



小寧学代数

(二)

代数的恆等变形

馬文元、陈文彦編著
山东人民出版社

13.131
232
V2(1)

0 122

10/2

小 寧 学 代 數

(二)

代 數 式 的 恒 等 变 形

馬 文 元 陈 文 彦 編 著

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

書号: 1405

小 寧 学 代 数 (二)

編著者: 馬 文 元、陈 文 彦

山东省書刊出版業營業許可証出〇〇一號

出版者: 山 东 人 民 出 版 社

濟南經九路勝利大街

發行者: 新 華 書 店 山 东 分 店

濟南經九路勝利大街

印刷者: 山 东 新 華 印 刷 廠

濟南經九路三十六號

開本: 787×1092 1/32

印張: 2 1/4

字數: 40千

〔濟〕1—30,000

1956年3月第 一 版

1956年3月第一版第一次印刷

定價 二 角

目 錄

(五) 代數运算的基本規律.....	1
趵突泉畔的清晨	1
基本概念和規律	4
符号規則的介紹	7
再介紹指數規則	9
运算的基本規律	13
(六) 整式的乘法.....	17
在河濱釣魚的時候	17
多項式乘以多項式	20
(七) 整式的除法.....	25
在小寧的家裏	25
恰好表哥按時來了	29
如果不能除盡	33
(八) 因式分解法.....	40
在大明湖畔討論因式分解	40
怎樣進行因式分解	48
(九) 分式的运算.....	53
分式的數值	53
小寧的表哥解答了問題	58
談一談通分和約分	63
最後談到分式运算	66

五 代數运算的基本規律

趵突泉畔的

清晨

小寧和他的表哥，从济南車站分手，
分別回到自己的家中。

第二天清晨，窗外樹叢中的小鳥啾啾乱叫。小寧好久沒听到这声音了，現在又使他想起去年夏天準備投考中學時的情景：每天埋头在算術書和習題本裏面，祇知道演算難題，不知為什麼要演算；生記硬背了一些公式和解法，也不明白都是怎样搞出來的。現在經過一年的學習，對算術上的一些基本法則能够掌握了；在火車上又經過王老師的啓發，不但對代數的基本概念有了初步認識，就是對算術的認識也提高了。今天睡醒後，仍有些疲倦，躺在床上，順手拿起一本昨天从家裏書架上找到的，大姐去年在初中念過的代數。這本書和王老師的那一本是一樣的。前幾頁看起來很不費事，後面的代數乘法、除法、因式分解和分式等等就似懂非懂了。自己預習代數的計劃祇完成了一部分，一定要堅持下去，在暑假中把這本代數的主要部分學懂。想起在車站和表哥分手的時候，表哥答應在暑假裏幫助自己學一些量長度、面積和體積的道理與方法。現在再想一想，無妨請

表哥多花一些時間，幫助自己把代數的預習計劃全部完成。

想到這裏，也就忘了疲倦，馬上起床，準備去找表哥。

表哥的住址在趵突泉後面一個小巷子裏，当他找到表哥的時候，房子裏已有些熱了。表哥拉着他到了趵突泉。兩個人在池子旁邊一個有樹蔭的地方坐下來。看見泉水噴出不算太高，可是池子裏的水却是那樣清澈。時間還早，遊人不多，靜悄悄的，不時有微風吹來，顯得十分清靜、涼爽。

小寧告訴表哥，自己想再多學一點代數，請表哥幫忙。表哥想了一想說道：「在火車上，王老師把代數上最基本的概念都介紹過了；二年級的代數，除去這些基本概念以外，就剩下關於代數式的恆等變形了。這就如同算術裏面有整數的四則運算和分解因數，有分數和小數的四則運算一樣。作為代數式恆等變形的理論基礎是代數上一些基本概念和規律，祇要把這些基本概念和規律掌握住，困難就不大了。我們可以訂一個計劃，暫時預定分作四次，談一談代數式的乘法、除法、因式分解和分式運算。如果弄清楚這些算法的本質，掌握了它們互相的聯繫，明確了恆等變形的目的和要求，你再自己作些習題，養成運算的熟練技巧；那末你的收穫將要不限於預習代數而是基本上學會了初中二年級的代數。開學以後，再學習這門課程，就可以更深入一些了。」小寧听表哥談到這裏，心裏有說不出的高興。「那末，今天就開始談好不好？」小寧很興奮地說，「代數式的恆等變形到底是什麼呢？代數式的乘法、除法是不是很難學呢？」

