普通高等院校“十一五”规划教材

高等代数

Advanced Algebra

王佳登 编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校“十一五”规划教材

高等代数

Advanced Algebra

王住登　编

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书内容包括矩阵代数、行列式、向量组与线性方程组、一元多项式、二次型、线性空间、线性变换和欧几里得空间以及和这些内容相关的习题、数学实验和MATLAB练习．每章后都附有阅读材料，内容包括：数学归纳法、等价关系与集合的分类、线性方程组的一个简易解法、整数的整除性、三大尺规作图问题、集合与映射、黄金分割、最小二乘法和历史上部分数学大师介绍．

本书在致力于向学生讲授比较系统的、能体现现代数学思想的高等代数基本知识和方法的同时，注重代数概念的应用背景介绍，以利于学生更好地理解代数理论，并通过实验培养学生应用代数方法解决实际问题的能力．

本书可作为一般普通高等学校应用数学、统计学、金融数学、计算机科学与技术和工科部分专业的高等代数教材或教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等代数／王住登编．—北京：国防工业出版社，2009.6

普通高等院校"十一五"规划教材

ISBN 978-7-118-06273-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．王…　Ⅲ．高等代数－高等学校－教材　Ⅳ．O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第044598号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048)

北京四季青印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本787×1092　1/16　印张17¾　字数405千字

2009年6月第1版第1次印刷　印数1—4000册　定价32.00元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前 言

高等代数是数学与应用教学、信息与计算科学、统计学等专业的一门重要的基础课程，通过本课程的教学，一方面为后续课程如离散数学、数值分析、运筹学、实变函数与泛函分析等提供必要的基础知识，同时为培养学生的计算技能、抽象思维能力和逻辑推理能力提供必要的训练．随着科学技术突飞猛进的发展，高等代数知识已经渗透到经济、金融、信息、社会等各个领域，人们越来越深刻地感觉到高等代数课程在传授给学生相关的代数知识的同时，应该充分发挥数学软件的优势，将代数知识应用到相关学科中去，应该提高学生使用代数方法去思考并解决实际问题的能力．为此，在编写本教材时，我们做了下面几方面的尝试：

(1) 在教材内容的选择和安排上，我们遵循由浅入深，由易及难，由具体到抽象的原则，使知识的水平和难度逐步提高．从学生容易接受的矩阵及其运算出发，借助初等变换来讨论行列式的性质和解线性方程组，这样就避开了一开始就让学生接触难以掌握的多项式理论或行列式理论，以利于学生有时间调整并适应大学的学习方式．同时，较早地引进矩阵使得有些定理(如矩阵乘积的行列式定理、克拉默法则)的证明十分简单，避免了不必要的重复．多项式理论是高等代数中不可缺少的内容，为了降低教学难度并减少教学课时，我们只介绍最基本也是必需的内容．在最后三章里，我们安排了比较抽象的线性空间、线性变换和欧几里得空间内容．

(2) 在教材内容的处理方法上，注重理论联系实际，加强概念与理论的背景和应用介绍，利用对实际问题的讨论，帮助学生理解抽象的代数概念．我们考虑了婚姻状况计算的简单模型、网络和图、情报检索模型和信息编码等实际问题，说明矩阵运算是很有用的；利用方程组理论，讨论了商品交换的经济模型；借助线性空间理论，给出了拉格朗日插值公式并讨论了人口迁移问题；说明了抽象的线性变换和计算机图形、动画以及抽象的特征值、特征向量和伴性基因的分布规律之间的联系；利用内积和相关矩阵概念，讨论了心理学家斯皮尔曼的因素分析模型．

(3) 结合课程内容，介绍 MATLAB 在高等代数计算中的用法，让学生学会将高等代数知识和数学软件结合起来去解决实际问题，进一步帮助学生对一些抽象代数概念的理解，加深对代数理论的认识．借助于 MATLAB 这一工具，给出了矩阵、向量和多项式的运算，求解线性方程组，求矩阵的特征值与特征向量以及向量组的正交化与矩阵分解程序，也可以绘制出非常实用并且有趣的二维图形．通过 MATLAB 练习，激发学生的学习兴趣，引导学生去揭示、发现一些代数现象，进一步加深对所学内容的认识和理解.

(4) 注重课程的自身系统性和科学性，内容处理突出主线．矩阵的形式与运算都比较简单，教学实践证明，矩阵作用大，学生易于接受和掌握．除一元多项式理论外，教材内容始终以矩阵为主线，以初等变换作为处理矩阵和分块矩阵的主要方法．

本书可作为一般普通高等学校数学与应用教学、信息与计算科学、统计学等专业的高等代数课程一学年的教材（每周五课时可以完成全部教学内容，包括习题课及实验课），也可以用做对线性代数要求较高的某些理工科专业（如理论物理、计算机科学与技术和工科部分专业）的教材或教学参考书．

本书得到了宁波市重点专业“信息与计算科学”和宁波市重点学科“应用数学”的基金资助，徐成中、杨红霞和王远在本书编写过程中做了大量的工作，在此一并表示感谢.

