅲ象限．在負的 $y$ 半軸和正的 $x$ 半軸之間的是第Ⅳ象限．

設点 $M$ 的座标为 $(x,y)$．如果 $x>0$, $y>0$，則 $M$ 在第Ⅰ象限．如果 $x<0$, $y>0$，則 $M$ 在第Ⅱ象限．如果 $x<0$, $y<0$，則 $M$ 在第Ⅲ象限．如果 $x>0$, $y<0$，則 $M$ 在第Ⅳ象限．

## §1.4　座標變換問題

平面上点的座标，是与平面上所導入的座标系有关的．平面上同一点 $M$ 对不同的座标系 $xOy$ 和 $x'O'y'$ 会有不同的座标（$x$, $y$）和 $(x',y')$．

所謂座标变换的問題是：平面上有兩不同的座标系 $xOy$ 和 $x'O'y'$．平面上任意一点 $M$，它在座标系 $xOy$ 下的座标是（$x$,$y$），在座标系 $x'O'y'$ 下的座标是 $(x',y')$．$x$,$y$ 和 $x'$,$y'$ 間的关系如何？或者說，如何用 $x'$,$y'$ 來表示 $x$ 和 $y$？反过來，如何用 $x$,$y$ 來表示 $x'$ 和 $y'$？

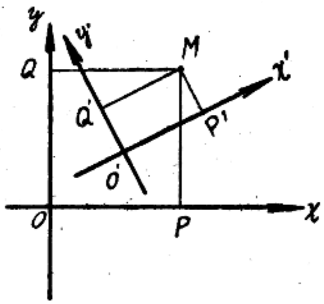


圖 1.7

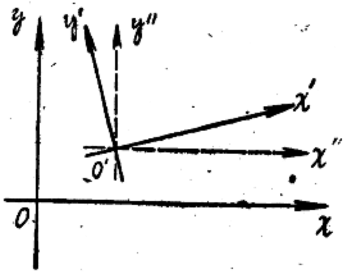


圖 1.8

我們可以設想，座标系 $x'O'y'$ 是由座标系 $xOy$ 經过兩种运动后所得到的.

1° 座标軸的方向不变，原点从 $O$ 移至 $O'$. 这样，$xOy$ 先运动到 $x''O'y''$. 这种座标軸的运动，称为**軸的平移**.

2° 原点不动，座标軸旋轉某一角度. 这样，$x''O'y''$ 运动到 $x'O'y'$. 这种座标軸的运动，称为**軸的旋轉**.

当然，也可設想先有軸的旋轉而后有軸的平移，結果还是一样的.

下面我們分别來討論：在軸的平移和軸的旋轉下，$x,y$ 和 $x',y'$ 間的关系如何？

## § 1.5 軸的平移

設有原点不同而軸的方向相同的兩座标系 $xOy$ 和 $x'O'y'$. 为方便起見，我們称座标系 $xOy$ 为旧系，座标系 $x'O'y'$ 为新系，因为可以設想新系是由旧系經軸的平移得到的. 点 $O'$ 在旧系下的座标設为 $(a,b)$，在新系下的座标当然为 $(0,0)$. 平面上任意点 $M$ 在旧系下的座标为 $(x,y)$，在新系下的座标为 $(x',y')$. 現在來研究座标 $(x,y)$ 和座标 $(x',y')$ 間的关系.（圖 1.9）

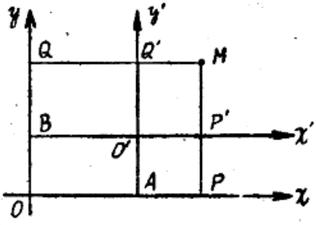


圖 1.9

設点 $M$ 在 $x$ 軸和 $x'$ 軸上的射影順次为 $P$ 和 $P'$，又点 $O'$ 在 $x$ 軸上的射影为 $A$．則 $OP=x$，$O'P'=x'$，$OA=a$．根据 § 1.1 的(1)式得

$$OP=OA+AP.$$

但 $$AP=O'P',$$

因此 $$OP=OA+O'P',$$

卽 $$x=a+x'.$$

同用样方法可得 $$y=b+y'.$$

这样我們就得到了在軸的平移下用新系的座標表示舊系的座標的公式：

(1) $$\begin{cases} x=x'+a \\ y=y'+b. \end{cases}$$

將 (1) 式移項便可得在軸的平移下用舊系座標表示新系座標的公式：

(2) $$\begin{cases} x'=x-a \\ y'=y-b. \end{cases}$$

## § 1.6 軸的旋轉

設平面上有一座标系 $xOy$．現在原点 $O$ 不动，將兩軸都旋轉 $\alpha$ 角，这样就得到一新的座标系 $x'Oy'$．平面上任意点 $M$ 在旧系和新系下的座标順次用 $(x,y)$ 和 $(x',y')$ 表示．現在來研究座标 $(x,y)$ 和座标 $(x',y')$ 間的关系．(圖1.10)

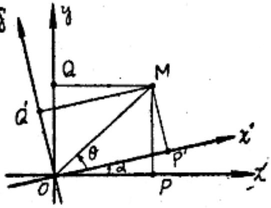


圖 1.10

設点 $M$ 在 $x$ 軸，$y$ 軸，$x'$ 軸，$y'$ 軸上的射影順次为 $P,Q,P',Q'$．則 $OP=x$，$OQ=y$，$OP'=x'$，$OQ'=y'$．

又設 $\angle P'OM=\theta$．則 $x=OP=|OM|\cos(\alpha+\theta)$

$$=|OM|\cos\alpha\cos\theta-|OM|\sin\alpha\sin\theta.$$

但 $$|OM|\cos\theta=OP'=x',$$