表哥說：「今天我們先談一談代數式恆等變形的意義，下次再談各種運算法。恆等變形就是改變代數式的形狀而不改變它的數值。各種代數運算的目的都是為了把代數式恆等變形由繁化簡；運算的結果也要用恆等變形公式來表達。在火車上，王老師曾和你談過代數減法，如：

$$(3a+2b)-(2a+3b)=a-b$$

這是表示被減式 $3a+2b$ ，減式 $2a+3b$ ，和差式 $a-b$ 的關係的恆等變形公式，或者就叫做恆等式。從算術觀點來講，可以把這個恆等式看作算式：原有一個數是 $3a+2b$ ，減去另一個數 $2a+3b$ ，還剩下一個數 $a-b$ 。初學代數的時候，往往是從這個觀點出發，把恆等式看作算式，以加、減、乘、除等運算為手段，以求出和、差、積、商為目標。但是從代數觀點來講，並不滿足於這些。算術上求出和、差、積、商往往就是求出一個問題的解答或結果；代數上求出和、差、積、商一般地說祇是演算過程中的一個步驟。代數上要研究方程的解法，要研究函數的變化，在這種研究的过程中，免不了要把代數式化繁為簡，例如解下面方程的時候，

$$3x+2=2x+3,$$

可以先化成 $(3x+2)-(2x+3)=0,$

再進一步化成 $x-1=0,$

因此得到 $x=1.$

這是你知道的，那末你看在這個解方程的過程中，不是作了一次減法嗎？不是利用了一次恆等變形公式嗎？可是解方程

的最後目标是求方程的根，並不是求減法的差數。因此我們認識到恆等變形是學習代數時必須掌握的技巧，它的內容又是多式多樣的。加、減、乘、除是最常見的；有了乘積，反過來進行因式分解也非常有用；分式化簡和將來在高中才能學到的那些與開方法有關的運算都很重要。這些運算的目的，都是使代數式形狀變換而數值不變，因此叫作恆等變形。┐

小寧靜靜地听着，從水池方面吹過來的小風，帶着一些清涼香甜的氣息；泉水淙淙地流着，水珠兒濺起來又落到池子裏面。這幽靜的景色使小寧越發心情煥發，把王老師在火車上的談話和表哥現在所講的恆等變形的道理聯繫起來，不覺恍然大悟，原來今天早晨起床前看代數的時候，自己弄不明白的地方，就是這些恆等變形。現在雖然還不知道它們的具體內容，可是初步知道了它們的意義，經過一番思索，不由得問道：┐恆等變形內容這樣複雜，學習起來一定很有困難，表哥你想四次談話就把它談完，是不是時間有些不夠。┐

┐不是這樣的，四次可以談完，┐表哥搖一搖頭說，┐恆等變形內容雖很複雜，可是道理並不複雜。如果我們能夠重點地先搞明白一些基本概念和基本規律，學習起來就比較有系統，容易舉一反三，不至於零零碎碎了。┐

基本概念和
規律

小寧急於想知道什麼是基本概念和規律，他讓表哥立刻替他解釋。表哥覺得有些口渴，從衣袋裏拿出兩隻蘋果，掏出小刀，一面削菓子皮，一面談：┐我們學習數學的時候，總是

覺得頭緒很多，方法也很多；學會了容易忘，學過了不會用。這就是由於沒有掌握最基本的東西；不能提綱攜領，抓不住原則；僅靠生記硬背一些公式和規則，怎能解決問題呢？比方關於代數式的加、減、乘、除四種運算，內容原是不同的，但是從代數式恆等變形的觀點來看，它們就是一樣的，我們必須找出構成代數式恆等變形的最基本的東西，像是符號規則，指數規則，交換律，結合律，分配律等等。把這些基本概念和規律弄清楚，就可以明瞭為什麼代數式可以進行恆等變形，怎樣進行，以及進行的目的和要求是什麼了。以後通過適當的練習，加以鞏固，就可以掌握代數式的各種算法了。]

表哥一邊說着，一邊把削好皮的一隻蘋果送給小寧，自己再削第二隻。小寧接過蘋果，一邊吃一邊聽；聽到入神的時候，就光聽不吃了。

小寧聽表哥講了一片道理，体会到學代數的時候不要零零碎碎地光學會些死板的算法，而是要搞清楚運算的基本道理。這些基本的道理聽起來並不生疏，像是交換律、分配律等等，在學算術的時候就知道，可是當時並沒有察覺它們的重要性，現在聽表哥一說，才認識到原來算術的運算和代數的運算是一個道理，那些基本概念和基本規律正是它們的共同綱領。不過自己還有些弄不明白的地方，這種基本的規律究竟有多少種？怎樣用它們來解決運算問題？當表哥的話才講完，小寧立刻提出一個問題：「基本的概念和規律有多少