限于编者水平，本教材肯定有许多不足，恳请读者批评指正．

编 者

2009 年 3 月

目　　录

第1章　矩阵代数

矩阵是代数学的一个重要研究对象，也是数学各分支不可缺少的工具．矩阵论方法在处理许多实际问题时非常有力，本章将引入矩阵的运算并讨论它们的一些基本性质.

1.1　数　域

我们过去熟悉的数集有自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 和复数集 $\mathbf{C}$.

同一个问题，在不同的数集中，会有不同的答案．小学低年级学生说2不能除3，意思是：在自然数集 $\mathbf{N}$ 中，$2x=3$ 无解，也就是说2除3的结果不在 $\mathbf{N}$ 中．但是，在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中，$2x=3$ 有唯一解，也就是说2除3的结果在 $\mathbf{Q}$ 中.

在给定的数集中，我们经常关心两个数的运算结果是否仍在这个数集中．任何两个 $\mathbf{Q}$ 中的数加、减、乘、除（除数不为零）的结果都在 $\mathbf{Q}$ 中．实数集 $\mathbf{R}$ 和复数集 $\mathbf{C}$ 也有这个性质．但是在整数集 $\mathbf{Z}$ 中，设 $a,b\in\mathbf{Z}$，$\frac{a}{b}$ 不一定在 $\mathbf{Z}$ 中．我们把 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 的共同点抽象出来，得到数域的定义．

定义1.1　设 F 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个子集．如果它满足下面两个条件：

（1）$0,\ 1\in F$；

（2）F 中任意两个数加、减、乘、除（除数不为零）的结果都在 F 中；

那么称 F 为一个数域.

条件（2）也称为对加、减、乘、除封闭.

$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 是数域．$\mathbf{N},\mathbf{Z}$ 不是数域.

对加、减、乘封闭的 $\mathbf{C}$ 的非空子集称为数环.

显然，数域是数环．$\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C},\mathbf{Z}$ 是数环，$\mathbf{Z}$ 常称为整数环．$\mathbf{N}$ 不是数环.

例1.1　令 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，则 F 是一个数域.

首先，容易看出，F 是一个数环，并且 $0+0\sqrt{2},1+0\sqrt{2}\in F$，所以定义1.1中条件（1）成立.

现在设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$. 那么 $c-d\sqrt{2}\neq 0$. 否则，在 $d=0$ 的情形将得出 $c=0$，这与 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 的假设矛盾；在 $d\neq 0$ 的情形将得出 $\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，这与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾．因此

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in F.$$

这就证明了 F 是一个数域.

最后证明数域的一个重要性质.

定理 1.1 任意数域都包含有理数域 Q.

证明 设 F 是一个数域. 那么由条件(1),$0,1 \in F$,用1和它自己重复相加,可得全体正整数,因而全体正整数都属于 F. 另一方面,F 也含有0与任一正整数的差,即含有全体负整数. 因而 F 含有全体整数. 这样,F 也含有任意两个整数的商(分母不为0),故 F 含有一切有理数. □[①]

由定理 1.1 可知:有理数域 Q 是最小的数域.

本书中,如果没有特别说明,F 总表示任意一个数域.

1.2 矩阵及其运算

1.2.1 矩阵的概念

在日常生活中,矩阵无时无刻不出现在我们身边,例如,班级中学生各科考试的成绩、企业销售产品的数量和单价、超市物品配送路径等. 当抽出其具体内容时,它们的数量都可以列成矩形表格,我们给这样的矩形表格一个名称.

定义 1.2 数域 F 上 $m \times n$ 个数 a_{ij},排成 m 行 n 列的数表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵,简记为 $A = (a_{ij})$,有时为了强调矩阵的行数和列数也记为 $A = (a_{ij})_{m\times n}$,每个第 i 行第 j 列位置上的数 a_{ij} 称为矩阵 A 的元素.

为了对矩阵的概念以及下面要讨论的问题的背景有些了解,我们来介绍一些提出矩阵概念的问题.

例 1.2 在解析几何中考虑坐标变换时,如果只考虑坐标系的转轴(逆时针方向转轴),那么平面直角坐标变换的公式为

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases}$$

式中:θ 为 x 轴与 x' 轴的夹角.

显然,新旧坐标之间的关系,完全可以通过公式中系数所排成的 2×2 矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

表示出来.

