高等学校规划教材

线性代数与空间解析几何

习题课教程

段清堂　等编

兵器工业出版社

参编人员：（以姓氏笔画为序）

朱　云　陈东升　段清堂

郭晓丽　黄守佳　谭瑞梅

前　言

线性代数与空间解析几何是高等学校理工科一门重要的基础课.本书是依据全国高校工科数学课程教学指导委员会制订的线性代数与空间解析几何教学基本要求编写的.目的是帮助学生掌握线性代数与空间解析几何的基本概念、基本方法和基本原理,提高学生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想像能力和解决实际问题的能力.

本书包括行列式及其计算,向量代数、平面与直线,矩阵及其运算,n 维向量,线性方程组,向量空间,矩阵的特征值与特征向量,二次型与二次曲面共八章,每一章都由基本要求、基本内容、题型归纳及解题方法与技巧、练习题、习题答案与提示五部分组成.

本书的第 1 章由谭瑞梅编写,第 2 章由朱云编写,第 3 章由陈东升编写,第 4,5 章由段清堂编写,第 7 章由黄守佳编写,第 6,8 章由郭晓丽编写;书中插图由黄松奇和何红亚绘制.

本书除作为线性代数与空间解析几何课的习题课教材外,还可以作为准备参加硕士研究生入学考试者的复习参考书.

本书的出版得到了郑州轻工业学院教材建设委员会、教务处教材科、信息与计算科学系的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢.

由于水平有限,书中难免有误,请读者批评指正.

编　者

2004 年 4 月

目　　录

第1章　行列式及其计算

1.1　基本要求

1. 掌握2、3阶行列式的对角线法则.

2. 了解排列与反序数的概念，正确理解n阶行列式的定义.

3. 熟知行列式的性质及其推论，并能熟练运用它们计算行列式.

4. 掌握余子式、代数余子式的概念以及行列式如何按行（或列）展开.

5. 会运用克莱姆(Cramer)法则求解线性方程组和方程组中的未知常数.

1.2　基本内容

1.2.1　重要定义

定义1.1　由n^2个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，排成的n行n列的表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每项前面带有符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，共有 $n!$ 项，记做

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

n 阶行列式简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\mathrm{Det}(a_{ij})$.

定义 1.2 在 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的元素保持其相对位置不变而形成的 $n-1$ 阶行列式，叫做元素 a_{ij} 的余子式，记做 M_{ij}. 在 M_{ij} 前冠以符号 $(-1)^{i+j}$，叫做元素 a_{ij} 的代数余子式，记做 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

* **定义 1.3** 在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中，任取 k 行、k 列 $(1\leqslant k\leqslant n-1)$，位于这 k 行、k 列交叉点上的 k^2 个元素按原来的次序所排成的 k 阶行列式 M，称为 D 的一个 k 阶子式. 划去子式 M 所在的行和列，余下的元素按原来的相对位置排成的 $(n-k)$ 阶行列式 N，称为 M 的余子式，M 所在行的序号为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，列的序号为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，称 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$ 为子式 M 的代数余子式.

注 带 * 号的为超出基本要求的内容.

1.2.2 重要性质及定理

行列式的性质是计算行列式的主要工具,要熟练掌握并能灵活运用.

性质1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D^T = D$.

性质2 交换行列式的两行(列),行列式改变符号.

交换行列式的第 i、j 两行(列),用 $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$) 表示.

推论 若行列式中有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

性质3 行列式的某一行(列)中的各元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式,或者叙述为:行列式中某一行(列)的各元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 若行列式中某一行(列)的元素全为零,则行列式为零.

把行列式的第 i 行(列)的各元素都乘以数 k,表示为 kr_i (kc_i);行列式的第 i 行(列)提取公因子 k,表示为 $r_i \div k$ ($c_i \div k$).

性质4 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式为零.

性质5 若行列式的某一行(列)的每个元素都可表示为两数之和,则这个行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注 一般地，$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

若 n 阶行列式的每个元素都可表示为两数之和，则它可分解成 2^n 个行列式之和，如上式可分解为

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式某一行(列)的各元素都乘以数 k 再加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把数 k 乘第 j 行(列)加到第 i 行(列)上，表示为 r_i+kr_j(c_i+

kc_j).