种呢？什麼問題都靠它們來解決嗎？」

表哥正嚼着蘋果，覺得小寧的想法不正確，先把頭搖了一搖，停了一會兒說道：「我所說的基本規律祇不過是根據代數的一些基本概念而建立起來的运算規律，例如乘法的符号規則就是在正負數的基本概念上建立起來的，在火車上王老師也講過，兩個正數或兩個負數相乘得正數，一正一負相乘得負數；這就是構成乘法运算的基本規律，沒有它不能進行代數的乘法。可是光靠它還是不夠，隨着运算的逐步提高，所需的基本規律也就越來越複雜，因此我們不要認為基本的規律就是那些種，也不要追問究竟有哪些種，而要隨時重視它們，掌握它們，並且注意它們的發展。有些規律對於加法、減法、乘法和簡單的除法足夠用了，對於複雜的除法就不夠了，仍然需要其他的基本規律；更進一步學習方程的解法，也就需要另外一些基本規律。祇要學習的時候隨時注意，把它們放在首要的地位，重點突出地把它們搞清楚，其他枝節節的問題就不難掌握了。其實這種基本的規律並不是什麼深奧繁雜的東西，而是很容易學的。例如符号規則，王老師在火車上講過一些，有什麼困難嗎？沒有。最基本的東西往往都是比較容易懂的東西，學起來很容易，用的時候也很簡便。不過要想切切實實地掌握它們，並不是很容易的事，因為它們是從基本概念總結出來的，概念不清，就不能把它們弄明白。在學習的時候，不少人捨本逐末地去搞一些套公式、記算法的花樣，不想靠基本概念來搞明白基本的規律，這

样在解决问题的時候，还是会有困难的。我們現在的討論應該注意到這一點。讓我們先休息一下，再繼續談。]

符号規則的
介紹

這時小寧和他的表哥都覺得天气有些熱，表哥把草帽摘下來，搨着風；小寧把制服脫下來，用小毛巾擦一擦兩臂上的汗。抬頭一看，原來太陽漸漸升起，樹蔭移動了很多，兩個人祇顧聚精會神地談話，忘記了太陽晒，現在覺得熱了，才發現自己坐的地方早已沒有樹蔭，祇好向前移動了幾步，再找樹蔭坐下繼續談起來。表哥說：「首先我們要談一談符号規則，在火車上王老師解釋過，為什麼減去一個負數就同加上一個正數一樣，為什麼兩個負數乘起來得一個正數。這些道理總結起來就是符号規則。對於加減法來說，可以用四個公式來概括：

$$+(+a)=a, \quad +(-a)=-a,$$

$$-(+a)=-a, \quad -(-a)=a.$$

不用我解釋，它們的意思是很容易懂的。乘法的符号規則是这样：

$$(+a)(+b)=ab, \quad (+a)(-b)=-ab,$$

$$(-a)(+b)=-ab, \quad (-a)(-b)=ab.$$

用言語來述說就是同符号的兩個數相乘，乘積是正的；異符号的兩個數相乘，乘積是負的。它們的道理，你在火車上就知道了，不必再加說明。有了這個規則，兩個單項的代數式就可以作乘法，例如用 c^3d 乘 $-3a^2b$ ，我們得到：

$$(-3a^2b)(c^3d) = -3a^2bc^3d.$$

你仔細觀察這個乘法，從算術觀點來說，不像是乘法，祇不過把原有的括號去掉了，其實原來不寫括號也可以，

$$-3a^2b \cdot c^3d = -3a^2bc^3d.$$

這就是代數式的乘法。代數式是什麼意思呢？祇不過是一種代數式的形式變換，不拘 a, b, c, d 本身代表什麼數，變換以前和變換以後，它的數值是毫無改變的，因此就說這是代數式的恆等變形。兩個單項的式子既可以作乘法，三個毫無問題也可以作。不過光靠乘法的符號規則，不能完全解決乘法問題。對於比較複雜的兩個式子來說，要想作乘法就需要其他的規則，下面我們再談。由乘法的符號規則還可以引伸出自乘法的符號規則。這是因為一切正數自乘多少次結果仍得正數；負數自乘就要看是偶數次自乘還是奇數次自乘，再來決定乘積是正還是負，例如：