例 1.3 假设某一信源 X 输出样值为 $x_i, x_i \in \{a_1, \cdots, a_n\}$,经过有失真的信源编码器,输出 Y,样值为 $y_j, y_j \in \{b_1, \cdots, b_m\}$. 如果 $x_i = y_j$,则认为没有失真;如果 $x_i \neq y_j$,那么就产

---

① 本书中,用符号 □ 表示论证结束.

生失真. 失真的大小,用一个量来表示,即失真函数① $d(x_i,y_j)$,来衡量用 y_j 代替 x_i 所引起的失真程度. 将所有的 $d(x_i,y_j)$ 排列起来,用矩阵表示为

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d(a_1,b_1) & d(a_1,b_2) & \cdots & d(a_1,b_m) \\ d(a_2,b_1) & d(a_2,b_2) & \cdots & d(a_2,b_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d(a_n,b_1) & d(a_n,b_2) & \cdots & d(a_n,b_m) \end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{d}$ 为失真矩阵,它能全面反映信源编码器的失真信息.

例 1.4 在讨论国民经济的数学问题中也常用到矩阵. 例如,给出三张表,表 1.1 中 a_{ih} 表示第 i 车间计划生产产品 h 的产量;表 1.2 中 b_{hj} 表示生产一件产品 h 需要材料 j 的量;表 1.3 中 c_{ij} 表示第 i 车间需要材料 j 的量.

表 1.1 计划产量表

	产品 1	产品 2	产品 3
1 车间	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2 车间	a_{21}	a_{22}	a_{23}

表 1.2 材料单耗表

	材料 1	材料 2
产品 1	b_{11}	b_{12}
产品 2	b_{21}	b_{22}
产品 3	b_{31}	b_{32}

表 1.3 材料分配表

	材料 1	材料 2
第 1 车间	c_{11}	c_{12}
第 2 车间	c_{21}	c_{22}

上面三张表可以用三个矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

简单地表示出来.

以后用大写的黑体拉丁字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots$,或 $(a_{ij}),(b_{ij}),\cdots$ 来表示矩阵.

有时候,也可以把 $m\times n$ 矩阵写成 $\boldsymbol{A}_{mn},\boldsymbol{B}_{mn},\cdots$,或 $(a_{ij})_{mn},(b_{ij})_{mn},\cdots$ 一个 $1\times n$ 矩阵

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为行矩阵或 n 维行向量,一个 $n\times 1$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵或者 n 维列向量.

一个所有元素都是零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵,记为 $\boldsymbol{0}_{mn}$,简记为 $\boldsymbol{0}$.

一个 $m\times m$ 矩阵称为 m 阶方阵. m 阶方阵

---

① 常用的失真函数有:均方失真 $d(x_i,y_j)=(x_i-x_j)^2$;绝对失真 $d(x_i,y_j)=|x_i-y_j|$;相对失真 $d(x_i,y_j)=\dfrac{|x_i-y_j|}{|x_i|}$;误码失真 $d(x_i,y_j)=\sigma(x_i,y_j)=\begin{cases}0, & x_i=y_j\\ 1, & 其他\end{cases}$ 等.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

称为 m 阶单位阵,记为 $\boldsymbol{E}_m$,简记为 $\boldsymbol{E}$.

定义 1.3 两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{ls}$,如果彼此行数相等($m=l$)及列数相等($n=s$),而且所有对应位置上的元素相等($a_{ij}=b_{ij}, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$),则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.2.2 矩阵的加法和数乘

定义 1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$,其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

由定义可见,相加的两个矩阵必须要有相同的行数和列数,矩阵相加就是对应位置的元素相加. 由于矩阵的加法归结为它们元素的加法,也就是数的加法,所以,矩阵关于加法显然满足如下规律(以下设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵):

(1) 结合律:$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$.

(2) 交换律:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(3) 对所有的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,都有 $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

(4) 对每一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$,必存在唯一矩阵 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{mn}$ 使得

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}.$$

$-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵. 由此可定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

定义 1.5 对任意数 k 及矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$,定义数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{mn}.$$

矩阵的数乘运算显然满足以下规律:

(1) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

(2) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(3) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(5) $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,$(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

式中:k,l 为数;$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

1.2.3 矩阵的乘法

对于例 1.4 中三个矩阵,我们容易看出 $c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}$. 一般地,$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$,就是说 c_{ij} 是表 1.1 的第 i 行与表 1.2 的第 j 列对应的元素乘积之和. 我们很自然地认为第三个矩阵是第一个矩阵与第二个矩阵的乘积.

在处理矩阵的乘法时,用求和符号 $\sum$ 比较简便,这里先介绍求和符号 $\sum$ 以及它的

一些简单性质.