定理 1.1 〔行列式按行(列)展开定理〕n 阶($n \geqslant 2$)行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 即

$$D = |a_{ij}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

或
$$D = |a_{ij}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$
$$(j = 1, 2, \cdots, n).$$

推论 n 阶行列式的任意一行(列)中各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad (i \neq j)$$

或
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \qquad (i \neq j).$$

综合定理 1.1 及其推论有

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

或者
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}.$$

* **定理** 1.2 〔拉普拉斯(Laplace)展开定理〕在 n 阶行列式 D 中任取 k 行(列)($1 \leqslant k \leqslant n-1$),则由这 k 行(列)组成的所有 k 阶子式分别与其代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

定理 1.3 (克莱姆法则)对于 n 个方程、n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则这方程组有唯一解，其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把 D 的第 j 列的各元素依次换成方程组右端的常数项所得到的 n 阶行列式.

其逆否命题也正确：如果 n 个方程、n 个未知量的线性方程组无解或有两个以上不同的解，则它的系数行列式必为零.

定理 1.4　如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则它只有零解.

其逆否命题正确：如果 n 个方程、n 个未知量的齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式必为零.

1.2.3　计算 n 阶($n \geqslant 3$) 行列式的重要方法

1. 利用行列式的定义计算一些特殊行列式.

2. 利用行列式的性质把行列式化为上(下) 三角形行列式再计算.

利用此方法，尽量避免出现分数，为此可通过交换两行(或列)或利用性质6，把元素a_{11}调换成1或-1，再把a_{11}所在的列(或行)的其他元素化为0，依次类推.

3. 把行列式按某行(列)展开.

当行列式的某行(列)中有较多的零时，适宜用此方法；或者先利用行列式的性质把某行(列)化为含较多的零，再用这一方法，即是把较高阶的行列式化为较低阶的行列式进行计算，也称为降阶法.

4. 用范德蒙行列式公式计算.

5. 利用递推法.

对于n阶行列式D_n的计算或证明可利用递推法. 即若能找出D_n与D_{n-1}或D_n与D_{n-1}，D_{n-2}之间的一种关系——称为递推公式. 然后由此公式求出D_n，称为递推法. 注意：D_n，D_{n-1}，D_{n-2}等结构必须相同.

6. 升阶法.

升阶法也称加边法，是在原行列式的基础上增加一行一列(即升一阶)，且保持原行列式的值不变.

1.2.4 特殊行列式的计算公式

1. 对角行列式

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(未写出的元素均为零，本章均如此.)

2. 上(下)三角行列式

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 副对角线上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4. $n(n \geqslant 2)$ 阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

1.3 题型归纳及解题方法与技巧

题型一 应用行列式定义的有关问题

例 1.1 已知

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix},$$

求 x^3 的系数.

解 由行列式的定义知 $f(x)$ 是一个关于 x 的多项式函数，最高次幂为 x^3，主对角线上的 4 个元素分别位于不同行、不同列，4 个元素的乘积 x^3 必然是行列式的一项；而元素 $a_{11},a_{22},a_{34},a_{43}$ 也位于不同行、不同列，其对应于 $(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 的项是 $(-1)^1 x\cdot x\cdot 1\cdot 2x=-2x^3$，所以 x^3 的系数为 -1.

例 1.2 利用行列式的定义证明

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

分析 所给行列式的展开式，不考虑符号，各项可表示为 $a_i b_j c_k d_s e_t$；i,j,k,s,t 是 1,2,3,4,5 的任一个排列，只需证明，对所有的排列 $a_i b_j c_k d_s e_t=0$.

证明 因为 D 的每项除符号外，可表示为 $a_i b_j c_k d_s e_t$ 而 c_k,d_s,e_t，当 k,s,t 取 3,4,5 时，均为零，k,s,t 为 1,2,3,4,5 中 3 个不同的数，所以它们中至少有一个要取 3,4,5 中的 1 个数，所以 D 中的每一项至少有 1 个零因子，故 $D=0$.