$$(-a)^4 = a^4, \quad (-a)^5 = -a^5,$$

最後，由乘法的符號規則可以推出除法的符號規則，這是很簡單的事情，我想你一定能夠自己想出來。┐

小寧听表哥講過乘法的符號規則，自己就想到除法的符號規則，從算術上的知識看，乘法和除法的互逆關係是很清楚的，因此，稍一遲疑，就回答道：┐正數被正數除一定得正數，負數被負數除也得正數；正數被負數除或者負數被正數除都要得負數。┐表哥說：┐你想得很快，說得很正確，能不能說一說理由並且舉個例子呢？┐

「讓我試一試，」小寧一邊想一邊說，「我覺得除法既是乘法的還原算法，除法的符號規則和乘法的符號規則是有密切關係的。負數被正數除，為什麼所得商數是負數呢？就是因為正數同負數相乘，所得乘積是負數。例如 $-6ab$ 被 $3a$ 除，商數是 $-2b$ ；就是因為 $3a$ 同 $-2b$ 相乘，乘積是 $-6ab$ 。」

再介紹指數
規則

「你對於符號規則基本上能夠瞭解了，」表哥很高興地說，「我們再來談一談指數規則吧。怎樣使用指數，王老師在火車上談過了。最基本的指數規則就是乘法的指數規則，你是知道的，這就是：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

其中 m 和 n 是正整數。這個規則的意義是很簡單的，用言語來說明就是 m 個 a 同 n 個 a 連乘的結果同 $m+n$ 個 a 連乘的結果一樣。這個道理是最明顯不過的。如果數一數一共是 $m+n$ 個 a 相乘，分成兩組相乘，或一次乘出來，結果是一樣的。由它還可以推出自乘法指數規則：

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

這就是說一個數的乘方的乘方仍等於該數的乘方；後一個乘方的指數等於原來兩回乘方的指數的乘積。不過這個規則當 m 是較大的數的時候用處不大，因此初學的時候，祇要注意 m 是2或3就夠用了，例如：

$$(2a^5)^2 = 4a^{10}, \quad (-a^5)^3 = -a^{15}.$$

關於乘法還有一個指數規則，就是：

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

這就是說，兩個數乘積的乘方，等於它們的乘方的乘積。有了乘法的指數規則，我們就能夠把一個單項式的乘方或幾個單項式相乘的結果求出來，例如：

$$(-a^3)^2 \cdot (-a^4)^3 \cdot (a^2)^4 = a^6 \cdot (-a^{12}) \cdot a^8 = -a^{26}.$$

但是還有一個困難沒有解決，就是乘法裏面的因子次序是不是可以顛倒，如果不能顛倒，那末很簡單的乘積都不能作恆等變形，例如：

$$(-a^2b) \cdot (ab^3) = -a^2bab^3,$$

必須中間的 ba 顛倒次序成為 ab ，才能得出最後結果 $-a^3b^4$ 。

關於這一點，後面我們再仔細談一下。]

小寧打斷了表哥的話，問道：「除法有沒有指數規則呢？」

「怎能沒有，除法既是乘法的還原算法，從乘法的第一個指數規則，就可以引伸出來除法的指數規則。你想 a^m 同 a^n 相乘的乘積既然是 a^{m+n} ，那末用 a^m 除 a^{m+n} 所得的商數一定是 a^n ，用 a^n 除 a^{m+n} 所得的商數也就是 a^m 。這就是說商數的指數等於被除數的指數減去除數的指數，祇要除數和被除數是同一個數的乘方。例如：

$$a^7 \div a^4 = a^3 \quad \text{又} \quad a^7 \div a^3 = a^4,$$

一般地說起來祇要 m 大於 n ， $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。]

「 m 如果等於 n 或小於 n ，這個規則能用嗎？」

「 m 如果等於 n ， a^m 和 a^n 就是相等的兩個數，相等的兩

个數作除法，商數是 1，所以当 $m=n$ 的時候，

$$a^m \div a^n = 1.$$

当 m 小於 n 的時候， $m-n$ 就是負數，將來到高中学代數的時候你可以知道：負數也能当作指數來用。現在我們暫且不用負數作指數，可是讓我們研究一下，当被除數是一个較低的乘方（比方 a 的 3 乘方），而除數是一个較高的乘方（如 a 的 7 乘方），問 $a^3 \div a^7$ 得什麼？我們可以这样來考察， $a^3 = a \cdot a \cdot a$ ， $a^7 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ ，被除數是三个 a 的連乘積，除數是七个 a 的連乘積，从除數和被除數裏面各刪去三个 a ，得到：

$$\frac{a^3}{a^7} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot 1}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^4}.$$