在数学中常常碰到若干项相加的式子,如

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

为了简便起见,把上式写成

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$\sum$ 称为求和符号,a_i 表示一般项,求和符号上下加"n","$i = 1$"表示 i 的取值由 $1 \sim n$,i 称为求和指标,它只起辅助作用,把带有求和符号的式子还原为若干项相加的式子时,它是不出现的. 另外,若干项相加的式子也可以写成

$$\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

因此,只要不与求和符号中出现的其他指标相混淆,用什么字母作为求和指标都可以.

有时,相加的数是用若干个指标来编号的,求这样的和时要用多重求和符号. 例如,双重求和符号 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$ 的意思是,先对第二个求和符号求和,再对第一个求和符号求和. 这样,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j &= \sum_{i=1}^{m} a_i\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= a_1b_1 + \cdots + a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_2b_n + \cdots + a_mb_1 + \cdots + a_mb_n.\end{aligned}$$

如果交换求和符号的次序,那么就有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) b_j \\ &= a_1b_1 + \cdots + a_mb_1 + a_1b_2 + \cdots + a_mb_2 + \cdots + a_1b_n + \cdots + a_mb_n.\end{aligned}$$

这两个等式的右端相等,因此有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j,$$

这就是说,双重求和符号可以交换次序.

下面引入矩阵的乘法.

定义 1.6 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是 $n \times s$ 矩阵. 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘,记为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$,这里乘积矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ 是 $m \times s$ 矩阵,它的第 i 行第 j 列元素

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

它是第一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行上每一个元素与第二个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列上对应元素乘积之和.

由矩阵乘法的定义可以看出,两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘时,要注意它们的行数和列数,必须是左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数,而且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数,乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数,所以乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数和列数可能与 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都不同.

例 1.5　设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{bmatrix},$$

那么

$$C=AB=\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-6&7\\10&-2&6\\-2&17&10\end{bmatrix}.$$

乘积的矩阵中各个元素是根据定义 1.6 中的公式得出的，例如，第二行第一列的元素 10 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第二行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第一列对应元素乘积之和：

$$(-1)\times0+1\times1+3\times3+0\times(-1)=10.$$

其余可类似得到.

例 1.6　如果

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{bmatrix}$$

是一个线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s\end{cases}$$

的系数矩阵，而

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_s\end{pmatrix}$$

分别是未知量和常数项所成的 $n\times1$ 和 $s\times1$ 矩阵，那么线性方程组就可以写成矩阵等式

$$AX=B.$$

可以验证矩阵乘法运算满足下面规律：

(1) 结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) 乘法对加法的分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)=\boldsymbol{AB}_1+\boldsymbol{AB}_2,(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}$；

(3) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$;

(4) $AE = A, EB = B$;

(5) $A0 = 0, 0B = 0$;

这里 A 是 $s \times n$ 矩阵,B, B_1, B_2 是 $n \times m$ 矩阵,C 是 $m \times r$ 矩阵.

但是,矩阵的乘法不适合交换律,即一般说来,

$$AB \neq BA.$$

这是由于,一方面在乘积中要求第一个因子的列数等于第二个因子的行数,否则没有意义. 所以当 AB 有意义时,BA 不一定有意义. 另一方面,即使 AB 与 BA 都有意义,它们的阶数也不一定相等,因为乘积的行数等于第一个因子的行数,列数等于第二个因子的列数. 如例1.5中 AB 是一个 3×3 矩阵,而 BA 是一个 4×4 矩阵. 即使相乘的矩阵都是 $n \times n$ 矩阵,这时,AB 与 BA 都有意义,而且都是 $n \times n$ 矩阵,但它们也不一定相等. 例如,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

而

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

在这个例子中还看到,两个不为零的矩阵的乘积可以是零,这是矩阵乘法的一个特点. 由此还可得出矩阵乘法的消去律不成立,即当 $AB = AC$ 时,不一定有 $B = C$.

由乘法的结合律,可以归纳定义方阵的方幂. 设 A 是一个 n 阶方阵,定义

$$A^0 = E, \quad A^{k+1} = A^k A,$$

这里 k 为非负整数. 换句话说,A^k 就是 k 个 A 连乘. 当然,方幂只能对行数与列数相等的矩阵来定义. 由乘法的结合律,不难证明

$$A^k A^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl},$$

这里 k, l 是任意正整数. 因为矩阵乘法不适合交换律,所以 $(AB)^k$ 与 $A^k B^k$ 一般不相等.

1.2.4 矩阵的转置

定义 1.7 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix},$$

A 的转置矩阵就是互换 A 的行列得到的矩阵,记为 A^{T},即

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}.$$