例 1.3 利用 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$

证明 n 阶排列中奇排列与偶排列的个数相等.

证明 由 n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = 0$$

行列式的展开式中，除了符号外，每项都是 1，由行列式等于零知，$+1$ 的个数与 -1 的个数相等，所以 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 中奇数的个数与偶数的个数相等，即 n 阶排列中奇排列与偶排列的个数相等.

例 1.4 用行列式的定义计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

分析 由定义知，n阶行列式共有$n!$项，每一项都是位于不同行、不同列的 n 个元素之积，一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$. 若某一项 n 个元素的乘积中有零因子，则该项为零. 由于此行列式中零元素较多，因而为零的项较多，只须找出那些不为零的项.

解法一 所给行列式的第 1 行除了元素 $a_{1,n-1}$ 外，其余元素均为零，第 2 行除了元素 $a_{2,n-2}$ 外，其余全为零，依次分析第 3、4、…、n 行，可知，只有 $a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn}$ 不为零，且它的列标排列 $(n-1)(n-2)\cdots 1 n$ 的逆序数为

$$(n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

所以

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn} =$$
$$(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n =$$

$$(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n!$$

评注 计算行列式的方式、方法比较灵活多样,但结果必须相同,如果题目没有特别要求,你认为哪种方法得心应手就用哪种方法.此题还有如下两种解法:

解法二

$$D_n \xlongequal[i=n,n-1,\cdots,2]{c_i \leftrightarrow c_{i-1}} (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \cdot n!$$

解法三 按第 n 行(或列)展开

$$D_n = n \cdot (-1)^{n+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$n \cdot (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \cdot (n-1)! =$$

$$(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \cdot n!$$

题型二 利用行列式的性质计算或证明

例 1.5 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 0 & 4 \\ 7 & -3 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

分析 所给行列式为一般行列式,须化为上(下)三角形行列

式来计算，可用 r_2-r_1 或 r_3-r_2 然后交换第1、2行或第1、3行，把左上角元素调换为1，再进行以下步骤. 当化为三角形较麻烦时，可按行、列展开计算.

解

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 0 & 4 \\ 7 & -3 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4+r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-5r_1}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & 12 & 16 \\ 0 & -10 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & -1 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+2r_4]{r_2+r_4}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 26 \\ 0 & 2 & 2 & 21 \\ 0 & 6 & -1 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+6r_2]{r_3+2r_2}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 26 \\ 0 & 0 & 24 & 73 \\ 0 & 0 & 65 & 166 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-3r_3}$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 26 \\ 0 & 0 & 24 & 73 \\ 0 & 0 & -7 & 53 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 24 & 73 \\ -7 & -53 \end{vmatrix} = -761$$

例 1.6 设有行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 9 & 7 & 5 \\ 10 & 9 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

已知 1703,3159,975,10959 都能被 13 整除,不计算行列式,证明 D 能被 13 整除.

分析 所给的能被 13 整除的 4 个数,与行列式的元素有如下关系:个位、十位、百位、千位分别是第 4 列、第 3 列、第 2 列、第 1 列的各元素,利用行列式的性质,若这 4 个数能形成 D 的某一列(行),则 D 能被 13 整除.

证明 $$D \xlongequal[\substack{C_4+100C_2 \\ C_4+10C_3}]{C_4+1000C_1} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 1703 \\ 3 & 1 & 5 & 3159 \\ 0 & 9 & 7 & 975 \\ 10 & 9 & 5 & 10959 \end{vmatrix} \xlongequal{C_4 \div 13}$$

$$13\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 131 \\ 3 & 1 & 5 & 243 \\ 0 & 9 & 7 & 75 \\ 10 & 9 & 5 & 843 \end{vmatrix}$$

由行列式的定义,最后一个行列式为一整数. 故 D 能被 13 整除.

注 要证明行列式有公因子 k,常用的方法是证明行列式某行(列) 各元素有公因子 k,通常用性质 6,对行列式进行变换.