这个道理很簡單，意义是这样， a^3 被 a^7 除，所得結果就同 1 被 a^4 除一样。一般地說起來，当 m 小於 n 的時候，

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

这三种情形（ $m > n, m = n, m < n$ ），表面上虽有些差別，实际上是一致的。將來採用負數作指數，它們就統一起來了。这就是除法的指數規則。]

[当 m 等於 n 的時候， $m-n=0$ ， $a^m \div a^n = a^0$ ，0 也可以用作指數嗎？]

[当然可以，任何一个數，如果它本身不是 0，它的 0 次乘方就是 1，这就是說，当 $a \neq 0$ 的時候，

$$a^0 = 1.$$

這是什麼道理呢？當我們遇到一個新的數學符號（像是用 0 作指數），首先要考慮它是怎樣產生的，有什麼需要？假如沒有任何需要，或者毫無事實上的根據，憑空寫出一個符號，而要追問它的意義，這是完全荒謬的。現在我們所遇到的是 a^0 ，用 0 作為一個數的指數，是一個以前沒有遇見過的东西。它是由除法產生的，為了使除法的指數規則當 m 等於 n 的時候也適用，就需要用 0 作商的指數。不過當 m 等於 n 的時候， a^m 被 a^n 除，所得的商應該是 1；因此可以体会到用 0 作指數，事實上是表示在商式裏面沒有這個因子了。

「這樣說起來，當 m 小於 n 的時候， $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 也能適用，這時候 $m-n$ 是負數，用負幾作指數就表示在商數裏面缺少幾個因子，例如 $a^3 \div a^7 = a^{-4}$ ，表示商數裏面缺少四個因子 a ，也就是被除數較除數少四個因子 a 。負數也可以用作指數，表哥你說對不對？」

「不錯，不但負數就是分數也可以用作指數，不過我們現在先不去談它們，你入高中後慢慢就知道清楚了。」

「不過我覺得沒有什麼難懂，比方分數 $\frac{1}{2}$ 就可以用作指數，它表示半個因子的意思。」

「你說半個因子，什麼是半個因子呢？」

「表哥，我是這樣想，不知對不對，比方 9 的半個因子是 3，兩個這樣的因子乘起來是 9； a 的半個因子是 $a^{\frac{1}{2}}$ ，兩個 $a^{\frac{1}{2}}$ 連乘起來得 a 。」

「你說得很對，不過越說越遠，離開指數規則了，我們還是再談一談基本概念和規律吧。」

运算的基本
規律

小寧正在和表哥談到指數規則，興緻勃勃地越談越有趣味。忽听有人在遠處喊了一聲小寧，小寧隔着人叢望過去，原來是自己的小學同學小明，小寧知道他去年沒有投考中學，和幾個同學組織了一個自學小組，正在學習。今天小寧看見了他非常高興。趕緊站起來招手，喊他過來。小明很快地跑過來，和小寧的表哥也打了招呼。聽說小寧和表哥正在談代數問題，他很高興地說：「我也聽一聽，我們自學小組正在自學代數，有些問題弄不明白。我也許聽不懂，你們談吧。」

小寧的表哥向着小明說：「我們正要討論代數上加、減、乘、除各種運算的基本規律，你也參加討論吧。我們不是光談怎樣去作加法、減法、乘法和除法，而是想搞清楚為什麼要那樣去作，目的和要求是什麼？我覺得祇有先搞清楚那些基本概念和基本規律才能解決這些問題。首先是根據基本概念建立起來的符號規則，這種規則告訴我們為什麼減去一個負數就同加上一個絕對值相等的正數一樣，為什麼兩個負數相乘，乘積一定是正數等等；其次是指數規則，在乘法或除法裏面怎樣處理乘積或商數的指數，也是很重要的；最後就是運算的基本規律問題。在算術裏面就遇到過這樣的問題，像是 $3+2=2+3$ ， $3\times 2=2\times 3$ ，也就是加法的交換律、結合律，乘法的交換、結合、分配律等等。用文字符號抽象